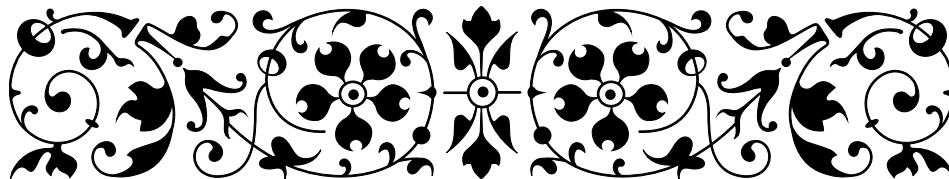


CIRCUITOS ELÉTRICOS,

MÉTODOS DE ANÁLISE E INTRODUÇÃO À SÍNTESE

POR
ANTÔNIO CARLOS MOREIRÃO DE QUEIROZ

Professor Titular do Departamento de Engenharia Eletrônica e de Computação
Escola Politécnica
Professor do Programa de Engenharia Elétrica
Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia (COPPE)
Universidade Federal do Rio de Janeiro



22 de junho de 2019

Sumário

I	Análise de circuitos	9
1	Técnicas baseadas na análise nodal	10
1.1	Introdução	10
1.2	Análise nodal de circuitos resistivos	12
1.3	Análise nodal sistemática	14
1.3.1	Descrição da estrutura	14
1.3.2	O Teorema de Tellegen	16
1.3.3	Descrição dos ramos	17
1.3.4	Geração do sistema nodal	18
1.3.5	Montagem direta do sistema nodal	19
1.3.6	Montagem do sistema nodal por estampas	20
1.3.7	Descrição do circuito através de um “netlist”	21
1.3.8	Solução do sistema	22
1.4	Análise no estado permanente senoidal	23
1.4.1	Capacitores e indutores	24
1.4.2	Transformadores	25
1.4.3	Estampas dos elementos reativos	26
1.4.4	Fontes independentes	27
1.4.5	Linhas de transmissão	28
1.4.6	Aplicações da análise no estado permanente senoidal	29
1.4.6.1	Cálculo de resposta em frequência	30
1.4.6.2	Resposta a um sinal periódico qualquer	31
1.4.7	Solução do sistema complexo	35
1.5	Análise nodal em transformada de Laplace	35
1.5.1	Elementos RLCM	36
1.5.2	Linhas de transmissão	38
1.5.3	Aplicações da análise em transformada de Laplace	39
1.5.3.1	Cálculo da resposta completa	39
1.5.3.2	Análise de circuitos lineares por partes	41
1.5.3.3	Cálculo de resposta em frequência	41
1.5.3.4	Análise de estabilidade	44
1.5.4	Solução do sistema	44
1.5.4.1	O algoritmo da eliminação	45
1.5.4.2	Interpolação	47
1.6	Deslocamento de fontes de tensão	49
1.7	Análise nodal modificada	53
1.7.1	Interpretação como uso de modelos	54
1.7.2	Indutores	57

1.7.3	O transformador ideal	57
1.7.4	O transformador real	59
1.7.5	O amplificador operacional ideal	65
1.7.5.1	O “fixador”	66
1.7.6	Tratamento simplificado do amplificador operacional	68
1.8	Análise nodal com modelos baseados em amp. operacionais	70
1.9	Análise nodal de circuitos resistivos não lineares	75
1.9.1	Resistor não linear	77
1.9.2	Transcondutor não linear	78
1.9.3	Amplificador de tensão não linear	79
1.9.4	Amplificador de corrente não linear	80
1.9.5	Transresistor não linear	80
1.9.6	Fontes não lineares controladas por várias variáveis	81
1.10	Algoritmo de análise pelo método de Newton-Raphson	83
1.11	Controle de convergência	84
1.12	Caminhada randômica	85
1.13	Modelamento	86
1.13.1	Diodos	86
1.13.2	Diodos lineares por partes	87
1.13.3	Diodo ideal	88
1.13.4	Transistores bipolares	89
1.13.5	Transistores MOS	92
1.13.5.1	Modelo para canal curto	94
1.13.6	O tiristor, ou SCR	95
1.13.7	Portas lógicas	96
1.13.7.1	Inversor	96
1.13.7.2	Portas de duas entradas	97
1.14	Cálculo de ponto de operação e modelo de pequenos sinais	99
1.15	Análise nodal no domínio do tempo	102
1.15.1	Método “backward”, ou implícito, de Euler	102
1.15.2	Método “forward”, ou explícito, de Euler	102
1.15.3	Método dos trapézios, ou integração bilinear	103
1.15.4	Capacitor linear invariante no tempo	104
1.15.5	Indutor linear invariante no tempo	105
1.15.6	Transformador linear invariante no tempo	107
1.15.7	Controle do passo	110
1.15.8	Artefatos devidos a memórias falsas	112
1.15.9	Efeitos em um oscilador LC	114
1.15.10	Método dos trapézios modificado, ou “Método θ ”	114
1.15.11	Métodos multipasso	116
1.15.11.1	Métodos de Adams-Bashforth	116
1.15.11.2	Métodos de Adams-Moulton	116
1.15.11.3	Passo variável	117
1.15.11.4	Estabilidade dos métodos de Adams	119
1.15.11.5	Controle do passo	120
1.15.12	Métodos de Gear	124
1.15.12.1	Estabilidade dos métodos de Gear	126
1.15.12.2	Uso do método de Gear de segunda ordem em análise de circuitos no tempo	126
1.15.12.3	Capacitor linear invariante no tempo	126
1.15.12.4	Indutor linear invariante no tempo	127

1.15.12.5	Transformador linear invariante no tempo	127
1.15.12.6	Ordem e passo variáveis nos métodos de Gear	128
1.15.13	Análise no tempo de circuitos lineares variantes no tempo	129
1.15.13.1	Capacitor linear variante no tempo	129
1.15.13.2	O dobrador de Bennet	131
1.15.13.3	Modelamento do capacitor linear variante no tempo	132
1.15.13.4	Indutor linear variante no tempo	133
1.15.13.5	Modelamento do indutor linear variante no tempo	134
1.15.13.6	Transformador linear variante no tempo	135
1.15.14	Análise no tempo de circuitos não lineares	136
1.15.14.1	Inicialização e avanço da análise no tempo	136
1.15.14.2	Capacitor não linear	137
1.15.14.3	Capacitância de um diodo semiconductor	138
1.15.14.4	Capacitâncias de transistores bipolares	140
1.15.14.5	Capacitâncias de transistores MOS	140
1.15.14.6	Capacitor controlado a tensão	141
1.15.14.7	Indutor não linear	142
1.15.14.8	Histerese	142
1.15.14.9	Transformador não linear	143
1.15.15	Análise no tempo de circuitos não lineares variantes no tempo	144
1.15.16	Modelos para elementos reativos variantes no tempo e não lineares	144
1.15.17	O memristor	153
2	Outros métodos de análise	155
2.1	Análise das malhas	155
2.1.1	Deslocamento de fontes de corrente	159
2.1.2	Análise das malhas modificada	160
2.1.3	Amplificador operacional na análise de malhas	164
2.1.4	Modelamento com amplificadores operacionais ideais na análise de malhas	166
2.1.5	Planaridade	167
2.2	Análises dos ciclos e dos cortes	167
2.2.1	Amplificador operacional nas análises de ciclos e cortes	174
2.3	Equações de estado	178
2.3.1	Como escrever equações de estado	179
2.3.1.1	Montagem sistemática do sistema de equações de estado	182
2.3.1.2	Casos em que a árvore não é normal	186
2.3.2	Solução do caso linear invariante no tempo	187
2.3.3	Eliminação da integral de convolução	190
2.3.4	Uso de equações de estado em simulação de redes passivas com redes ativas	193
II	Introdução à síntese de circuitos	200
3	Propriedades e teoremas básicos	201
3.1	Propriedades dos circuitos lineares invariantes no tempo	201
3.1.1	Portas	201
3.1.2	Resposta em frequência	202
3.2	Frequências naturais	202
3.2.1	Cálculo de frequências naturais	204
3.2.2	Frequências naturais de uma variável	204

3.2.2.1	Uso da simetria	205
3.3	Polos e zeros	206
3.3.1	Zeros em redes em escada	208
3.3.1.1	Divisores que não formam zeros	208
3.4	Estruturas para filtros	210
3.4.1	Aproximações	211
3.4.2	Transformações de frequência	213
3.4.2.1	Escalamento em frequência e impedância	213
3.4.2.2	Transformação passa-baixas - passa-altas	214
3.4.2.3	Transformação passa-baixas - passa-faixa	214
3.4.2.4	Transformação passa-baixas - rejeita-faixa	214
3.4.2.5	Número de elementos necessários	216
3.5	Teoremas	217
3.5.1	Teorema da substituição	218
3.5.2	Teorema da superposição	218
3.5.3	Teoremas de Thévenin e Norton	218
3.6	Redes de duas portas	220
3.6.1	Parâmetros Z	221
3.6.2	Parâmetros Y	221
3.6.3	Parâmetros h e g	221
3.6.4	Teorema da reciprocidade	222
3.6.5	Parâmetros ABCD	225
4	Síntese de circuitos passivos	227
4.1	Propriedades das impedâncias e admitâncias RLCM	227
4.1.1	Imitâncias LC	227
4.1.1.1	Realização de imitâncias LC	228
4.1.2	Imitâncias RC e RL	232
4.1.2.1	Realização de imitâncias RC e RL	233
4.1.3	Imitâncias RLCM	241
4.1.3.1	Síntese de Brune	241
4.1.3.2	Síntese de Bott e Duffin	244
4.1.3.3	Análogos mecânicos	248
4.2	Realização de funções de transferência na forma LC simplesmente terminada	248
4.2.1	Terminação na entrada	248
4.2.2	Terminação na saída	250
4.3	Realização de zeros finitos de transmissão em redes “ladder”	251
4.4	Realização de funções de transferência na forma LC duplamente terminada	256
4.4.1	Síntese de redes simétricas	258
4.4.1.1	Redes simétricas com níveis de impedância diferentes nas duas metades	262
4.4.2	Síntese de redes antimétricas	263
4.4.2.1	Redes simétricas com resistores imaginários	265
4.4.3	Forma geral da síntese de redes LC duplamente terminadas	267
4.4.4	Realização com terminações arbitrárias	275
4.4.5	Realização em “lattice”	276
4.4.6	“Lattice” de resistência constante	278
4.4.7	“Lattices” desbalanceadas	279

5	Aproximações	283
5.1	Aproximação por função característica	283
5.1.1	Aproximação de Butterworth	285
5.1.2	Aproximação de Chebyshev	286
5.1.3	Aproximação de Chebyshev inversa	292
5.1.4	Aproximação elíptica	293
5.1.4.1	Formulação clássica das aproximações elípticas	299
5.1.5	Generalização das aproximações por função característica	303
5.1.5.1	Obtenção da função característica por otimização	303
5.1.6	Casadores de impedância	307
5.2	Outras aproximações	308
5.2.1	Aproximação de Bessel	309
5.2.2	Aproximação com atraso de grupo tipo Chebyshev	310
5.2.3	Aproximação com atraso de grupo plano e zeros de transmissão finitos	310
5.2.4	Realização destes filtros	311
5.2.5	Equalizadores de fase	312
5.3	Redes de múltipla ressonância	313
5.3.1	Transferência de energia entre capacitores	313
5.3.2	Transferência de energia de indutor para capacitor	316
5.3.3	Transferência incompleta de energia	318
5.3.4	Operação com a resposta ao estado zero	320
6	Análise de sensibilidades	326
6.1	A função sensibilidade	326
6.2	Sensibilidades de módulo e fase	327
6.3	Medidas multiparamétricas	327
6.4	Sensibilidades de polos e zeros	329
6.5	Cálculo de sensibilidades usando rede adjunta	331
6.6	Cálculo do atraso de grupo	337
7	Filtros ativos	339
7.1	Realizações em cascata de biquads	339
7.1.1	Biquads com três amplificadores operacionais	340
7.1.1.1	Biquad de Tow e Thomas	340
7.1.1.2	Biquad de Akerberg e Mossberg	341
7.1.2	Biquads com um amplificador operacional	342
7.1.2.1	Biquads de Sallen e Key	343
7.1.2.2	Biquads com amplificador inversor e múltipla realimentação	346
7.1.2.3	Transformação CR-RC	349
7.1.2.4	Biquads baseados no duplo T	350
7.1.3	Ajuste de ganho em biquads	352
7.1.3.1	Redução de ganho	352
7.1.3.2	Aumento de ganho	353
7.2	Realizações usando conversores de impedância	355
7.2.1	O conversor negativo de impedância (NIC)	355
7.2.2	O conversor generalizado de impedância (GIC)	358
7.2.3	Filtros passa-altas	360
7.2.4	Filtros passa-baixas e outros	360
7.2.4.1	Indutores suspensos	361
7.2.4.2	O resistor negativo dependente da frequência (FDNR)	362

7.3	Simulação por equações de estado de filtros passivos	364
7.4	Filtros complexos	370
8	Filtros para microeletrônica	374
8.1	Filtros MOSFET-C	374
8.1.1	Frequências naturais de modo comum	378
8.2	Sintonia automática	379
8.2.1	Sintonia com oscilador	379
8.2.2	Sintonia com filtro controlado a tensão	380
8.3	Filtros OTA-C	381
8.3.1	Filtros OTA-C usando giradores multiporta	384
8.3.2	Eliminação de capacitores suspensos	385
8.3.3	Escalamento de faixa dinâmica em filtros OTA-C	388
8.3.4	Filtros balanceados OTA-C	389
8.3.4.1	Filtros OTA-C balanceados com distorção reduzida	392
8.3.4.2	Controle de modo comum	394
8.3.5	Biquads OTA-C	396
8.4	Filtros a capacitores chaveados	398
8.4.1	Análise em transformada Z	401
8.4.1.1	Sinais em filtros chaveados	401
8.4.1.2	Análise dos integradores a capacitores chaveados	404
8.4.2	Análise simplificada de circuitos a capacitores chaveados	406
8.4.3	Transformações de “s” para “z”	410
8.4.4	Predistorção em frequência	411
8.4.5	Simulação Redes “ladder” em capacitores chaveados	414
8.4.5.1	Rede “ladder” bilinear exata em capacitores chaveados com integradores de Euler	416
8.5	Filtros a corrente chaveada	423
8.5.1	Células de memória de baixa sensibilidade	425
8.5.2	Biquads a corrente chaveada	427
8.5.3	Simulação de redes passivas em corrente chaveada	429
8.5.4	Filtros a corrente chaveada por simulação de componentes	433
8.5.4.1	Formas direta e modulada	435
8.5.4.2	Transformações de Euler	437
8.5.4.3	Sensibilidades	438
8.5.4.4	Redução de sensibilidades por troca de posições de transcondutores	439
A	Programas de análise e síntese de circuitos	448
B	Atualizações	450
	Índice remissivo	456

Prefácio

“Causa latet, vis est notissima”. Ovídio¹.

ESTE texto² contém essencialmente o material lecionado pelo autor na cadeira de Circuitos Elétricos II no Departamento de Engenharia Eletrônica e de Computação da Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro³. O material estudado no curso está completo, com muitos temas extras também incluídos. Os temas foram separados em análise de circuitos e em uma introdução à síntese de circuitos.

A parte sobre análise estuda o material necessário ao desenvolvimento de programas de análise de circuitos, refletindo a experiência do autor no desenvolvimento de simuladores, usados em seus trabalhos de pesquisa e cursos. É assumido já um conhecimento básico sobre circuitos elétricos, os tipos de variáveis, os elementos que fazem os circuitos, etc., com o texto focando em métodos sistemáticos de análise voltados para simulação numérica de circuitos. Alguns materiais são não usuais, decorrendo de trabalhos de pesquisa do autor, como o tratamento das análises modificadas com o uso de modelos e os sistemas de redução do tamanho dos sistemas de equações com o uso de modelos baseados em amplificadores operacionais. A parte trata primeiramente os vários tipos de análise que podem ser feitos usando a análise nodal e a análise nodal modificada, e a seguir estende as mesmas análises para os métodos de malhas, ciclos e cortes, finalizando com equações de estado. O material cobre a análise de circuitos lineares, não lineares, invariantes ou variantes no tempo.

A parte sobre síntese estuda primeiramente as propriedades dos circuitos lineares invariantes no tempo, e então as técnicas básicas de síntese de impedâncias e funções de transferência através de redes passivas e ativas. Não pretende cobrir completamente o vasto tema, mas inclui a maior parte do material sobre síntese de circuitos lineares efetivamente usada ou desenvolvida nos cursos e trabalhos do autor. Materiais originais incluem métodos numéricos para geração de aproximações, síntese de redes simétricas e antimétricas, circuitos de múltipla ressonância e critérios para análise de sensibilidades. A parte trata primeiramente das propriedades gerais destes circuitos, passando a seguir aos métodos de síntese, com discussões ao final sobre aproximações, análise de sensibilidades e filtros ativos. O material do curso de Circuitos Elétricos II usualmente vai até a síntese de redes “ladder” LC simplesmente terminadas com zeros finitos de transmissão, seção 4.3, se estendendo além eventualmente.

Ao final a seção sobre filtros para microeletrônica cobre filtros em tempo contínuo e em tempo discretizado adequados para a construção em circuito integrado. Muitos materiais desenvolvidos pelo autor sobre estes filtros, especialmente sobre filtros OTA-C e filtros a corrente chaveada, são incluídos na seção.

¹“A causa está escondida, mas o efeito é bem conhecido”. Está também no frontispício do livro “The history and present state of electricity, with original experiments”, Joseph Priestley, 1775.

²©2010 Antônio Carlos M. de Queiroz. Todos os direitos reservados. Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida sem permissão do autor.

³Iniciando em 1983. Originalmente o nome da cadeira era Teoria de Circuitos II, passando a Circuitos Elétricos II em 1990. O material sobre síntese vem da cadeira de Teoria de Circuitos III, depois Síntese Moderna de Circuitos, extinta por volta de 2000, e mais tarde substituída por um curso optativo. Um curso que inclui material similar de síntese tem sido oferecido pelo autor nos cursos de pós-graduação do Programa de Engenharia Elétrica da COPPE/UFRJ desde 1991.

Temas adicionais e mais exemplos deverão ser adicionados com o tempo, mantendo relação com o curso, como material adicional, cobrindo mais sobre os trabalhos desenvolvidos pelo autor, ou decorrentes de atualizações.

Rio de Janeiro, junho de 2011,

Antônio Carlos M. de Queiroz

Parte I

Análise de circuitos

Capítulo 1

Técnicas baseadas na análise nodal

1.1 Introdução

As formas usuais de análise de circuitos aproximam o que realmente acontece nos circuitos elétricos, usando aproximações por elementos concentrados, onde os componentes se comportam como se fossem infinitamente pequenos e tivessem suas funções concentradas em um ponto. O circuito pode então ser decomposto em uma série de elementos de dois terminais, como resistores, capacitores, indutores e fontes independentes e controladas, formando “ramos” interconectados em “nós”. Para circuitos assim, valem as chamadas “leis de Kirchhoff”¹:

Lei de Kirchhoff das tensões (LKT, ou “Kirchhoff’s voltage law”, KVL, em inglês): A soma das diferenças de potencial elétrico (tensões elétricas, ou “voltagens”) ao longo de um circuito fechado é igual a zero. No caso, os circuitos fechados seriam através dos ramos que compõem o circuito, com as tensões medidas sobre eles.

Lei de Kirchhoff das correntes (LKC ou “Kirchhoff’s current law”, KCL, em inglês): A soma das correntes elétricas cruzando uma fronteira fechada é igual a zero. As fronteiras neste caso seriam definidas por conjuntos de um ou mais nós, com as correntes medidas sobre os ramos que deixam os conjuntos para outras partes do circuito.

A análise geral de circuitos teria que considerar as “leis de Maxwell”² para avaliar corretamente o que acontece com circuitos que não são infinitamente pequenos, que possuem resistências, capacitâncias e indutâncias parasitas por toda parte, e que irradiam e captam ondas eletromagnéticas. As leis de Maxwell, em sua forma vetorial, no vácuo (ou, com pouca diferença, no ar), são:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mu_0 \vec{H} &= 0 \\ \nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E} &= \rho \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\end{aligned}$$

onde \vec{H} é o campo magnético (ou campo “magnetizante”, com o “campo magnético” ou “densidade de

¹Enunciadas no artigo do físico alemão Gustav Kirchhoff, “Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene insbesondere durch eine kreisförmige”, *Annalen der Physik und Chemie*, 64, pp. 497-514, 1845. As duas leis aparecem em um apêndice ao fim do artigo. Kirchhoff tinha 21 anos e ainda era estudante.

²Descritas, de forma bem mais complexa, pelo físico escocês James Clerk Maxwell em uma série de quatro artigos com o título “On Physical Lines of Force”, *Philosophical Magazine*, 1861-1862. A forma atual das equações é devida a Oliver Heaviside, que as apresentou por volta de 1884 em artigos na revista “The Electrician”.

fluxo magnético” sendo $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$), \vec{E} é o campo elétrico, \vec{J} é uma densidade de corrente elétrica por área, e ρ é a densidade superficial de carga. μ_0 é a permeabilidade do vácuo e ϵ_0 é a permissividade do vácuo³. A primeira equação diz que o campo magnético não tem fontes. Ele ocorre sempre em linhas fechadas. A segunda equação é a “lei de Gauss”, que diz que acumulações de carga são as fontes do campo elétrico. A terceira equação é a “lei de Ampère”, modificada por Maxwell. Ela diz que o campo magnético circula ao redor de correntes elétricas, e que campos elétricos variantes também geram campos magnéticos. O termo acrescentado por Maxwell à corrente é a chamada “corrente de deslocamento”. A quarta equação é a “lei de Faraday”, que diz que um campo magnético variante gera um campo elétrico ao redor dele.

Quando um circuito elétrico é pequeno o suficiente, ou opera devagar o suficiente, pode-se ignorar os termos envolvendo as constantes ϵ_0 e μ_0 , o que corresponde a ignorar efeitos relacionados com campos elétricos e magnéticos no circuito. Considere-se também que como a velocidade da luz no vácuo vale $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, isto corresponde a considerar que as dimensões do circuito são pequenas em relação ao comprimento de onda $\lambda = c_0/f$ dos sinais de frequência até f considerados. Nesta condição, a primeira equação perde o sentido, a segunda diz que não existe acumulação de carga nos condutores, a terceira diz que o campo magnético é gerado por correntes apenas, e a terceira diz que não há circuitos fechados de campo elétrico. A terceira equação permite concluir, aplicando-se o divergente em ambos os lados, que:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0$$

E a quarta equação que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Estas duas expressões são as formas genéricas das leis de Kirchhoff, que dizem que o somatório das correntes elétricas saindo de alguma região fechada é nulo (KCL), e que o somatório das tensões elétricas ao longo de um circuito fechado é nulo (KVL), já que a integral do campo elétrico na distância é uma tensão elétrica.

É interessante notar que campos elétricos e magnéticos em circuitos a parâmetros concentrados são representados por capacitores e indutores. Um nó onde existe acumulação de carga, aparentemente violando a lei das correntes, pode ser considerado como tendo capacitâncias ligadas a outros pontos do circuito, onde há acumulação de carga oposta. A lei das correntes é então satisfeita pelas correntes de deslocamento entre as placas destes capacitores, e o campo elétrico fica então todo entre as placas deles. Um circuito fechado onde as tensões não somam zero pode ser considerado como tendo indutâncias e indutâncias mútuas nele. A diferença para zero fica então nas tensões sobre estas indutâncias, e o campo magnético fica dentro dos indutores e transformadores acrescentados. Propagação de sinais com velocidade finita e radiação eletromagnética pode ser modelada com linhas de transmissão⁴.

Com a eliminação dos campos, restam apenas as variáveis de corrente e tensão, \vec{j} e \vec{v} , com efeitos dos campos elétricos e magnéticos modelados pelas integrais destas quantidades no tempo, a carga elétrica em capacitores, $q(t) = \int j(t)dt$, e o fluxo magnético⁵ em indutores e transformadores, $\phi(t) = \int v(t)dt$. Associações instantâneas entre tensões e correntes são modeladas por resistores, fontes controladas e fontes independentes. O objetivo dos métodos de análise de circuitos a serem estudados é calcular as correntes e as tensões em todos os elementos do circuito, com o circuito considerado como tendo

³As constantes μ_0 e ϵ_0 valem, no Sistema Internacional de Unidades, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} = 1.2566370614 \times 10^{-6}$ H/m e $\epsilon_0 = 8.8541878176 \times 10^{-12}$ F/m. As duas quantidades estão relacionadas com a velocidade da luz no vácuo, $c_0 = 299792458$ m/s, por $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$.

⁴Linhas de transmissão são tratadas apenas sumariamente aqui, como material opcional.

⁵Mais apropriadamente o “enlace de fluxo magnético”. O fluxo magnético é a integral do campo magnético \vec{B} em uma superfície, $\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$. Para um indutor de uma espira, esta superfície seria a área envolta pela espira. Para N espiras com o mesmo campo magnético interno, entretanto, o enlace de fluxo magnético ϕ é N vezes maior, e a tensão sobre o conjunto de espiras também N vezes maior, com a área contando novamente a cada espira. Em geral o fluxo não é constante para todas as espiras, e apenas a soma dos valores em todas as espiras, o enlace de fluxo, é importante.

parâmetros concentrados, com efeitos distribuídos ignorados, ou aproximados por circuitos também a parâmetros concentrados. A figura 1.1 mostra os elementos básicos a parâmetros concentrados, em suas representações para o caso linear, invariante no tempo.

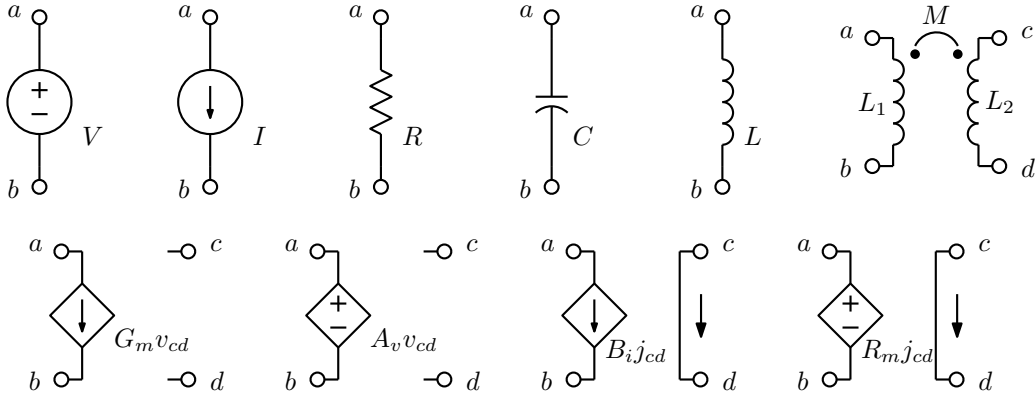


Figura 1.1: Elementos básicos a parâmetros concentrados. Acima, fontes independentes de tensão e de corrente, resistor, capacitor, indutor e transformador com indutância mútua entre dois indutores. Abaixo, fontes controladas de corrente e de tensão, controladas por tensão e por corrente. Transcondutor, amplificador de tensão, amplificador de corrente e transresistor.

As fontes independentes geram tensões ou correntes fixas, $v_{ab} = V$ ou $j_{ab} = I$. O resistor associa tensões e correntes por $v_{ab} = Rj_{ab}$. O capacitor associa a carga elétrica com a tensão, $q_{ab} = Cv_{ab}$. O indutor associa o fluxo magnético com a corrente, $\phi_{ab} = Lj_{ab}$. O transformador associa os fluxos magnéticos em dois indutores com as correntes em ambos, $\phi_{ab} = L_1 j_{ab} + M j_{cd}$ e $\phi_{cd} = M j_{ab} + L_2 j_{cd}$. As fontes controladas associam tensões e correntes em ramos controlados e controladores. Transcondutor: $j_{ab} = G_m v_{cd}$, amplificador de tensão: $v_{ab} = A_v v_{cd}$, amplificador de corrente: $j_{ab} = B_i j_{cd}$ e transresistor: $v_{ab} = R_m j_{cd}$.

1.2 Análise nodal de circuitos resistivos

Em circuitos resistivos, não existem elementos com “memória”, como capacitores e indutores. Existem apenas resistores e fontes controladas, que geram associações instantâneas entre tensões e correntes. A solução não depende da história anterior. Para a chamada “análise nodal”⁶, o circuito é considerado decomposto em ramos de dois terminais ligados entre nós de conexão. Cada ramo é descrito pela relação entre corrente e tensão nele, que pode envolver tensões e correntes sobre outros ramos também. A análise nodal consiste em escrever, para todos os nós do circuito com a exceção de um, o nó de terra ou de referência, de uma equação exprimindo a lei de Kirchhoff das correntes para o nó:

$$\sum \text{correntes saindo do nó} = 0$$

As equações devem ter como incógnitas as tensões nodais, que são as tensões entre os nós e o nó de referência, onde o potencial é considerado nulo. As correntes nos ramos devem ser expressas considerando-se as relações entre corrente e tensão nos ramos.

Em um circuito resistivo, para a análise nodal, os ramos podem conter apenas resistores, fontes de corrente independentes e fontes de corrente controladas por tensão entre nós, ou transdutores, pois

⁶O método vem de trabalhos de Ohm, Kirchhoff e Maxwell. A análise nodal básica para circuitos resistivos aparece no livro de Maxwell “A Treatise on Electricity and Magnetism”, 1873, §280. O mesmo na segunda edição de 1881.

nestes elementos se pode exprimir a corrente em função de uma ou mais tensões, no próprio ramo ou em outros, ou a corrente é fixa. Circuitos que contenham outros tipos de elemento, como fontes de tensão, independentes ou controladas, e curto-circuitos, devem ser adequadamente transformados (ver “deslocamento de fontes” e “análise nodal modificada”, adiante) antes da aplicação da análise nodal.

Exemplo: Seja o circuito da figura 1.2:

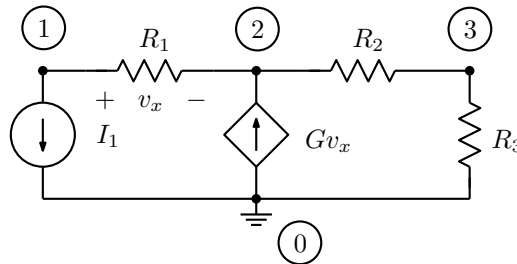


Figura 1.2: Circuito resistivo linear.

As equações nodais são:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{e_1 - e_2}{R_1} = -I_1 \\ 2) \quad & \frac{e_2 - e_1}{R_1} - G(e_1 - e_2) + \frac{e_2 - e_3}{R_2} = 0 \\ 3) \quad & \frac{e_3 - e_2}{R_2} + \frac{e_3}{R_3} = 0 \end{aligned}$$

A equação do nó de terra (0), que não é escrita por ser a soma das demais com sinal invertido, seria:

$$0) \quad G(e_1 - e_2) - \frac{e_3}{R_3} = I_1$$

Resulta um sistema de equações lineares, que pode ser escrito em forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} - G & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + G & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema ficou linear pois apenas componentes lineares foram usados no circuito. O sistema tem uma única solução, supondo que as equações sejam linearmente independentes (do contrário existiriam infinitas soluções) e que não descrevam hiperplanos paralelos (caso sem solução).

O sistema nodal pode ser escrito também para circuitos não lineares. Apenas não é mais possível colocá-lo em forma matricial neste caso, e o número de soluções depende da natureza das não-linearidades.

Exemplo: Equações nodais para o circuito não linear resistivo da figura 1.3:

As equações nodais são não lineares, da forma $\vec{F}(\vec{e}) = 0$:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{e_1}{R_1} + K(e_1 - e_2)^2 + \frac{A}{e_1 - e_3} - I_1 = 0 \\ 2) \quad & -K(e_1 - e_2)^2 + \frac{e_2}{R_2} + G(e_2 - e_3)^3 = 0 \\ 3) \quad & -G(e_2 - e_3)^3 + \frac{e_3}{R_3} - \frac{A}{e_1 - e_3} = 0 \end{aligned}$$

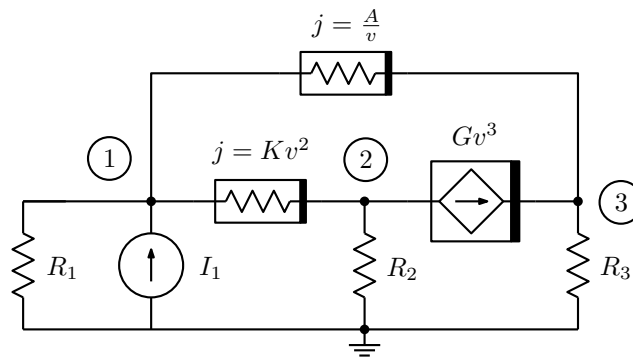


Figura 1.3: Circuito resistivo não linear.

Geralmente estes sistemas só podem ser resolvidos por métodos numéricos, como o método de Newton-Raphson, que se verá mais adiante que é de relativamente simples implementação. Sistemas de equações não lineares podem ter múltiplas soluções, ou nenhuma solução. Em circuitos corretamente modelados, sempre há ao menos uma solução.

1.3 Análise nodal sistemática

No caso de circuitos lineares (e como se verá mais adiante, outros circuitos também, pois o método de solução recai neles), para uma descrição mais sistemática, utilizável em um computador, pode-se descrever o circuito através de um conjunto de matrizes e vetores.

1.3.1 Descrição da estrutura

A estrutura pode ser descrita por um “grafo” numerado e orientado, onde ficam identificadas as polaridades consideradas nos ramos, e a que nós eles estão ligados, como na figura 1.4.

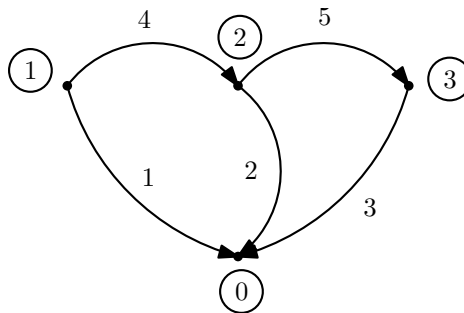


Figura 1.4: Grafo orientado e numerado.

O grafo pode ser descrito por uma “matriz de incidência” $[A_a]$, que descreve a que nós os ramos se conectam e com qual sentido. Esta matriz tem $n + 1$ linhas (número total de nós, inclusive o de terra) e b (número de ramos) colunas. Os elementos da matriz $[A_a]$ são:

$$a_{ik} = 1 \text{ se o ramo } k \text{ sai do nó } i.$$

$a_{ik} = -1$ se o ramo k entra no nó i .

$a_{ik} = 0$ se o ramo k não toca o nó i .

No caso do grafo da figura 1.4, $[A_a]$ tem a forma:

$$[A_a] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

As direções dos ramos identificam os sentidos em que se quer medir as tensões e as correntes sobre eles. Segue-se a norma de identificar a direção do ramo com a direção da corrente elétrica, considerada como fluxo de cargas positivas, e de considerar que o terminal positivo do ramo é por onde a corrente entra, como na figura 1.5.

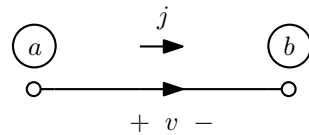


Figura 1.5: Direções associadas.

Essas direções são mera convenção, por motivos históricos. Sabe-se que a corrente elétrica é praticamente sempre um fluxo de elétrons, cargas negativas, fluindo na direção oposta à da corrente positiva, mas isto não faz nenhuma diferença em circuitos elétricos normais⁷. Não haveria problema também de considerar o terminal positivo o por onde a corrente sai. Apenas as tensões seriam calculadas todas com sinais opostos.

A matriz $[A_a]$ está ligada às leis de Kirchhoff. A lei das correntes é expressa na relação:

$$[A_a]\vec{j} = \vec{0}$$

onde \vec{j} é o vetor das correntes nos ramos. No exemplo:

$$\text{Nó 0 : } -j_1 - j_2 - j_3 = 0$$

$$\text{Nó 1 : } j_1 + j_4 = 0$$

$$\text{Nó 2 : } j_2 - j_4 + j_5 = 0$$

$$\text{Nó 3 : } j_3 - j_5 = 0$$

A lei das tensões aparece quando se verifica a relação entre as tensões nos ramos e os potenciais nos nós:

$$\vec{v} = [A_a]^T \vec{e}$$

⁷A existência de dois tipos de carga elétrica foi descrita primeiramente por Charles Du Fay, em 1733, que as chamou de eletricidade “vítrea” e eletricidade “resinosa”, pois eram os tipos obtidos atritando vidro e resinas como se fazia nos estudos de eletricidade estática na época. Os nomes atuais, de cargas “positivas” e “negativas” são devidos a Benjamin Franklin, que usou estes termos ao descrever sua teoria de que os efeitos elétricos eram causados por excesso e falta de um único tipo de carga, por 1747. A eletricidade “vítrea” ficou sendo a positiva, que era a produzida pelas máquinas eletrostáticas de fricção da época, que atritavam vidro com almofadas de couro. As polaridades de tensão e corrente seguem então as mesmas orientações, com corrente positiva sendo uma que retira carga positiva de um ponto e a coloca em outro, e a tensão positiva a que aparece sobre um resistor positivo percorrido por uma corrente positiva segundo as direções associadas, ou entre cargas elétricas positivas e negativas em um capacitor. O fato da corrente elétrica normal ser um fluxo de cargas negativas em direção contrária à da corrente positiva foi verificado com a descoberta do elétron por J. J. Thompson em 1897, mas a esta época as noções sobre a eletricidade já estavam firmemente estabelecidas, e a convenção foi mantida.

onde \vec{v} é o vetor de tensões nos ramos e \vec{e} é o vetor de tensões nodais, no caso ainda incluindo a tensão no nó de terra. No exemplo:

$$\text{Ramo 1 : } v_1 = -e_0 + e_1$$

$$\text{Ramo 2 : } v_2 = -e_0 + e_2$$

$$\text{Ramo 3 : } v_3 = -e_0 + e_3$$

$$\text{Ramo 4 : } v_4 = e_1 - e_2$$

$$\text{Ramo 5 : } v_5 = e_2 - e_3$$

A tensão, ou melhor, o potencial, no nó de terra é definido como sendo zero. Assim, uma das linhas de $[A_a]^T$ multiplica zero na última equação, e é dispensável. Também, a linha de $[A_a]$ correspondente ao nó de terra faz em $[A_a]\vec{j} = 0$ a equação nodal do nó de terra, que é apenas o negativo da soma das demais equações. Assim, define-se a matriz de incidência reduzida $[A]$ como a matriz $[A_a]$ sem a linha correspondente ao nó de terra. As relações $[A]\vec{j} = 0$ e $\vec{v} = [A]^T\vec{e}$ continuam válidas, com $e_0 = 0$ sendo a tensão no nó de terra. No caso:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1.3.2 O Teorema de Tellegen

Este teorema [15] diz que a soma dos produtos de tensão e corrente em todos os ramos de um circuito é nula. Ele é consequência das leis de Kirchhoff:

$$\sum_{k=1}^b j_k v_k = \vec{j}^T \vec{v} = \vec{j}^T [A]^T \vec{e} = [A]\vec{j}^T \vec{e} = [\vec{0}]^T \vec{e} = 0$$

Para um certo circuito, sendo \vec{j} e \vec{v} funções do tempo ou constantes, ele reflete a conservação da energia, pois a soma das potências dissipadas ou geradas nos ramos dá zero. Mas o teorema é também válido em análise no estado permanente senoidal, em transformadas de Laplace ou outras, onde a multiplicação de tensão por corrente não é diretamente a potência. Uma possível utilidade é na verificação do resultado de uma análise numérica. Excessivo erro numérico nos cálculos leva ao somatório resultando em valor significativo em relação às potências nos ramos do circuito.

O teorema de Tellegen tem uma propriedade curiosa: Observe-se que \vec{j} e \vec{v} podem ser medidos em circuitos diferentes, que tenham a mesma matriz de incidência $[A]$. Assim, se \vec{j}_x e \vec{v}_x são medidos em um circuito e \vec{j}_y e \vec{v}_y em outro, ambos com o mesmo grafo:

$$\vec{j}_x^T \vec{v}_x = \vec{j}_y^T \vec{v}_y = \vec{j}_x^T \vec{v}_y = \vec{j}_y^T \vec{v}_x = 0$$

As formas cruzadas podem também ser usadas para verificação de análises, por exemplo usando valores de análises no tempo de um circuito em dois tempos diferentes. São importantes para provar alguns teoremas sobre circuitos, como o da reciprocidade, adiante, e levam também à análise de sensibilidades pelo “método da rede adjunta”, onde valores obtidos das análises de dois circuitos com o mesmo grafo, um obtido do outro por certas regras (a “rede adjunta”), são usados para calcular as derivadas da solução em relação a variações de parâmetros do circuito [11].

Exemplo: Sejam os circuitos da figura 1.6. Um é linear e o outro é não linear. As soluções dos dois circuitos são triviais:

$$\begin{array}{cccc}
 v_1 = -10 \text{ V} & j_1 = -10 \text{ A} & \hat{v}_1 = -1/8 \text{ V} & \hat{j}_1 = -8 \text{ A} \\
 v_2 = -80 \text{ V} & j_2 = -40 \text{ A} & \hat{v}_2 = 2 \text{ V} & \hat{j}_2 = 2/5 \text{ A} \\
 v_3 = -90 \text{ V} & j_3 = 10 \text{ A} & \hat{v}_3 = 15/8 \text{ V} & \hat{j}_3 = 8 \text{ A} \\
 v_4 = -80 \text{ V} & j_4 = 30 \text{ A} & \hat{v}_4 = 2 \text{ V} & \hat{j}_4 = -42/5 \text{ A}
 \end{array}$$

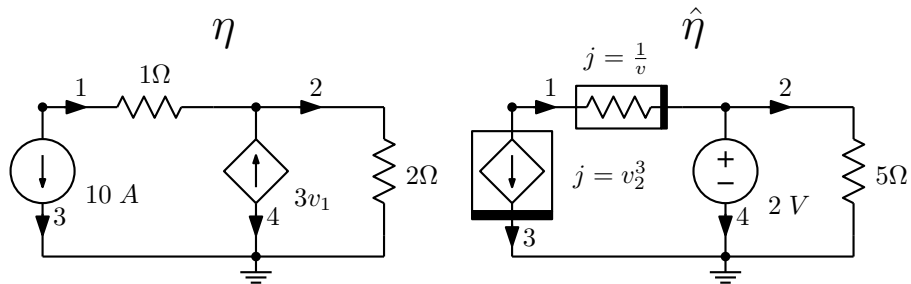


Figura 1.6: Dois circuitos para verificação do teorema de Tellegen.

É simples verificar que o teorema de Tellegen é satisfeito nas quatro formas:

$$\begin{aligned}
 \sum v_i j_i &= 100 + 3200 - 900 - 2400 = 0 \\
 \sum \hat{v}_i \hat{j}_i &= 1 + 4/5 + 15 - 84/5 = 0 \\
 \sum \hat{v}_i j_i &= 10/8 - 80 + 150/8 + 60 = 0 \\
 \sum v_i \hat{j}_i &= 80 - 32 - 720 + 672 = 0
 \end{aligned}$$

1.3.3 Descrição dos ramos

Os ramos de um circuito podem ser transformados de forma a conter apenas fontes de corrente, independentes ou controladas por tensões nos ramos. O resistor é um caso particular, em que o ramo onde a tensão é tomada é o mesmo da corrente. Esta é a forma controlada a tensão de um ramo. Um ramo geral obedece então à equação:

$$j_k = \frac{v_k}{R_k} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^b G_{m \text{ ki}} v_i + i_{sk}$$

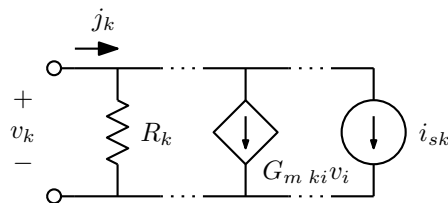


Figura 1.7: Ramo padrão para análise nodal.

O conteúdo de todos os ramos pode então ser descrito pela relação:

$$\vec{j} = [G]\vec{v} + \vec{i}_s$$

onde $[G]$ é uma matriz de dimensão $b \times b$, “matriz de condutância dos ramos”, e \vec{i}_s é um vetor de b dimensões, “vetor de fontes de corrente dos ramos”. Resistores aparecem como condutâncias $1/R$ na diagonal principal de $[G]$, transdutores como transcondutâncias fora da diagonal. No exemplo da figura 1.8:

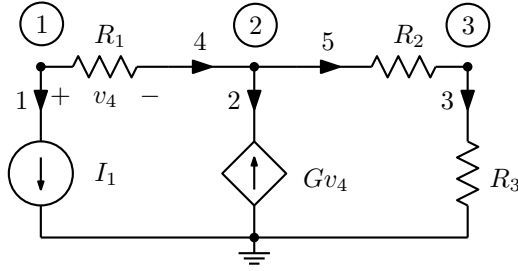


Figura 1.8: Circuito com ramos orientados e numerados.

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}; \vec{i}_s = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este exemplo não tem ramos com elementos em paralelo, e assim cada elemento gera um ramo. Ramos em paralelo podem ser combinados se contendo elementos do ramo padrão, mas é mais usual colocar apenas um elemento por ramo.

1.3.4 Geração do sistema nodal

Combinando as equações acima, premultiplicando as equações dos ramos por $[A]$ e substituindo $\vec{v} = [A]^T \vec{e}$:

$$[A]\vec{j} = [A][G][A]^T \vec{e} + [A]\vec{i}_s$$

ou, como $[A]\vec{j} = \vec{0}$:

$$[A][G][A]^T \vec{e} = -[A]\vec{i}_s$$

que é o sistema nodal $[G_n]\vec{e} = \vec{i}_n$. A matriz $[G_n] = [A][G][A]^T$, chamada “matriz de condutância dos nós”, tem dimensão $n \times n$, e o vetor $\vec{i}_n = -[A]\vec{i}_s$, chamado “vetor de fontes de corrente nos nós”, tem dimensão n . As incógnitas são as n tensões nodais \vec{e} .

Fazendo as operações com as matrizes acima, resulta, obviamente, o mesmo sistema obtido “informalmente”:

$$\begin{aligned}
 [G_n] &= [A][G][A]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G - \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3} & 0 & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} - G & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + G & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \\
 \vec{i}_n &= -[A]\vec{i}_s = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 [G_n]\vec{e} = \vec{i}_n &\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} - G & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + G & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

1.3.5 Montagem direta do sistema nodal

O procedimento descrito acima, embora geral, é desnecessariamente complicado para uma montagem manual do sistema, ou mesmo para uma análise computacional. É simples observar que os elementos aparecem no sistema final sempre em posições bem determinadas. As regras para a construção direta do sistema nodal são:

O circuito deve ser primeiramente transformado de forma a que existam apenas resistores, fontes de corrente independentes, e transdutores controlados por tensões nodais.

Considere-se temporariamente os transdutores como se fossem fontes independentes.

A matriz de condutância dos nós fica então simétrica, com:

$$[G_n]_{kk} = \sum \text{condutâncias ligadas ao nó } k.$$

$$[G_n]_{ki} = - \sum_{k \neq i} \text{condutâncias ligadas entre os nós } i \text{ e } k.$$

O vetor de fontes de corrente nos nós acumula as fontes que entram nos nós:

$$\vec{i}_{nk} = \sum \text{fontes de corrente entrando no nó } k, \text{ positivas se entrando e negativas se saindo.}$$

Os termos controlados criados pelas transcondutâncias em \vec{i}_n são então passados para a matriz $[G_n]$, gerando a forma final do sistema.

No exemplo, tem-se inicialmente, deixando o transcondutor como se fosse uma fonte independente:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_1 \\ G(e_1 - e_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Transporta-se então para dentro de $[G_n]$ os termos envolvendo \vec{e} em \vec{i}_n , obtendo o sistema final, o mesmo anterior.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 \\ -\frac{1}{R_1} - G & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + G & -\frac{1}{R_2} \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

É simples fazer algumas verificações para ver se o sistema está montado corretamente: Todas as entradas dentro de $[G_n]$ são condutâncias e transcondutâncias, e todas as entradas em \vec{i}_n são fontes independentes de corrente. Condutâncias aterradas somente aparecem uma vez, na diagonal principal. Condutâncias suspensas aparecem quatro vezes, duas na diagonal principal com sinal positivo e duas fora dela, com sinal negativo, nas mesmas colunas e linhas. Transcondutâncias aparecem uma, duas, ou quatro vezes, dependendo de se os nós de controle e de saída incluem o nó de terra. Fontes de corrente aparecem uma ou duas vezes em \vec{i}_n , dependendo se estejam aterradas ou não.

Todas as tensões e todas as correntes nos ramos podem ser obtidas, depois da solução do sistema para \vec{e} , pelas relações:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= [A]^T \vec{e} \\ \vec{j} &= [G]\vec{v} + \vec{i}_s \end{aligned}$$

1.3.6 Montagem do sistema nodal por estampas

Para operação em computador, um método mais prático é o da montagem por “estampas”, onde cada elemento gera uma série de adições de termos ao sistema. Parte-se de um sistema nodal com $[G_n]$ e \vec{i}_n zerados, e adiciona-se as estampas dos elementos (figura 1.9):

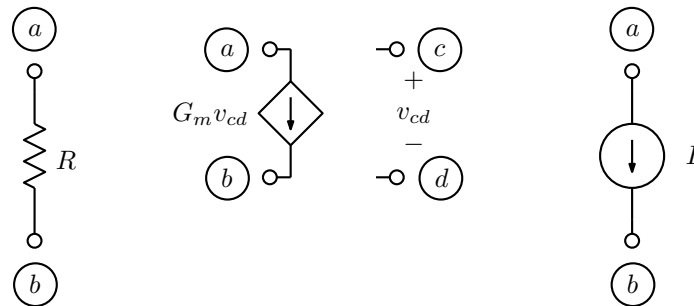


Figura 1.9: Elementos básicos para análise nodal. Resistor, transcondutor e fonte de corrente.

Estampa, que fica apenas em $[G_n]$, de um resistor de valor R entre os nós a e b :

$$\begin{matrix} a & b \\ a & b \end{matrix} \begin{bmatrix} +1/R & -1/R \\ -1/R & +1/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Estampa, que fica apenas em $[G_n]$, de um transcondutor de transcondutância G_m com saída entre os nós a e b e entrada entre os nós c e d :

$$\begin{matrix} & a & b & c & d \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & +G_m & -G_m \\ \cdot & \cdot & -G_m & +G_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Estampa, que fica apenas em \vec{i}_n , de uma fonte de corrente de valor I , entre os nós a e b :

$$\begin{matrix} & a & b \\ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} -I \\ +I \end{bmatrix} \end{matrix}$$

1.3.7 Descrição do circuito através de um “netlist”

A montagem por estampas é usualmente utilizada em associação com a descrição do circuito através de uma lista, ou “netlist”, que descreve a estrutura do circuito. No caso de uma análise de circuito resistivo linear, uma única leitura do “netlist” é suficiente para a montagem do sistema nodal. No exemplo da figura 1.10, o “netlist” poderia ser:

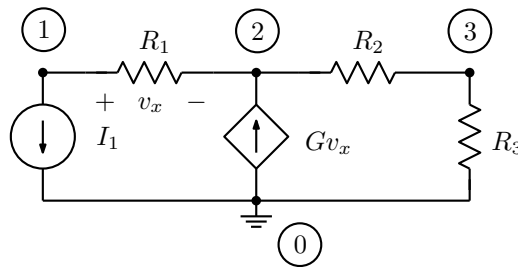


Figura 1.10: Circuito resistivo linear.

```
I1 1 0 <corrente>
R1 1 2 <resistência>
G1 0 2 1 2 <transcondutância>
R2 2 3 <resistência>
R3 3 0 <resistência>
```

Os valores entre “< >” seriam os valores numéricos dos parâmetros e outras informações. Foi seguida a notação usual de “netlist” usada em programas de análise de circuitos como o SPICE⁸. Note que basta zerar um sistema nodal de 3 equações e somar a ele as estampas dos 5 elementos uma a uma em qualquer ordem para ter o sistema nodal montado. As partes das estampas que incluem o nó 0 não são montadas, ou, mais simplesmente, podem ser montadas em uma linha e coluna 0, não usadas na solução do sistema (mas zeradas inicialmente também).

⁸Programa clássico de análise de circuitos desenvolvido na Universidade da Califórnia, Berkeley, a partir do fim dos anos 1960. Ainda mantido e amplamente utilizado em muitas versões.

Também é possível montar imediatamente as matrizes $[G]$ e $[A]$ e o vetor \vec{i}_s a partir de estampas, se se quiser montar o sistema a partir de um nível mais baixo, ou ter as equações para o cálculo de todas as tensões e correntes nos ramos em forma matricial. Mas esse cálculo pode ser feito convenientemente por um exame do “netlist” do circuito, após a solução do sistema nodal.

1.3.8 Solução do sistema

Sistemas de equações numéricas podem ser resolvidas com o algoritmo de Gauss-Jordan⁹, que consiste essencialmente em, para cada equação, exprimir uma das variáveis em função das demais e substituir a expressão em todas as demais. Feito isto para todas as equações resultam diretamente as soluções. O código em C abaixo faz exatamente isto. “Yn” é o sistema nodal, com o vetor de excitação \vec{i}_n montado logo após a última coluna de $[G_n]$. “nv” é o número de equações, limitado a 50 no caso. Note-se que existe uma margem no sistema, coluna e linha zero, não usada na solução, mas que pode ser usada na montagem das estampas dos elementos. Para cada coluna, o algoritmo primeiramente troca equações para conseguir o maior valor multiplicando a variável a eliminar, chamado “pivot” (“condensação pivotal”). Se um pivot não nulo (módulo maior que “TOLG”) não é encontrado o sistema é singular, não tendo solução ou tendo múltiplas soluções. A seguir a variável é isolada e substituída nas demais equações. Cuidado foi tomado para evitar operações inúteis, como atualizar valores que não serão mais usados e multiplicações por zero.

```
#define TOLG 1e-9
#define MAX_NOS 50
int nv;
double Yn[MAX_NOS+1][MAX_NOS+2];

int resolversistema(void)
{
    int i,j,l,a;
    double t,p;

    for (i=1; i<=nv; i++) {
        t=0.0;
        a=i;
        for (l=i; l<=nv; l++) {
            if (fabs(Yn[l][i])>fabs(t)) {
                a=l;
                t=Yn[l][i];
            }
        }
        if (i!=a) {
            for (l=1; l<=nv+1; l++) {
                p=Yn[i][l];
                Yn[i][l]=Yn[a][l];
                Yn[a][l]=p;
            }
        }
        if (fabs(t)<TOLG) {
            printf("Sistema singular\n");
            return 1;
        }
        for (j=nv+1; j>i; j--) {
```

⁹Atribuído a Wilhelm Jordan, no livro “Textbook of Geodesy”, 1888. Modifica o método de Gauss (Carl Friedrich Gauss, ~1810), que é similar, mas substitui a variável isolada apenas nas equações seguintes, sendo seguida por uma série de substituições para calcular as demais variáveis.

```

    Yn[i][j]/= t;
    p=Yn[i][j];
    if (p!=0.0)
        for (l=1; l<=nv; l++) {
            if (l!=i)
                Yn[l][j]-=Yn[l][i]*p;
        }
    }
}
return 0;
}

```

Este método tem um tempo de processamento proporcional ao cubo do número de equações¹⁰. Para análise de sistemas muito grandes, métodos de solução de sistemas esparsos são usados. Estes métodos exploram eficientemente o fato de existirem muitos zeros nas matrizes e vetores, e evitam operações com estes elementos. Um outro problema que ocorre com sistemas muito grandes é acumulação de erro numérico. Métodos iterativos como o de Gauss-Seidel¹¹ podem ser usados em vez de métodos algorítmicos, para reduzir o número de operações e acumulação de erro.

Sistemas algébricos podem ser resolvidos pelo método de Cramer¹², que só requer multiplicações e somas. O método diz que a incógnita e_k do sistema $[G_n]\vec{e} = \vec{i}_n$ é obtida como:

$$e_k = \frac{|[G_{nk}]|}{|[G_n]|}$$

onde $[G_{nk}]$ é a matriz obtida substituindo-se a coluna k de $[G_n]$ por \vec{i}_n . $|\dots|$ é o determinante. Os determinantes, se calculados pelo método usual que só usa multiplicações e somas, requerem um número de operações proporcional ao fatorial do tamanho das matrizes, embora matrizes com muitos zeros permitam economizar muitas operações. Isto fica rapidamente inviável para cálculo numérico, mas é útil para sistemas algébricos, que usualmente não são muito grandes, sob pena de expressões muito complexas nas soluções.

Uma interessante possibilidade da análise algébrica é o cálculo de expressões aproximadas. Para isto, depois de uma análise algébrica completa, que vai calcular as soluções como razões de somas de produtos, estes produtos são avaliados com valores típicos para os elementos, e termos desprezíveis em relação aos demais da mesma soma são descartados. Os termos restantes formam expressões aproximadas para as soluções.

1.4 Análise no estado permanente senoidal

Uma simples extensão do sistema nodal para análise de circuitos resistivos é a análise no estado permanente senoidal. Nesta análise, assume-se que todas as tensões e correntes são senoides na mesma frequência, tendo transientes já terminado, como se o circuito estivesse operando há muito tempo, e usa-se a similaridade entre operações envolvendo senoides e operações com números complexos para reduzir o

¹⁰O método de Gauss é mais rápido, se todas as operações forem feitas. Para n equações, ele realiza aproximadamente $\frac{2n^3}{3}$ operações para n grande, entre multiplicações, divisões, somas e subtrações, enquanto o método de Gauss-Jordan realiza aproximadamente n^3 operações. Outro método igualmente eficiente é o da “fatoração LU” (Alan Turing, 1948). Entretanto, com a economia de operações envolvendo zeros, como no exemplo, frequentemente o método de Gauss-Jordan é mais rápido.

¹¹No método de Gauss-Seidel (Philipp Ludwig von Seidel), a partir de uma estimativa inicial da solução, usa-se a primeira equação para recalculá-la primeira variável, a segunda equação para recalculá-la segunda variável, etc. Um método similar é o de Jacobi (Carl Gustav Jakob Jacobi), onde a atualização da solução é feita após se percorrer todas as equações, em vez de após cada cálculo. Estes métodos em geral só convergem se a matriz do sistema tiver a diagonal principal dominante.

¹²Método descrito pelo matemático Gabriel Cramer, no livro “Introduction à l’analyse des lignes courbes algébriques”, 1750.

problema à análise de um circuito resistivo linear com elementos complexos¹³. Cada sinal é representado por um “fasor” correspondente, um número complexo, seguindo a regra:

$$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \Leftrightarrow A - jB$$

Com isto, é evidente que somar sinais ou multiplicá-los por constantes é equivalente a fazer as mesmas operações com os fasores que os representam. Apenas estas operações são necessárias para resolver um circuito resistivo. No caso de circuitos reativos, contendo capacitores, indutores e transformadores (lineares e invariantes no tempo), são ainda necessárias diferenciações e integrações. A diferenciação equivale a uma multiplicação por $j\omega$:

$$\frac{d}{dt}(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) = -\omega A \sin(\omega t) + \omega B \cos(\omega t) \Leftrightarrow j\omega(A - jB) = \omega B + j\omega A$$

A integração equivale a uma divisão por $j\omega$. Note que o termo constante gerado na integração, que é parte da resposta “transiente”, que se supõe que desaparece com o tempo, é ignorado.

$$\begin{aligned} \int_0^t (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) dt &= \left[\frac{A}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{B}{\omega} \cos(\omega t) \right]_0^t = \frac{A}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{B}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{B}{\omega} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{j\omega}(A - jB) = -\frac{B}{\omega} - j\frac{A}{\omega} \end{aligned}$$

Uma relação útil também é:

$$A_0 \cos(\omega t + \phi) = A_0 \cos \phi \cos \omega t - A_0 \sin \phi \sin \omega t$$

O fasor correspondente, onde não ocorre a aparente troca de sinal, é:

$$A + jB = A_0 \cos \phi + jA_0 \sin \phi = A_0 e^{j\phi}$$

Assim, um sinal cossenoidal com amplitude A_0 e fase ϕ corresponde ao fasor $A_0 e^{j\phi}$, e o sinal no tempo pode ser recuperado do fasor como:

$$\text{Re}(A_0 e^{j\phi} e^{j\omega t}) = \text{Re}(A_0 e^{j\omega t + \phi}) = A_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Esta relação é útil para demonstrações das propriedades dos fasores, mas a simples equivalência da parte real do fasor com cosseno e da parte imaginária com menos seno é suficiente para a análise de circuitos.

1.4.1 Capacitores e indutores

Usando estas equivalências, pode-se então descrever capacitores e indutores lineares e invariantes no tempo como resistores e condutores imaginários, na forma:

$$\text{Indutores: } v(t) = L \frac{dj}{dt} \Leftrightarrow V(j\omega) = j\omega L J(j\omega)$$

$$\text{Capacitores: } j(t) = C \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow J(j\omega) = j\omega C V(j\omega)$$

¹³Este tipo de análise foi formalizado por Charles P. Steinmetz, no artigo “Complex quantities and their use in electrical engineering”, Proc. International Electrical Congress, Chicago, p. 33, agosto de 1893. A ideia já era conhecida na forma de diagramas vetoriais. É interessante ver o comentário de Steinmetz que segue ao artigo de E. A. Kennelly, “Impedance”, Trans. of the American Institute of Electrical Engineers, vol. X, p. 119, abril de 1893, onde a ideia é também discutida.

Diz-se então que indutores tem uma “reatância” $X_L(\omega) = \omega L$, correspondendo a uma “impedância” $Z_L(j\omega) = j\omega L$ e que capacitores tem uma reatância $X_C(\omega) = -1/(\omega C)$, correspondendo a uma impedância $Z_C(j\omega) = -j/(\omega C)$. Ao inverso da reatância chama-se “susceptância” (termo pouco usado). Ao inverso da impedância chama-se “admitância”, que para indutores vale $Y_L(j\omega) = -j/(\omega L)$ e para capacitores $Y_C(j\omega) = j\omega C$. Impedâncias e admitâncias correspondem a resistências e condutâncias em circuitos resistivos, tendo as mesmas unidades.

1.4.2 Transformadores

Transformadores são descritos por uma generalização do caso do indutor, usando matrizes de indutância $[L]$ e vetores de tensões e correntes:

$$\vec{v}(t) = [L] \frac{d\vec{j}}{dt} \Leftrightarrow \vec{V}(j\omega) = j\omega[L]\vec{J}(j\omega)$$

Para a análise nodal, é necessário ter as correntes em função das tensões. Para indutores isolados, basta usar:

$$J(j\omega) = \frac{1}{j\omega L} V(j\omega)$$

Para um transformador, inverte-se a matriz $[L]$, obtendo a matriz de indutâncias recíprocas $[\Gamma]$:

$$\vec{J}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} [\Gamma] \vec{V}(j\omega)$$

Para um transformador com dois enrolamentos, por exemplo, as equações usando a matriz $[L]$ seriam:

$$\begin{bmatrix} V_1(j\omega) \\ V_2(j\omega) \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} \\ M_{21} & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1(j\omega) \\ J_2(j\omega) \end{bmatrix}$$

onde $M_{12} = M_{21} = M$ em qualquer transformador real, e as equações usando $[\Gamma]$ seriam:

$$\begin{bmatrix} J_1(j\omega) \\ J_2(j\omega) \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(j\omega) \\ V_2(j\omega) \end{bmatrix}$$

onde:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2}; \\ \Gamma_{22} &= \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2}; \\ \Gamma_{12} = \Gamma_{21} &= \frac{-M}{L_1 L_2 - M^2} \end{aligned}$$

Note que $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$ em qualquer transformador real. O coeficiente de acoplamento do transformador é definido como $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$, e é sempre menor ou igual a 1. O caso $k = 1$ é chamado “acoplamento cerrado”, e não pode ser tratado diretamente na análise nodal normal, pois não existe a matriz $[\Gamma]$. Um recurso no caso pode ser diminuir a indutância de L_1 ou L_2 , mantendo M , e compensar o efeito adicionando um outro indutor em série com aquele lado do transformador, de forma a ter de volta a indutância original. Isto acrescenta um nó ao circuito, mas agora a matriz $[L]$ é inversível (embora talvez corresponda a um transformador não físico, com $k > 1$), e a análise fica exata. Para outra forma de tratamento, ver a análise nodal modificada adiante.

Pode ser observado pelas equações que o transformador de dois enrolamentos equivale a um circuito com dois indutores e dois “transdutores indutivos” (mais propriamente, talvez, “transadmitores”), ou “transindutores”:

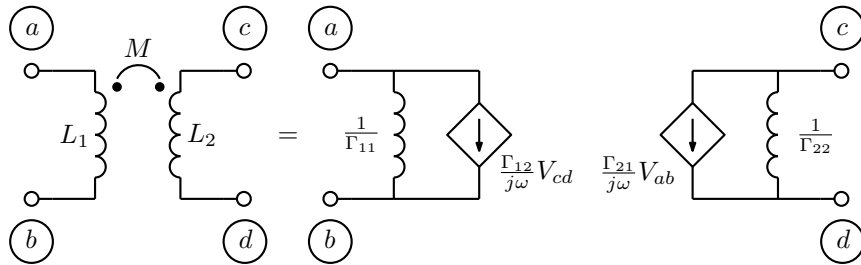


Figura 1.11: Transformador de duas bobinas para análise nodal.

Com mais enrolamentos, cada ramo tem, em paralelo, um indutor e transdutores indutivos controlados por todos os outros ramos.

1.4.3 Estampas dos elementos reativos

As estampas destes elementos (figura 1.12) na análise no estado permanente senoidal seriam então:

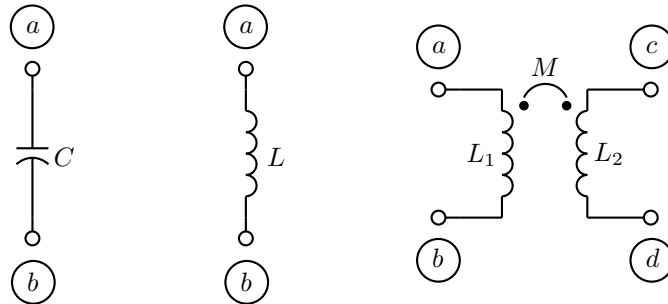


Figura 1.12: Elementos reativos: Capacitor, indutor e transformador de duas bobinas.

Capacitor:

$$\begin{matrix} a & b \\ \begin{bmatrix} +j\omega C & -j\omega C \\ -j\omega C & +j\omega C \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} E_a(j\omega) \\ E_b(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Indutor:

$$\begin{matrix} a & b \\ \begin{bmatrix} +\frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{j\omega L} \\ -\frac{1}{j\omega L} & +\frac{1}{j\omega L} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} E_a(j\omega) \\ E_b(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Transformador com duas bobinas:

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \begin{bmatrix} +\frac{\Gamma_{11}}{j\omega} & -\frac{\Gamma_{11}}{j\omega} & +\frac{\Gamma_{12}}{j\omega} & -\frac{\Gamma_{12}}{j\omega} \\ -\frac{\Gamma_{11}}{j\omega} & +\frac{\Gamma_{11}}{j\omega} & -\frac{\Gamma_{12}}{j\omega} & +\frac{\Gamma_{12}}{j\omega} \\ +\frac{\Gamma_{21}}{j\omega} & -\frac{\Gamma_{21}}{j\omega} & +\frac{\Gamma_{22}}{j\omega} & -\frac{\Gamma_{22}}{j\omega} \\ -\frac{\Gamma_{21}}{j\omega} & +\frac{\Gamma_{21}}{j\omega} & -\frac{\Gamma_{22}}{j\omega} & +\frac{\Gamma_{22}}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a(j\omega) \\ E_b(j\omega) \\ E_c(j\omega) \\ E_d(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

1.4.4 Fontes independentes

Fontes de corrente, resistores e transdutores são tratados como na análise nodal de circuitos resistivos. A única diferença é que os valores das fontes de corrente são fasores, correspondendo às formas de onda de corrente de acordo com a relação:

$$i(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \Leftrightarrow I(j\omega) = A - jB$$

A formulação admite também elementos como resistores e transdutores com valores complexos fixos, que podem ser úteis em certos estudos, como o de “filtros complexos”.

O sistema nodal tem então a forma:

$$[Y_n(j\omega)]\vec{E}(j\omega) = \vec{i}_n(j\omega)$$

onde $[Y_n(j\omega)]$ é a “matriz de admitância dos nós”, e a solução $\vec{E}(j\omega)$ é um vetor de fasores, correspondendo às tensões nodais pela relação usual.

Exemplo: Seja o circuito da figura 1.13:

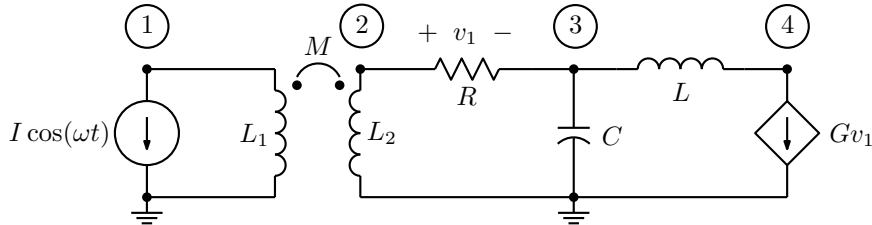


Figura 1.13: Circuito para análise em $j\omega$.

O sistema nodal correspondente para análise no estado permanente senoidal pode ser montado observando-se a rede, diretamente, ou pelas estampas. O resultado é:

$$\begin{bmatrix} \frac{\Gamma_{11}}{j\omega} & \frac{\Gamma_{12}}{j\omega} & 0 & 0 \\ \frac{\Gamma_{21}}{j\omega} & \frac{\Gamma_{22}}{j\omega} + \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{j\omega L} \\ 0 & +G & -\frac{1}{j\omega L} - G & +\frac{1}{j\omega L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(j\omega) \\ E_2(j\omega) \\ E_3(j\omega) \\ E_4(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com os dois lados do transformador aterrados, somente quatro das 16 entradas da estampa aparecem. A fonte cossenoidal é representada por seu fasor, que é real positivo. Se a entrada fosse senoidal, o fasor seria imaginário negativo.

1.4.5 Linhas de transmissão¹⁴

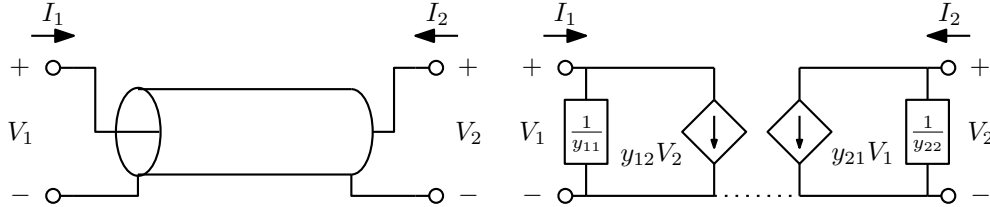


Figura 1.14: Linha de transmissão e seu modelo.

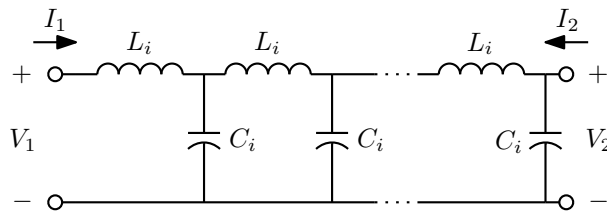


Figura 1.15: Equivalente da linha de transmissão sem perdas.

Um outro elemento que pode ser facilmente tratado pela análise no estado permanente senoidal é a linha de transmissão. A linha sem perdas equivale a um par de condutores paralelos com um material dielétrico entre eles (pode ser apenas ar), em que é considerada uma indutância por unidade de comprimento L e uma capacitância por unidade de comprimento C , como mostrado na figura 1.15, exemplificando a linha como um cabo coaxial. Linhas de transmissão modelam interconexões operando em alta frequência. Para análise nodal, a linha pode ser modelada por duas admitâncias e duas transadmitâncias, como mostrado na figura, que resultam das equações, não demonstradas aqui:

$$\begin{bmatrix} J_1(j\omega) \\ J_2(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(j\omega) \\ V_2(j\omega) \end{bmatrix} = \frac{j}{Z_0} \begin{bmatrix} -\tan(\omega T) & \frac{1}{\sin(\omega T)} \\ \frac{1}{\sin(\omega T)} & -\tan(\omega T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(j\omega) \\ V_2(j\omega) \end{bmatrix}$$

onde $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ é a “impedância característica” da linha, e $T = l\sqrt{LC}$, com l sendo o comprimento da linha, é o atraso da linha. O modelo equivale ao da figura 1.15 se:

$$L_i = \frac{lL}{n} = \frac{TZ_0}{n}; \quad C_i = \frac{lC}{n} = \frac{T}{nZ_0}$$

como se deduz das expressões para Z_0 e T , onde n é o número de seções, que deve ser grande.

Com alguma complexidade adicional se pode tratar a linha com perdas, que segue as equações:

$$\begin{bmatrix} J_1(j\omega) \\ J_2(j\omega) \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_0} \begin{bmatrix} \coth \gamma l & -\operatorname{csch} \gamma l \\ -\operatorname{csch} \gamma l & \coth \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(j\omega) \\ V_2(j\omega) \end{bmatrix}$$

onde a “impedância característica” Z_0 e a “constante de propagação” γ valem:

¹⁴Material opcional.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L + R}{j\omega C + G}}; \quad \gamma = \sqrt{(j\omega L + R)(j\omega C + G)}$$

onde R é a resistência por unidade de comprimento, G a condutância entre os condutores por unidade de comprimento, e l novamente o comprimento da linha. Neste caso Z_0 e γ são valores complexos que dependem da frequência ω . No caso sem perdas Z_0 é real, fixa, e $\gamma = j\omega\sqrt{LC}$ é imaginária. Não há problema em considerar perdas que dependam da frequência, se necessário. O modelo é usualmente considerado com um terminal comum entre as duas portas, já que não faz sentido uma linha com sinais de modo comum diferentes nos dois lados (a conexão poderia ser feita por outra linha de transmissão, esta com terminais comuns). Uma diferença entre este elemento e os elementos LCM é que a frequência ω aparece envolvida em funções, e então não é possível mais exprimir as soluções do circuito em razões de polinômios de ω . Note-se que estes modelos não podem ser aplicados para $\omega = 0$, o que também acontece para os indutores na análise nodal simples, que também existem na linha. Isto é possível, entretanto, com a inversão das relações $\vec{J}(j\omega) = [Y(j\omega)]\vec{V}(j\omega)$ e o uso da análise nodal modificada (adiante).

1.4.6 Aplicações da análise no estado permanente senoidal

A aplicação básica, de análise de um circuito no estado permanente senoidal para uma única frequência serve para análise de circuitos de energia elétrica em CA (corrente alternada), por exemplo. Circuitos multifásicos podem ser facilmente analisados com a técnica.

Exemplo: Seja o circuito trifásico¹⁵ da figura 1.16, que representa uma fonte de sinal trifásica em 60 Hz ($\omega = 2\pi 60$) ligada a uma carga em “ Δ ” desbalanceada através de impedâncias indutivas.

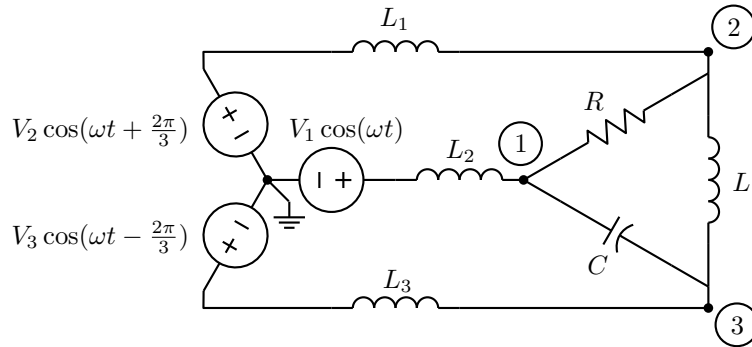


Figura 1.16: Rede trifásica.

Um sistema nodal para o cálculo das tensões sobre a carga, usando equivalentes Norton para eliminar as fontes de tensão, fica na forma abaixo. Observe-se como são gerados os fasores de entrada, correspondendo aos ângulos das fases. Para um sinal com ângulo ϕ o fasor vem da equivalência $A_0 \cos(\omega t + \phi) \Leftrightarrow A_0(\cos \phi + j \sin \phi)$.

$$\begin{bmatrix} j\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L_2} & -\frac{1}{R} & -j\omega C \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{j\omega L} \\ -j\omega C & -\frac{1}{j\omega L} & j\omega C + \frac{1}{j\omega L_3} + \frac{1}{j\omega L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(j\omega) \\ E_2(j\omega) \\ E_3(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_1}{j\omega L_2} \\ \frac{V_2(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})}{j\omega L_1} \\ \frac{V_3(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})}{j\omega L_3} \end{bmatrix}$$

¹⁵Os sistemas de distribuição de energia elétrica são quase sempre assim, e análise destes sistemas foi motivação para o desenvolvimento da análise com fasores.

1.4.6.1 Cálculo de resposta em frequência

Uma aplicação importante é a obtenção de respostas em frequência, onde se quer gráficos de como variam o módulo em a fase de uma saída quando a frequência de uma entrada é variada. Para isto, basta analisar o circuito no estado permanente senoidal variando a frequência. Se o cálculo for de uma função de transferência, a entrada pode ser feita unitária, sendo então a saída a própria função desejada. Usualmente são calculados o módulo em decibéis e a fase em graus. Para um fasor $E_k(j\omega) = A(j\omega) + B(j\omega)$:

$$|E_k(j\omega)| \text{ dB} = 20 \log \sqrt{A^2 + B^2} = 10 \log(A^2 + B^2)$$

$$\angle E_k(j\omega) = \frac{180}{\pi} \times \begin{cases} \text{Se } A > 0 \text{ e } B > 0 \Rightarrow \tan^{-1} \frac{B}{A} \\ \text{Se } A < 0 \text{ e } B > 0 \Rightarrow \tan^{-1} \frac{B}{A} + \pi \\ \text{Se } A < 0 \text{ e } B < 0 \Rightarrow \tan^{-1} \frac{B}{A} - \pi \end{cases}$$

A escolha das frequências onde realizar a análise deve ser com espaçamento uniforme, dependendo de que tipo de escala de frequência seja usada. Para n pontos com espaçamento uniforme entre as frequências ω_1 e ω_2 , começa-se por ω_1 e soma-se o incremento $\Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{n-1}$ para cada nova frequência. Para escala logarítmica, começa-se também com ω_1 e multiplica-se a frequência por $\delta = \sqrt[n-1]{\omega_2/\omega_1}$ para cada nova frequência. Para frequências f em Hz basta usar $\omega = 2\pi f$.

Pode-se calcular também o atraso, $T(\omega) = -\frac{\angle E_k(j\omega)}{\omega}$, e o atraso de grupo, $T_G(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \angle E_k(j\omega)$. Estas medidas servem para avaliar o quanto um sistema conserva corretamente a relação entre os componentes espectrais de um sinal, que normalmente devem ser igualmente atrasados. A função atraso pode ser diretamente calculada, mas como a fase pode conter múltiplos de π rad/s, pode apresentar aparentes descontinuidades. A função atraso de grupo não as apresenta, mas pode ser avaliada apenas aproximadamente com derivadas discretas em uma análise normal de resposta em frequência¹⁶.

Exemplo: Seja calcular a resposta em frequência da saída V_o em relação à entrada V_{in} no circuito da figura 1.17¹⁷.

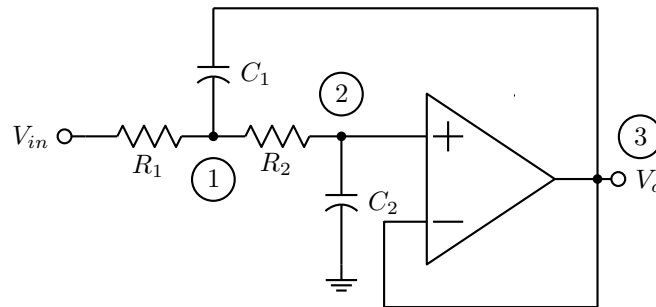


Figura 1.17: Circuito de onde calcular da função de transferência $\frac{V_o}{V_{in}}(j\omega)$ e obter os gráficos de resposta em frequência.

O circuito pode ser modelado para a análise nodal na forma da figura 1.18. O amplificador operacional¹⁸ forma um amplificador de tensão com ganho unitário. Na entrada é feito um equivalente Norton

¹⁶O cálculo exato é possível a partir de uma análise de sensibilidades [11], como a feita no programa Sensi. Ver sessão 6.6.

¹⁷Um filtro ativo passa-baixas de Sallen e Key [17], com amplificador com ganho unitário

¹⁸Um tratamento geral do amplificador operacional está em seção mais adiante.

entre V_{in} e R_1 , e o amplificador de ganho unitário é transformado por um equivalente Norton com o capacitor C_1 . Restam dois nós, e como no circuito original $V_o = e_3 = e_2$, a saída está no nó 2.

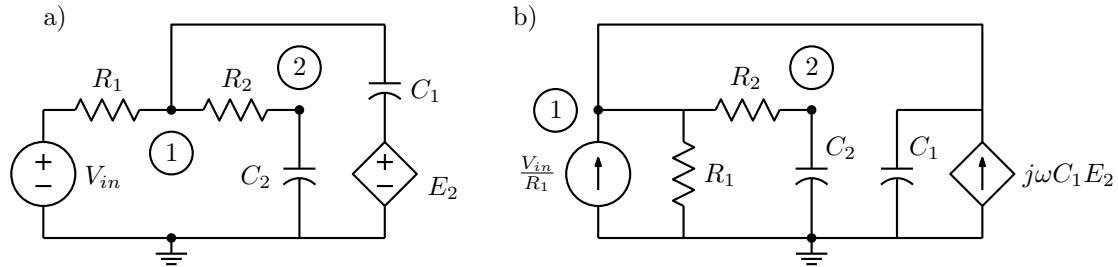


Figura 1.18: a) Modelo. b) Modelo para análise nodal, com equivalentes Norton feitos.

O sistema nodal correspondente é:

$$\begin{bmatrix} j\omega C_1 + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} - j\omega C_1 \\ -\frac{1}{R_2} & j\omega C_2 + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(j\omega) \\ E_2(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_{in}}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Achando $E_2(j\omega)$ para $V_{in} = 1$ pelo método de Cramer:

$$\begin{aligned} \frac{V_o}{V_{in}}(j\omega) = E_2(j\omega) &= \frac{\frac{1}{R_1 R_2}}{-\omega^2 C_1 C_2 + \frac{j\omega C_1}{R_2} + j\omega C_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_2^2} - \frac{j\omega C_1}{R_2}} \\ &= \frac{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{-\omega^2 + j\omega \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1}\right) + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \end{aligned}$$

O módulo e a fase valem:

$$\begin{aligned} \left| \frac{V_o}{V_{in}}(j\omega) \right| &= \frac{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} - \omega^2\right)^2 + \omega^2 \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1}\right)^2}} \\ \angle \left(\frac{V_o}{V_{in}}(j\omega) \right) &= -\angle \left(\left(\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} - \omega^2 \right) + j\omega \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} \right) \right) \end{aligned}$$

O circuito faz um filtro passa-baixas ressonante de segunda ordem, com ressonância em $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$.

Para resistores iguais, gera uma amplificação na ressonância, ou fator de qualidade, $Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$. As curvas de módulo e fase, para o caso de $R_1 = R_2 = 1 \Omega$, $C_1 = 10 \text{ F}$ e $C_2 = 0.1 \text{ F}$, são mostradas com várias possibilidades de escalas na figura 1.19, para a frequência variando entre 0.1 e 10 rad/s¹⁹. A ressonância fica em 1 rad/s, com fator de qualidade de 5. A fase começa em 0° em baixa frequência, passa por -90° na ressonância, e termina em -180° em alta frequência.

1.4.6.2 Resposta a um sinal periódico qualquer

A resposta a um sinal periódico qualquer pode ser obtida decompondo a entrada em série de Fourier de senos e cossenos, e realizando a análise de estado permanente senoidal para cada componente da série.

¹⁹Gráficos obtidos com o programa mnarf, com 1000 pontos.

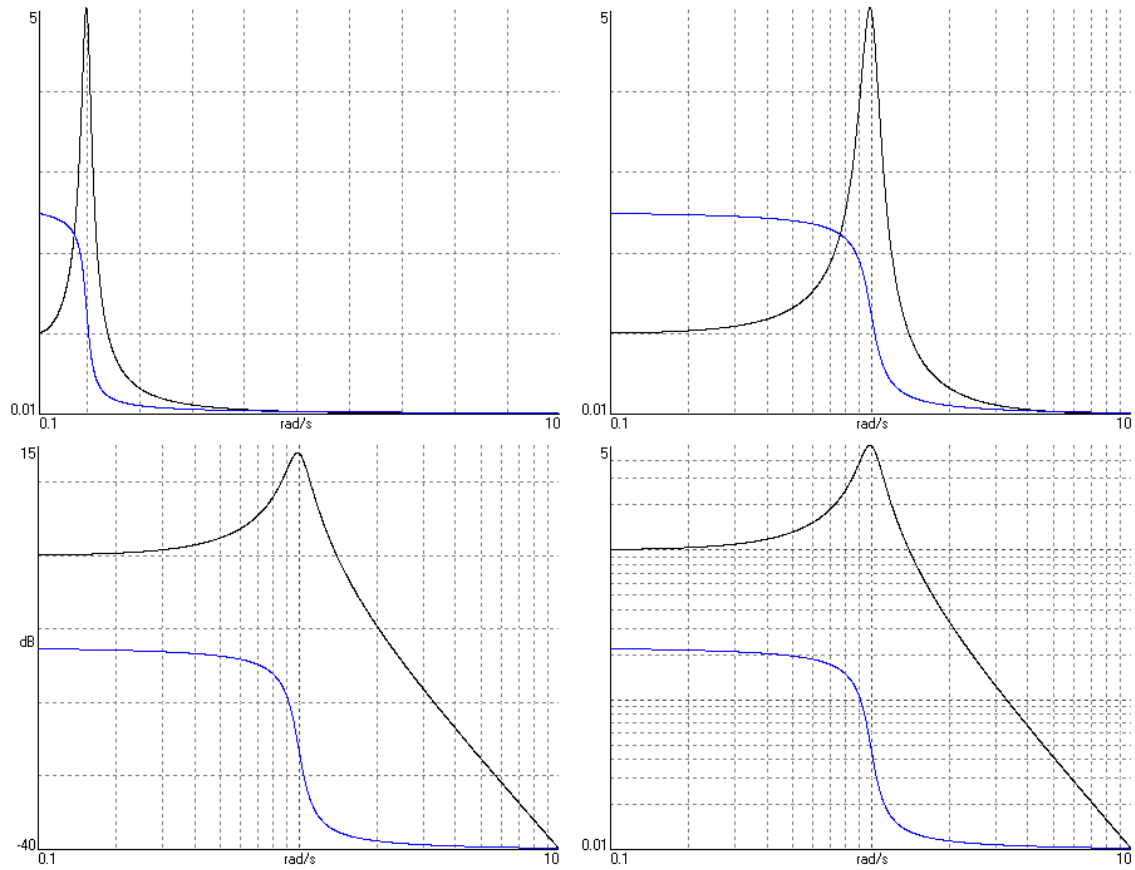


Figura 1.19: Curvas de módulo e fase de $V_o/V_{in}(j\omega)$ para o circuito da figura 1.17, acima com escala linear de módulo e escala linear e logarítmica de frequência, abaixo com módulo em decibéis e em escala logarítmica, com frequências em escala logarítmica. A escala da fase é sempre linear, entre $\pm 180^\circ$.

Os fasores de saída obtidos são então retornados ao tempo e os sinais resultantes somados. Se a entrada for $x_{in}(t)$ com período T , a série de Fourier correspondente é:

$$x_{in}(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega_0 t) + B_1 \sin(\omega_0 t) + A_2 \cos(2\omega_0 t) + B_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots$$

onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Se a série de Fourier for infinita e tiver que ser truncada, a saída obtida será uma aproximação também. Os coeficientes são obtidos como usual, com integrais sobre um período T inteiro, começando de qualquer ponto conveniente T_0 :

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} x_{in}(t) dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} x_{in}(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} x_{in}(t) \sin n\omega_0 t dt$$

Uma análise com $\omega = 0$ deve ser feita com entrada constante A_0 , depois uma análise em $\omega = \omega_0$ com entrada $A_1 - jB_1$, depois uma análise com $\omega = 2\omega_0$ com entrada $A_2 - jB_2$, e assim por diante. Com os fasores de saída calculados correspondentemente como $E_k(0) = C_0$, $E_k(j\omega_0) = C_1 - jD_1$, $E_k(2\omega_0) = C_2 - jD_2$, etc., a saída $e_k(t)$ vale:

$$e_k(t) = C_0 + C_1 \cos(\omega_0 t) + D_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(2\omega_0 t) + D_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots$$

É possível combinar nesta análise sinais de períodos diferentes, somando no tempo os resultados obtidos das análises dos componentes das séries de todas as fontes, calculados separadamente. Com este método se pode também obter aproximadamente respostas transientes, por exemplo usando no lugar de uma fonte em degrau uma onda quadrada de baixa frequência. A cada transição se tem uma aproximação da resposta ao degrau.

Exemplo: Seja a análise do circuito da figura 1.20, onde a excitação é uma onda quadrada de 1 Hz com valores entre 0 V e 1 V. Usando um equivalente Norton para a fonte de tensão com R_1 , o sistema nodal é, com $\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = 25/9$ e $\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = -20/9$:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{\Gamma_{11}}{j\omega} & \frac{\Gamma_{12}}{j\omega} \\ \frac{\Gamma_{21}}{j\omega} & \frac{1}{R_2} + \frac{\Gamma_{22}}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(j\omega) \\ E_2(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_{in}(j\omega)}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

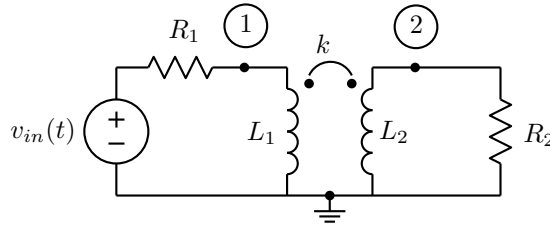


Figura 1.20: Circuito com excitação periódica não senoidal. $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $L_1 = L_2 = 1\text{H}$, $k = 0.8$.

Truncando a série de Fourier da onda quadrada após o termo de ordem 11, a série truncada para $i_{in}(t) = \frac{v_{in}(t)}{R_1}$ vale:

$$i_{in}(t) = C_0 + C_1 \sin(\omega_0 t) + C_3 \sin(3\omega_0 t) + C_5 \sin(5\omega_0 t) + C_7 \sin(7\omega_0 t) + C_9 \sin(9\omega_0 t) + C_{11} \sin(11\omega_0 t)$$

onde $C_0 = 0.5$ e $C_k = \frac{2}{k\pi}$, $k = 1, 3, \dots, 11$ e $\omega_0 = 2\pi$. O circuito é então analisado para todos os termos da série, nas frequências correspondentes:

$$I_{in} = 0.5, \omega = 0 : E_1 = 0; E_2 = 0$$

$$I_{in} = -\frac{2}{\pi}, \omega = 2\pi : E_1 = -0.127164 - 0.120948j; E_2 = +0.183017 - 0.510733j$$

$$I_{in} = -\frac{2}{3\pi}, \omega = 6\pi : E_1 = -0.0231701 - 0.00688278j; E_2 = +0.0294191 - 0.20514j$$

$$I_{in} = -\frac{2}{5\pi}, \omega = 10\pi : E_1 = -0.00875637 - 0.00155284j; E_2 = +0.0110072 - 0.125731j$$

$$I_{in} = -\frac{2}{7\pi}, \omega = 14\pi : E_1 = -0.0045292 - 0.000572922j; E_2 = +0.00567778 - 0.0903583j$$

$$I_{in} = -\frac{2}{9\pi}, \omega = 18\pi : E_1 = -0.00275551 - 0.000270947j; E_2 = +0.00345037 - 0.0704578j$$

$$I_{in} = -\frac{2}{11\pi}, \omega = 22\pi : E_1 = -0.00184993 - 0.000148786j; E_2 = +0.0023151 - 0.057722j$$

Foram omitidos os resultados das análises nos harmônicos pares de ω_0 , já que a entrada é nula nestas frequências. Fazendo-se a volta para o domínio do tempo as duas tensões nodais valem:

$$e_1(t) = -0.127164 \cos(2\pi t) + 0.120948 \sin(2\pi t) - 0.0231701 \cos(6\pi t) + 0.00688278 \sin(6\pi t) + \dots$$

$$e_2(t) = 0.183017 \cos(2\pi t) + 0.510733 \sin(2\pi t) + 0.0294191 \cos(6\pi t) + 0.20514 \sin(6\pi t) + \dots$$

Plotando os resultados, tem-se a figura 1.21. Observe-se o “fenômeno de Gibbs”, as oscilações nas transições abruptas de sinal em $v_{in}(t)$ e $e_1(t)$, onde a série de Fourier não converge. Colocar mais termos na série apenas aumentaria a frequência destas oscilações, sem alterar sua amplitude junto às transições. Este fenômeno limita seriamente a utilidade desta forma de análise.

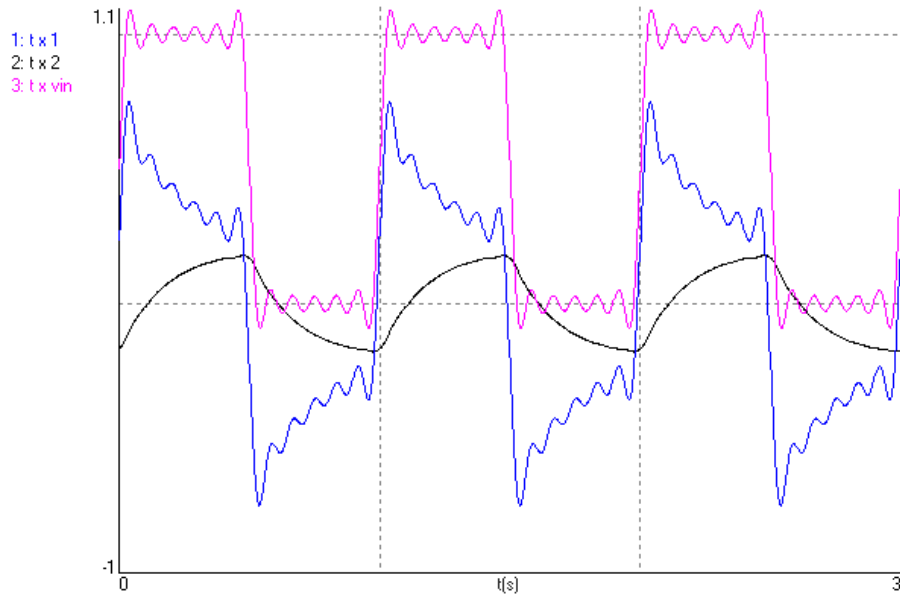


Figura 1.21: Resultado da análise usando séries de Fourier, para os dois nós e $v_{in}(t)$.

1.4.7 Solução do sistema complexo

O sistema numérico gerado tem coeficientes complexos. A solução é feita com os mesmos algoritmos usados para sistemas reais, mas com operações complexas. Como multiplicações são as operações frequentes na solução que gastam mais tempo, e uma multiplicação de números complexos equivale a quatro multiplicações reais, o tempo de solução é aproximadamente quatro vezes maior para o mesmo número de equações. Note-se que é possível usar apenas três multiplicações diferentes para multiplicar dois valores complexos, o que pode economizar algum tempo:

$$(A + jB)(C + jD) = (AC - BD) + j(AD + BC) = (AC - BD) + j((A + B)(C + D) - AC - BD)$$

Há algo similar também sobre a divisão de números complexos (que é menos usada nos algoritmos, e então a ideia não é tão útil). A forma normal requer seis multiplicações e duas divisões:

$$\frac{A + jB}{C + jD} = \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} + j \frac{BC - AD}{C^2 + D^2}$$

É possível economizar uma multiplicação:

$$\frac{A + jB}{C + jD} = \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} + j \frac{(A + B)(C - D) - AC + BD}{C^2 + D^2}$$

Um problema que aparece nestas expressões são os grandes valores gerados pelas multiplicações quando os valores multiplicados são grandes. Uma faixa maior é ganha quando se evita as multiplicações, usando apenas divisões, supondo que C e D não são nulos:

$$\frac{A + jB}{C + jD} = \frac{\frac{A}{D} + \frac{B}{C}}{\frac{C}{D} + \frac{D}{C}} + j \frac{\frac{B}{D} - \frac{A}{C}}{\frac{C}{D} + \frac{D}{C}}$$

É possível formular o sistema em forma semialgébrica, com os coeficientes sendo polinômios de $j\omega$ e $\frac{1}{j\omega}$, para circuitos RLCM+fontes, e resolver o sistema resultante pelo método de Cramer, usando somas e multiplicações de polinômios apenas. Esta técnica é útil para acelerar o cálculo de respostas em frequência, pois uma vez encontradas as soluções, em forma de razões de polinômios de $j\omega$, é rápida a avaliação para diferentes frequências. Isto é mais convenientemente feito com a análise em transformada de Laplace.

1.5 Análise nodal em transformada de Laplace

Uma forma similar de análise para circuitos lineares e invariantes no tempo é a análise em transformada de Laplace²⁰, que permite calcular exatamente formas de onda incluindo transientes, para excitações com qualquer forma de onda que admita a transformada. Basta aplicar a transformada de Laplace às relações de definição dos elementos, e considerar sinais por suas transformadas de Laplace. O procedimento é similar ao usado na análise por fasores, mas agora as condições iniciais tem que ser consideradas também. Algumas funções úteis e propriedades, que aparecem com frequência nestas análises são mostradas na

²⁰A transformada de Laplace foi desenvolvida por Pierre-Simon de Laplace, em 1779, como um método para a solução de equações diferenciais lineares. Ideia similar já tinha sido usada por Léonard Euler em 1763. Sua utilidade para análise de circuitos decorre dos trabalhos de Oliver Heaviside, no fim do século XIX, que a redescobriu e popularizou em seu “cálculo operacional”, usando o operador p , com significado de diferenciação com função similar à do s de Laplace. Trabalhos posteriores geraram a forma em uso atualmente. Ver o artigo de Heaviside, “On operators in physical mathematics”, Proceedings of the Royal Society of London, V. 52, pp. 504-529, 1893.

tabela 1.1²¹. A volta ao domínio do tempo é feita de acordo com os equivalentes no tempo das transformadas calculadas, o que usualmente requer uma expansão em frações parciais com identificação termo a termo com uma tabela assim.

Caso geral da transformada de Laplace:	$x(t) \iff X(s) = \int_{0-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$
Propriedade de linearidade:	$ax(t) + by(t) \iff aX(s) + bY(s)$
Diferenciação:	$\frac{d}{dt}x(t) \iff sX(s) - x(0)$
Integração:	$\int_0^t x(t)dt \iff \frac{X(s)}{s}$
Impulso:	$\delta(t) \iff 1$
Degrau:	$u(t) \iff \frac{1}{s}$
Exponencial do tempo:	$t^n \iff \frac{n!}{s^{n+1}}$
Exponencial decrescente:	$e^{-\alpha t} \iff \frac{1}{s + \alpha}$
Exponencial decrescente com potência do tempo:	$t^n e^{-\alpha t} \iff \frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$
Senoide:	$\sin(\omega t) \iff \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
Cossenoide:	$\cos(\omega t) \iff \frac{s}{s^2 + \omega^2}$
Senoide amortecida:	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t) \iff \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
Cossenoide amortecida:	$e^{-\alpha t} \cos(\omega t) \iff \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
Senoide amortecida geral:	$2 K e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \angle K) \iff \frac{K}{s + \alpha - j\omega} + \frac{K^*}{s + \alpha + j\omega}$
Atraso:	$x(t - T) \iff e^{-sT} X(s)$

Tabela 1.1: Tabela de transformadas de Laplace.

1.5.1 Elementos RLCM

Tratando os elementos reativos por suas relações integrais:

²¹O atraso não gera função em razão de polinômios de s . Em sistemas que tenham apenas atrasos pode-se substituir $z = e^{sT}$ e ter então a “Transformada Z”.

Resistores: $v(t) = Rj(t) \Leftrightarrow V(s) = RJ(s)$

Indutores: $j(t) = j(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(t)dt \Leftrightarrow J(s) = \frac{j(0)}{s} + \frac{1}{sL}V(s)$

Capacitores: $v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t j(t)dt \Leftrightarrow V(s) = \frac{v(0)}{s} + \frac{1}{sC}J(s)$

Transformadores: $\vec{j}(t) = \vec{j}(0) + [\Gamma] \int_0^t \vec{v}(t)dt \Leftrightarrow \vec{J}(s) = \frac{\vec{j}(0)}{s} + \frac{1}{s}[\Gamma]V(s)$

O indutor tem então em paralelo uma fonte de corrente em degrau representando sua corrente inicial, e o capacitor tem em série uma fonte de tensão representando sua tensão inicial, também em degrau. O transformador gera uma corrente inicial em degrau em paralelo com cada indutor, e uma rede de admitâncias indutivas e fontes indutivas de transadmitância. O capacitor é modelado na análise nodal pelo equivalente Norton do modelo, com uma fonte de corrente impulsional em paralelo com o capacitor.

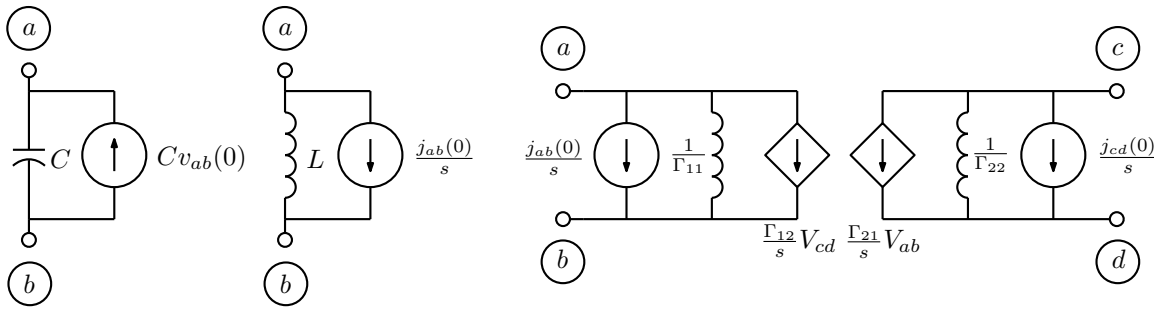


Figura 1.22: Modelos para análise nodal em transformada de Laplace. Capacitor, indutor e transformador com dois enrolamentos

As estampas dos elementos são então similares às da análise por fasores, com s em vez de $j\omega$, mas incluem as condições iniciais no vetor de excitação como fontes em impulso ou degrau, conforme os modelos da figura 1.22.

Capacitor com tensão inicial $v_{ab}(0)$:

$$\begin{matrix} a & b \\ a & b \end{matrix} \begin{bmatrix} +sC & -sC \\ -sC & +sC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a(s) \\ E_b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +Cv_{ab}(0) \\ -Cv_{ab}(0) \end{bmatrix}$$

Indutor com corrente inicial $j_{ab}(0)$:

$$\begin{matrix} a & b \\ a & b \end{matrix} \begin{bmatrix} +\frac{1}{sL} & -\frac{1}{sL} \\ -\frac{1}{sL} & +\frac{1}{sL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a(s) \\ E_b(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{j_{ab}(0)}{s} \\ +\frac{j_{ab}(0)}{s} \end{bmatrix}$$

Transformador com dois enrolamentos e correntes iniciais $j_{ab}(0)$ e $j_{cd}(0)$:

$$\begin{matrix} & a & b & c & d \\ a & \left[\begin{array}{cccc} +\frac{\Gamma_{11}}{s} & -\frac{\Gamma_{11}}{s} & +\frac{\Gamma_{12}}{s} & -\frac{\Gamma_{12}}{s} \\ -\frac{\Gamma_{11}}{s} & +\frac{\Gamma_{11}}{s} & -\frac{\Gamma_{12}}{s} & +\frac{\Gamma_{12}}{s} \\ +\frac{\Gamma_{21}}{s} & -\frac{\Gamma_{21}}{s} & +\frac{\Gamma_{22}}{s} & -\frac{\Gamma_{22}}{s} \\ -\frac{\Gamma_{21}}{s} & +\frac{\Gamma_{21}}{s} & -\frac{\Gamma_{22}}{s} & +\frac{\Gamma_{22}}{s} \end{array} \right] & & & \\ b & & & & \\ c & & & & \\ d & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} E_a(s) \\ E_b(s) \\ E_c(s) \\ E_d(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{j_{ab}(0)}{s} \\ +\frac{j_{ab}(0)}{s} \\ -\frac{j_{cd}(0)}{s} \\ +\frac{j_{cd}(0)}{s} \end{bmatrix}$$

A análise pode ser semi-algébrica, com valores numéricos e a variável “s”, resultando em um sistema de equações envolvendo polinômios de s e 1/s, e uma solução em transformada de Laplace na forma de razão de polinômios de s. Métodos numéricos para a solução destes sistemas serão discutidos mais adiante. Uma solução totalmente algébrica é certamente possível também, mas para circuitos de ordem alta as expressões obtidas podem facilmente ficar enormes²².

Exemplo: Seja o circuito da figura 1.23. O sistema de equações nodais toma a forma:

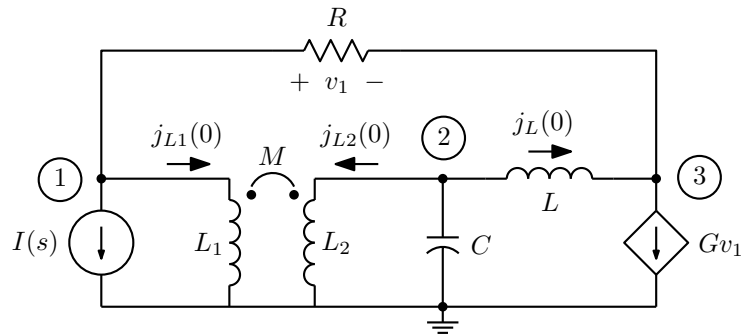


Figura 1.23: Circuito para análise em transformada de Laplace.

$$\begin{bmatrix} \frac{\Gamma_{11}}{s} + \frac{1}{R} & \frac{\Gamma_{12}}{s} & -\frac{1}{R} \\ \frac{\Gamma_{21}}{s} & \frac{\Gamma_{22}}{s} + sC + \frac{1}{sL} & -\frac{1}{sL} \\ -\frac{1}{R} + G & -\frac{1}{sL} & \frac{1}{sL} + \frac{1}{R} - G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ E_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I(s) - j_{L1}(0)/s \\ Cv_c(0) - j_L(0)/s - j_{L2}(0)/s \\ +j_L(0)/s \end{bmatrix}$$

1.5.2 Linhas de transmissão²³

É possível tratar linhas de transmissão usando transformadas de Laplace. A rede pode ser tratada como no caso do estado permanente senoidal (figura 1.14), com as equações:

$$\begin{bmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_0} \begin{bmatrix} \coth \gamma l & -\operatorname{csch} \gamma l \\ -\operatorname{csch} \gamma l & \coth \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}$$

onde a impedância característica Z_0 e a constante de propagação γ agora valem:

²²Uma possibilidade é a obtenção de expressões aproximadas para as transformadas. Depois da análise algébrica exata, valores numéricos são substituídos e termos desprezíveis em somas são identificados. Os mesmos termos são então eliminados das expressões algébricas.

²³Material opcional

$$Z_0 = \sqrt{\frac{sL + R}{sC + G}}; \quad \gamma = \sqrt{(sL + R)(sC + G)}$$

O caso sem perdas fica mais simples, com $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ e $\gamma l = s\sqrt{LC}l = sT$. Então:

$$\coth \gamma l = \frac{1 + e^{-2sT}}{1 - e^{-2sT}}; \quad -\operatorname{csch} \gamma l = \frac{-2e^{-sT}}{1 - e^{-2sT}}$$

A volta ao domínio do tempo pode ser difícil de se obter analiticamente. É simples verificar que o modelo da linha sem perdas equivale ao circuito da figura 1.24. Como e^{-sT} significa um atraso de T segundos, as condições iniciais devem levar em conta um período T inteiro das tensões e correntes nas duas extremidades da linha. No caso com perdas em geral é mais prático aproximar a linha como uma série de seções $Z = sL + R$ em série, $Y = sC + G$ em paralelo, cada uma com suas condições iniciais, e então tem-se apenas um circuito RLC. O mesmo pode ser feito no caso sem perdas.

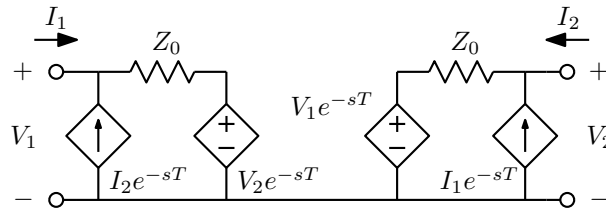


Figura 1.24: Modelo da linha de transmissão sem perdas.

1.5.3 Aplicações da análise em transformada de Laplace

1.5.3.1 Cálculo da resposta completa

A aplicação fundamental é a solução de circuitos lineares invariantes no tempo, obtendo a solução completa para qualquer conjunto de entradas e condições iniciais, como ilustrado nos exemplos anteriores. A análise é algébrica ou semialgébrica, com polinômios de s e $\frac{1}{s}$. A volta ao tempo pode ser problemática numericamente, devido à necessidade de encontrar as raízes de um polinômio. Se entradas com transformadas de Laplace mais complexas que a do degrau e do impulso estiverem presentes, pode ficar mais simples calcular as respostas ao impulso unitário devidas a essas entradas, e depois multiplicar pelas transformadas, separando a resposta à entrada zero, devida às condições iniciais, da resposta ao estado zero, devida às entradas.

Exemplo: Uma “Bobina de Tesla”²⁴ (figura 1.25) é formada por dois tanques LC que ressonam na mesma frequência quando separados, acoplados através dos indutores. Se o coeficiente de acoplamento tem certos valores ($k = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$, com a e b dois inteiros com diferença ímpar, que definem o modo $a : b$ de operação, como $1 : 2$, $2 : 3$, $2 : 5$, etc.), após um certo número de oscilações ($b/2$ ciclos) toda a energia que é colocada em um dos capacitores é transferida para o outro capacitor. Com elementos no primário L_1 e C_1 , e no secundário L_2 e C_2 , Há um ganho de tensão igual a $\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$. Se essas razões são grandes, ocorre grande aumento de tensão, o que torna o circuito útil na geração de pulsos de alta tensão. A transferência mais rápida de energia é obtida quando $k = 0.6$, correspondendo ao modo $a : b = 1 : 2$,

²⁴Desenvolvida por Nikola Tesla, 1891. Transformadores ressonantes foram dos primeiros circuitos elétricos não triviais a serem estudados, devido à sua aplicação em sistemas primitivos de rádio. Circuitos que se comportam de forma similar podem ser gerados de muitas outras formas, e com circuitos de ordem maior que a quarta [22].

com transferência em um único ciclo de oscilação. A única excitação do circuito é a tensão inicial em C_1 , e o circuito então opera com a resposta à entrada zero²⁵.

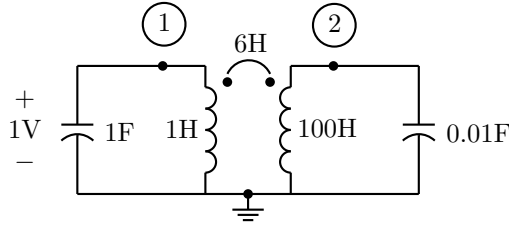


Figura 1.25: Bobina de Tesla.

A matriz de indutâncias recíprocas vale:

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 100 \end{bmatrix} \Rightarrow [\Gamma] = \begin{bmatrix} \frac{100}{64} & -\frac{6}{64} \\ -\frac{6}{64} & \frac{1}{64} \end{bmatrix}$$

E o modelo para análise nodal é o da figura 1.26:

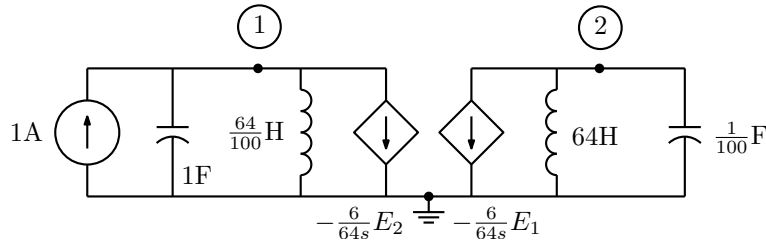


Figura 1.26: Modelo nodal para a bobina de Tesla.

O sistema nodal fica sendo:

$$\begin{bmatrix} s + \frac{100}{64s} & -\frac{6}{64s} \\ -\frac{6}{64s} & \frac{s}{100} + \frac{1}{64s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As soluções são:

$$E_1(s) = \frac{s^3 + \frac{100}{64}s}{s^4 + \frac{100}{32}s^2 + \frac{100}{64}}; \quad E_2(s) = \frac{\frac{600}{64}s}{s^4 + \frac{100}{32}s^2 + \frac{100}{64}}$$

Expandindo em frações parciais aparecem cossenos:

$$E_1(s) = \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + \frac{5}{8}} + \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + \frac{5}{2}}; \quad E_2(s) = \frac{5s}{s^2 + \frac{5}{8}} - \frac{5s}{s^2 + \frac{5}{2}}$$

$$e_1(t) = \frac{1}{2} \cos \sqrt{\frac{5}{8}}t + \frac{1}{2} \cos \sqrt{\frac{5}{2}}t; \quad e_2(t) = 5 \cos \sqrt{\frac{5}{8}}t - 5 \cos \sqrt{\frac{5}{2}}t$$

²⁵Existe uma outra versão da bobina de Tesla, desenvolvida mais recentemente, que tem uma fonte de excitação alternada em série com o capacitor primário e opera com a resposta ao estado zero [16]. É uma forma mais conveniente para controle eletrônico, permitindo impressionantes demonstrações em que grandes faíscas elétricas são geradas de forma a tocar música.

Quando $t = 0$, os cossenos de e_1 se somam e os de e_2 se subtraem. Toda a energia está no primeiro capacitor. Após um ciclo da maior frequência (as duas estão numa razão de 1 : 2), os cossenos de e_1 se subtraem e os de e_2 se somam. Toda a energia está no segundo capacitor, que fica com -10 V. As formas de onda são mostradas na figura 1.27.

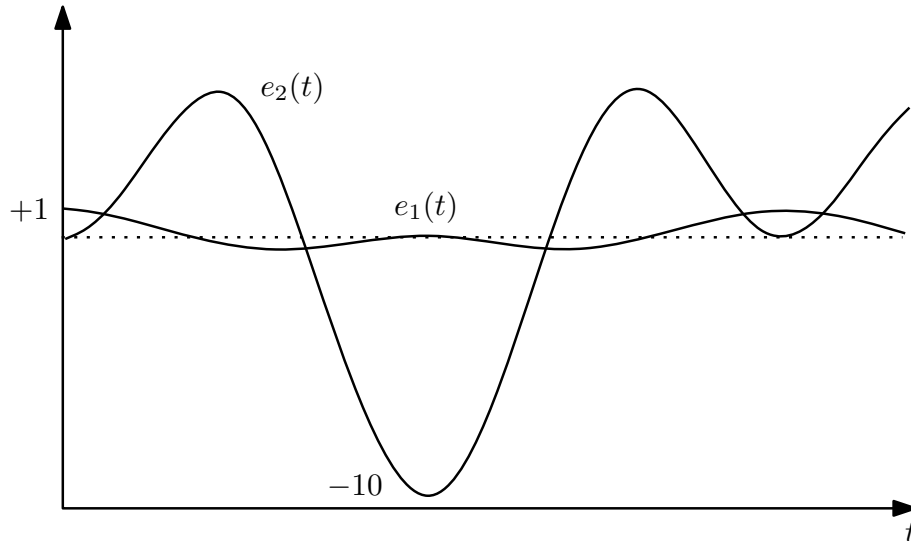


Figura 1.27: Formas de onda para a bobina de Tesla com $k = 0.6$.

1.5.3.2 Análise de circuitos lineares por partes

Uma útil extensão é a análise de circuitos não lineares ou variantes no tempo, em que os elementos mudam de modelo quando certas condições ocorrem, mas continuam com modelos lineares. A solução é calculada pela transformada de Laplace com o modelo inicial do circuito, e a solução no tempo é seguida até que ocorra um evento que cause uma mudança de modelo. Pode ser um instante de tempo atingido, no caso variante no tempo, ou uma condição sobre a solução do circuito, no caso não linear. As condições finais calculadas são então transformadas em condições iniciais para o novo modelo, e o processo é repetido até a ocorrência do próximo evento. A análise feita assim é exata, desde que os instantes e limites dos eventos que mudam o modelo sejam determinados precisamente. A técnica é entretanto problemática numericamente, devido à volta ao tempo e à necessidade de refinar os instantes onde ocorrem as mudanças de modelo.

1.5.3.3 Cálculo de resposta em frequência

Para análise manual de circuitos, a análise no estado permanente senoidal em forma algébrica ou semi-algébrica fica mais simples se feita com s em vez de $j\omega$, ficando então transformada em um cálculo da resposta ao impulso (com entradas em cosseno, fasores reais, se tornando impulsos na transformada de Laplace). Obtida uma solução, basta fazer $s = j\omega$ para ter o resultado para o estado permanente senoidal.

A partir dos polinômios (para redes RLCM) de s assim obtidos, podem ser feitos também cálculos de frequências naturais, polos e zeros, como se verá adiante.

Exemplo: Seja calcular a resposta em frequência entre V_{in} e E_2 no circuito da figura 1.20. O resultado

é interessante pois permite avaliar como projetar um transformador a ser ligado entre resistências dadas. O sistema nodal a resolver é o mesmo daquele exemplo, com $j\omega$ substituído por s :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{\Gamma_{11}}{s} & \frac{\Gamma_{12}}{s} \\ \frac{\Gamma_{21}}{s} & \frac{1}{R_2} + \frac{\Gamma_{22}}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_{in}(s)}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

O resultado é:

$$\frac{E_2}{V_{in}}(s) = \frac{-\frac{\Gamma_{21}}{sR_1}}{\frac{1}{R_1R_2} + \frac{\Gamma_{22}}{sR_1} + \frac{\Gamma_{11}}{sR_2} + \frac{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}{s^2} - \frac{\Gamma_{12}\Gamma_{21}}{s^2}} = \frac{-\Gamma_{21}R_2s}{s^2 + s(\Gamma_{22}R_2 + \Gamma_{11}R_1) + R_1R_2(\Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}\Gamma_{21})}$$

Substituindo as indutâncias recíprocas pelas indutâncias:

$$\frac{E_2}{V_{in}}(s) = \frac{MR_2s}{(L_1L_2 - M^2)s^2 + s(L_1R_2 + L_2R_1) + R_1R_2}$$

Isto é uma função passa-faixa de segunda ordem. Os comportamentos em baixa frequência, média frequência e alta frequência podem ser obtidos da expressão:

$$\begin{aligned} \text{Baixa frequência: } \left| \frac{E_2}{V_{in}}(j\omega) \right| &\approx \frac{M}{R_1} \omega \\ \text{Média frequência: } \left| \frac{E_2}{V_{in}}(j\omega) \right| &= \frac{MR_2}{L_1R_2 + L_2R_1} \text{ em } \omega = \sqrt{\frac{R_1R_2}{L_1L_2 - M^2}} \\ \text{Alta frequência: } \left| \frac{E_2}{V_{in}}(j\omega) \right| &\approx \frac{MR_2}{(L_1L_2 - M^2)\omega} \end{aligned}$$

Note-se que o ganho em média frequência vale, usando-se $M = k\sqrt{L_1L_2}$ e $n = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$:

$$\left| \frac{E_2}{V_{in}}(j\omega) \right| = \frac{MR_2}{L_1R_2 + L_2R_1} = k \frac{\frac{R_2}{n^2}}{R_1 + \frac{R_2}{n^2}} n$$

que é o ganho se fosse usado um transformador ideal com relação de espiras n multiplicado por k . Comparando as assíntotas de baixa e alta frequência com o ganho de média frequência, são obtidos os dois limites de frequência entre os quais o transformador opera com ganho aproximadamente constante, de forma quase ideal se $k \approx 1$. Destes limites podem ser calculados os valores necessários para L_1 e k . Note-se o compromisso que aparece, pois se L_1 é aumentado para reduzir ω_1 , k tem que ser mais próximo de 1 para manter ω_2 .

$$\begin{aligned} \text{Limite inferior: } \omega_1 &= \frac{R_1R_2}{L_1R_2 + L_2R_1} = \frac{\frac{R_2}{n^2}}{R_1 + \frac{R_2}{n^2}} \frac{R_1}{L_1} \\ \text{Limite superior: } \omega_2 &= \frac{L_1R_2 + L_2R_1}{L_1L_2 - M^2} = \frac{R_1 + \frac{R_2}{n^2}}{L_1(1 - k^2)} \end{aligned}$$

Por exemplo, seja um transformador a ligar entre resistências de $R_1 = 50 \Omega$ e $R_2 = 300 \Omega$, de forma a produzir o máximo ganho possível, que deva operar entre 1 MHz e 100 MHz. O máximo ganho é obtido com máxima transferência de potência com $k = 1$, o que resulta em $n = \sqrt{R_2/R_1} = 2.45$, independente de k . O cálculo leva a $L_1 = 3.98 \mu\text{H}$, $L_2 = 23.9 \mu\text{H}$ e $k = 0.9798^{26}$. A figura 1.28 mostra a resposta em frequência calculada. O ganho máximo resulta como 1.2, que é o máximo ideal de 1.225 multiplicado por

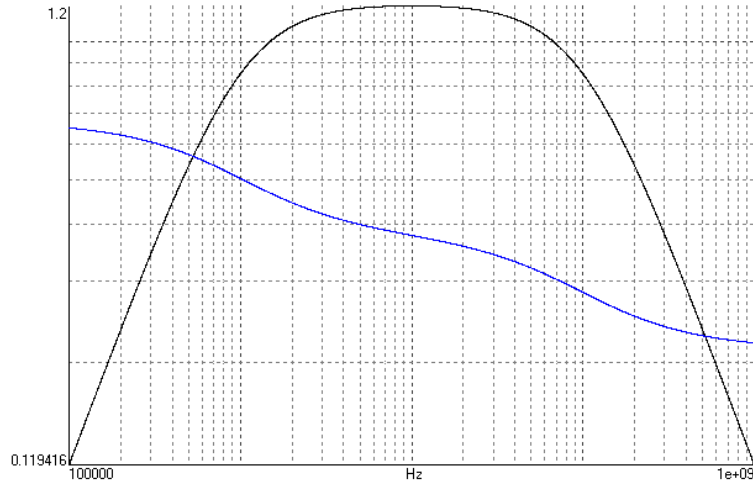


Figura 1.28: Resposta em frequência do transformador entre resistências. A fase está entre $\pm 180^\circ$.

k . Nas frequências limite o ganho máximo fica dividido por $\approx \sqrt{2}$, ficando em ≈ 0.85 . Note-se que por este cálculo existe uma mínima frequência superior, pois $k > 0$, de 4.0 MHz com os valores usados.

Note-se que se $k = 1$ o sistema é de primeira ordem, e não existe limite superior de frequência. É interessante observar a resposta ao degrau deste circuito. A resposta a um degrau de amplitude V_{in} é fácil de calcular:

$$E_2(s) = \frac{MR_2}{s(L_1R_2 + L_2R_1) + R_1R_2} V_{in} = \frac{\frac{R_2}{n^2} n}{R_1 + \frac{R_2}{n^2}} V_{in} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} V_{in}$$

Voltando ao tempo:

$$e_2(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} V_{in} e^{-\omega_1 t}$$

O caso com $k < 1$ com $\omega_2 \gg \omega_1$ resulta em duas exponenciais com constantes de tempo próximas de $1/\omega_1$ e $1/\omega_2$, com a segunda determinando o tempo de subida do pulso e primeira o tempo de descida. A figura 1.29 mostra a comparação das respostas a um degrau unitário do circuito, com k como calculado e com $k = 1$.

Detalhando o cálculo, com o circuito na condição de máxima transferência de potência:

$$E_2(s) = \frac{MR_2}{(L_1L_2 - M^2)s^2 + (L_1R_2 + L_2R_1)s + R_1R_2} V_{in} = \frac{knL_1R_2}{(L_1^2 \frac{R_2}{R_1} (1 - k^2))s^2 + 2L_1R_2s + R_1R_2} V_{in}$$

A expansão em frações parciais fica simples:

$$E_2(s) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} V_{in} \left(\frac{1}{s + \frac{R_1}{L_1(1+k)}} - \frac{1}{s + \frac{R_1}{L_1(1-k)}} \right)$$

No tempo:

²⁶Nesta condição, $L_1 = R_1/(2\omega_1)$, $k = \sqrt{1 - 4\omega_1/\omega_2}$, e sempre $L_2 = n^2L_1$.

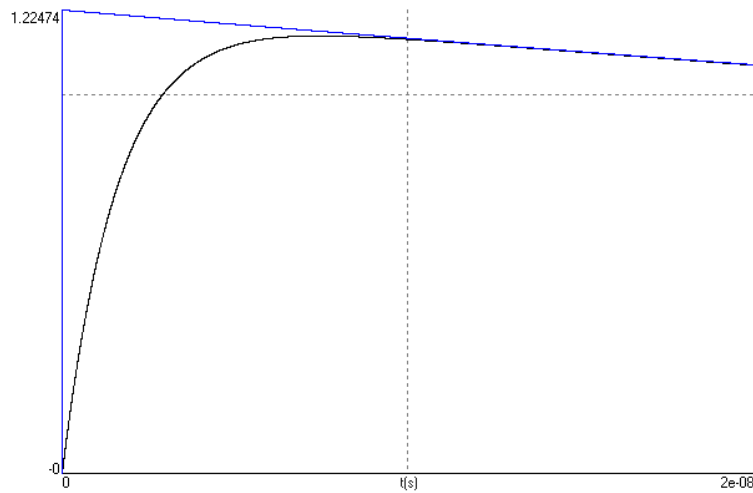


Figura 1.29: Início da resposta a um degrau de 1 V do mesmo circuito, com $k = 0.9798$ e com $k = 1$.

$$e_2(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} V_{in} \left(e^{-\frac{R_1}{L_1(1+k)}t} - e^{-\frac{R_1}{L_1(1-k)}t} \right)$$

Note-se que realmente as duas constantes de tempo são próximas de $1/\omega_1 = 2L_1/R_1$ e $1/\omega_2 = (1 - k^2)L_1/(2R_1)$ se $k \approx 1$.

1.5.3.4 Análise de estabilidade

O determinante da matriz do sistema forma o denominador de todas as transformadas das variáveis, e na expansão em frações parciais gera termos como os da tabela 1.1. Sistemas instáveis geram termos crescentes do tempo, como exponenciais, rampas e senóides crescentes, em casos sem entradas, na resposta à entrada zero, e assim podem ser identificados. Estes casos decorrem de apenas dois casos:

- Parte real positiva em alguma raiz do determinante polinomial do sistema.
- Raiz múltipla com parte real nula, em zero ou em par de raízes imaginárias.

Na discussão adiante sobre “Frequências naturais” isto será mais detalhado.

1.5.4 Solução do sistema

Um sistema algébrico pode ser resolvido pelo método de Cramer. Um sistema semialgébrico em polinômios de s e $\frac{1}{s}$, pode também ser resolvido pelo método de Cramer. O problema de operar com potências negativas de s pode ser contornado com a multiplicação por s das equações envolvendo indutores (isto pode aumentar os graus dos polinômios mais que o necessário), ou pelo uso da análise nodal modificada (adiante)²⁷.

²⁷Entradas com transformadas de Laplace mais complexas que a do degrau podem ser modeladas. Por exemplo, uma senóide pode ser gerada com um circuito paralelo LC com condições iniciais adequadas para gerar a amplitude e a fase desejadas. Um amplificador ou fonte controlada acoplaria o gerador assim criado ao resto do circuito. É também possível multiplicar toda a equação por $s^2 + \omega^2$ e ficar apenas com polinômios de s .

1.5.4.1 O algoritmo da eliminação²⁸

Um algoritmo similar ao método de Gauss, mas que não requer divisões de polinômios, é conhecido para a solução de sistemas de equações polinomiais com coeficientes numéricos. O método é muito mais rápido que o de Cramer para circuitos grandes.

Seja um sistema de equações polinomiais em s :

$$\begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) & \cdots & P_{1n}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) & \cdots & P_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}(s) & P_{n2}(s) & \cdots & P_{nn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ \vdots \\ E_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \\ \vdots \\ F_n(s) \end{bmatrix}$$

O algoritmo de solução é:

1. Para $i = 1 \dots n$:
2. Examinar a coluna i , de $P_{ii}(s)$ até $P_{ni}(s)$. Se apenas um polinômio é não nulo, seja $P_{ki}(s)$, trocar as equações i e k e ir ao passo 7.
3. Fazer k o índice da linha do polinômio com menor grau não nulo para $k = i \dots n$, $P_{ki}(s)$.
4. Dividir por $P_{ki}(s)$ todos os polinômios $P_{ji}(s)$, $j = 1 \dots n$, $j \neq k$ achando os quocientes $q_{ji}(s)$ e os restos $r_{ji}(s)$, de forma que $p_{ji}(s) - q_{ji}(s)P_{ki}(s) = r_{ji}(s)$.
5. Para todas as equações l , $l = 1 \dots n$, $l \neq k$, fazer equação $l =$ equação $l - q_{li}(s) \times$ equação k .
6. Voltar ao passo 2.
7. Fim do ciclo.

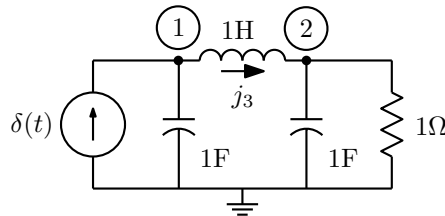


Figura 1.30: Circuito a resolver pelo algoritmo da eliminação.

Exemplo: Seja resolver o sistema, que resulta da análise nodal modificada (ver adiante) do circuito da figura 1.30:

$$\begin{bmatrix} s & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & s+1 & \vdots & -1 \\ -1 & 1 & \vdots & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ \vdots \\ J_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Seguindo o algoritmo:

- 1) $i = 1$

²⁸Material opcional. Ver o livro “Basic Circuit Theory”, de Desoer e Kuh, 1969.

2) Não há apenas um polinômio não nulo na coluna 1.

3) $k = 3$, $P_{31}(s) = -1$.

4) Dividindo a coluna 1 por $P_{31}(s)$, exceto $P_{31}(s)$:

$s \div -1 = -s$, resto 0.

$0 \div -1 = 0$, resto 0.

5) Processando as equações 1 e 2:

$s - (-s)(-1) = 0$; $0 - (-s)1 = s$; $1 - (-s)s = s^2 + 1$; $1 - (-s)0 = 1$.

$0 - (0)(-1) = 0$; $s + 1 - (0)1 = s + 1$; $-1 - (0)s = -1$; $0 - (0)0 = 0$ (melhor omitir se $q_{ii} = 0$).

Resta:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & s & s^2 + 1 \\ 0 & s + 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 & s \end{array} \right] \begin{array}{c} E_1(s) \\ E_2(s) \\ J_3(s) \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

2) Trocando as linhas 1 e 3:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & s \\ 0 & s + 1 & -1 \\ \hline 0 & s & s^2 + 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} E_1(s) \\ E_2(s) \\ J_3(s) \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}$$

1) $i = 2$.

3) $k = 2$, $P_{22}(s) = s + 1$.

4) Dividindo a coluna 2, a partir do índice 2, por $P_{22}(s)$, exceto $P_{22}(s)$:

$s \div (s + 1) = 1$; resto -1 .

5) Processando a equação 3:

$s - 1(s + 1) = -1$; $s^2 + 1 - 1(-1) = s^2 + 2$; $1 - 1(0) = 1$.

Resta:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & s \\ 0 & s + 1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & s^2 + 2 \end{array} \right] \begin{array}{c} E_1(s) \\ E_2(s) \\ J_3(s) \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}$$

3) $k = 3$; $P_{32} = -1$.

4) Dividindo a coluna 2, a partir do índice 2, por $P_{32}(s)$, exceto $P_{32}(s)$:

$(s + 1) \div -1 = -s - 1$; resto 0.

5) Processando a equação 2:

$s + 1 - (-s - 1)(-1) = 0$; $-1 - (-s - 1)(s^2 + 2) = s^3 + s^2 + 2s + 1$; $0 - (-s - 1)1 = s + 1$.

Resta:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & s \\ 0 & 0 & s^3 + s^2 + 2s + 1 \\ \hline 0 & -1 & s^2 + 2 \end{array} \right] \begin{array}{c} E_1(s) \\ E_2(s) \\ J_3(s) \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ s + 1 \\ 1 \end{array}$$

2) Trocando as equações 2 e 3:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & & s \\ 0 & -1 & & s^2 + 2 \\ \hline 0 & 0 & s^3 + s^2 + 2s + 2 & \end{array} \right] \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ J_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ s + 1 \end{bmatrix}$$

O algoritmo está completo, encontrando $J_3(s) = \frac{s+1}{s^3+s^2+2s+1}$. As demais variáveis podem ser obtidas a partir do sistema final, ou repetindo o procedimento com colunas trocadas, já que apenas a última variável é diretamente calculada. Notar o problema numérico que pode ocorrer no passo 5, onde a subtração de dois polinômios pode anular o coeficiente de grau mais alto, mas erros numéricos podem tornar o cancelamento inexato. É necessário examinar os polinômios gerados após as subtrações para eliminar termos desprezíveis e talvez corrigir o grau. Se um erro na decisão se um valor é nulo ou não ocorrer neste passo, o método falha. O método de Cramer não tem este problema. Os polinômios podem ser examinados apenas no fim das operações.

1.5.4.2 Interpolação

É possível também interpolar os polinômios das soluções. Primeiramente a ordem de complexidade m do circuito é determinada (pode ser superestimada), que é o grau máximo que os polinômios podem ter. Considerando apenas entradas impulsivas, inclusive condições iniciais, os polinômios então terão no máximo $m + 1$ coeficientes. Realizando-se $m + 1$ análises totalmente numéricas, com valores numéricos de s , tem-se informação suficiente para interpolar os polinômios para os numeradores e denominadores (o mesmo para todas) de todas as soluções. Como todas as soluções são razões de polinômios de s , $E_k(s) = N_k(s)/D(s)$. O polinômio do denominador $D(s)$, comum a todas as soluções, é o determinante da matriz $[Y_n(s)]$, possivelmente multiplicado por uma potência de s para eliminar potências negativas de s (a potência correta é igual ao número de indutores). Os polinômios dos numeradores são então dados por $N_k(s) = E_k(s)D(s)$. Avaliando $D(s)$ para $m + 1$ valores de s s_i , os coeficientes do polinômio $D(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0$ podem ser obtidos resolvendo-se o sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} s_1^m & s_1^{m-1} & \dots & 1 \\ s_2^m & s_2^{m-1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_m^m & s_m^{m-1} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_m \\ a_{m-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(s_1) \\ D(s_2) \\ \vdots \\ D(s_{m+1}) \end{bmatrix}$$

O polinômio obtido é então examinado, com coeficientes desprezíveis gerados por erro numérico sendo zerados, corrigindo seu grau se ele foi superestimado. O mesmo é feito para interpolar os numeradores $N_k(s) = b_k m s^m + b_k m-1 s^{m-1} + \dots + b_k 0$, com as incógnitas agora sendo \vec{b}_k e o vetor de excitação do sistema mudado para $\vec{N}_k(\vec{s})$. Todos os coeficientes podem ser calculados simultaneamente, com um sistema de equações com uma única matriz e vários vetores de excitação.

O algoritmo é mais estável numericamente se todos os s_i tiverem valores com módulos próximos. Uma forma de conseguir todos com o mesmo módulo é usar valores complexos distribuídos em um círculo com raio da mesma ordem de grandeza da faixa de frequências ω onde o circuito opera. É possível economizar alguns cálculos usando o fato de que as soluções para valores complexos conjugados de s_i são também complexas conjugadas. É também possível acelerar o cálculo e evitar o sistema de equações usando o fato de que, se o número de análises for uma potência de 2 e os valores de s_i forem localizados igualmente espaçados sobre um círculo, com valores reais ou complexos conjugados, os coeficientes \vec{a} e \vec{b}_k podem ser obtidos por “fast Fourier transforms” (FFT) das sequências complexas $\vec{D}(\vec{s})$ e $\vec{N}_k(\vec{s})$. O resultado fica escalado pelo raio de círculo usado.

Exemplo: Seja analisar o circuito da figura 1.31. O sistema nodal em transformada de Laplace para ele, usando um equivalente Norton para a fonte de tensão, é:

$$\begin{bmatrix} 2s + 1 + \frac{4}{s} & -s - \frac{4}{s} \\ -2 - \frac{4}{s} & 2s + 1 + \frac{4}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

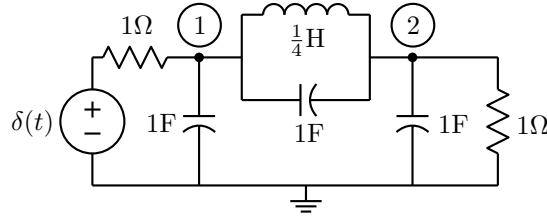


Figura 1.31: Circuito a ser analisado por interpolação.

Escolhendo um raio de 2 rad/s para um círculo, devem ser feitas quatro análises:

$$s_1 = +2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s_1) \\ E_2(s_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1(s_1) \\ E_2(s_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{33} \\ \frac{4}{33} \end{bmatrix} \quad D(s_1) = 33$$

$$s_2 = +2j \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 + 2j & 0 \\ 0 & 1 + 2j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s_2) \\ E_2(s_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1(s_2) \\ E_2(s_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+2j}{-3+4j} \\ 0 \end{bmatrix} \quad D(s_2) = -3 + 4j$$

$$s_3 = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s_3) \\ E_2(s_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1(s_3) \\ E_2(s_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{9} \\ \frac{-4}{9} \end{bmatrix} \quad D(s_3) = 9$$

$$s_4 = -2j \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 - 2j & 0 \\ 0 & 1 - 2j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s_4) \\ E_2(s_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1(s_4) \\ E_2(s_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-2j}{-3-4j} \\ 0 \end{bmatrix} \quad D(s_4) = -3 - 4j$$

Montando os sistemas de equações para achar os coeficientes do denominador e dos dois numeradores $N_k(s_i) = E_k(s_i)D(s_i)$, os valores obtidos para estes devem ser multiplicados por s_i , para que as soluções sejam polinômios de terceiro grau:

$$\begin{bmatrix} s_1^3 & s_1^2 & s_1 & 1 \\ s_2^3 & s_2^2 & s_2 & 1 \\ s_3^3 & s_3^2 & s_3 & 1 \\ s_4^3 & s_4^2 & s_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(s_1)s_1 \\ D(s_2)s_2 \\ D(s_3)s_3 \\ D(s_4)s_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_1^3 & s_1^2 & s_1 & 1 \\ s_2^3 & s_2^2 & s_2 & 1 \\ s_3^3 & s_3^2 & s_3 & 1 \\ s_4^3 & s_4^2 & s_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{12} \\ b_{11} \\ b_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(s_1)s_1 \\ N_1(s_2)s_2 \\ N_1(s_3)s_3 \\ N_1(s_4)s_4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} s_1^3 & s_1^2 & s_1 & 1 \\ s_2^3 & s_2^2 & s_2 & 1 \\ s_3^3 & s_3^2 & s_3 & 1 \\ s_4^3 & s_4^2 & s_4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{23} \\ b_{22} \\ b_{21} \\ b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2(s_1)s_1 \\ N_2(s_2)s_2 \\ N_2(s_3)s_3 \\ N_2(s_4)s_4 \end{bmatrix}$$

Com os valores calculados, os resultados são:

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{12} \\ b_{11} \\ b_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} b_{23} \\ b_{22} \\ b_{21} \\ b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Os resultados correspondem às soluções:

$$E_1(s) = \frac{2s^2 + s + 4}{3s^3 + 4s^2 + 9s + 8}; \quad E_2(s) = \frac{s^2 + 4}{3s^3 + 4s^2 + 9s + 8}$$

O mesmo resultado pode ser obtido pela interpolação com FFT. Realizando as FFTs das seqüências e reescalando em frequência por 2:

$$D(s) : \begin{bmatrix} 66 \\ -8 - 6j \\ -18 \\ -8 + 6j \end{bmatrix} \rightarrow \text{FFT} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \\ 16 \\ 24 \end{bmatrix} \begin{matrix} \div 1 = 8 \\ \div 2 = 9 \\ \div 4 = 4 \\ \div 8 = 3 \end{matrix}$$

$$N_1(s) : \begin{bmatrix} 14 \\ -4 + 2j \\ 10 \\ -4 - 2j \end{bmatrix} \rightarrow \text{FFT} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \div 1 = 4 \\ \div 2 = 1 \\ \div 4 = 2 \\ \div 8 = 0 \end{matrix} \quad N_2(s) : \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{FFT} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \div 1 = 4 \\ \div 2 = 0 \\ \div 4 = 1 \\ \div 8 = 0 \end{matrix}$$

Notar que as seqüências são as mesmas dos vetores de excitação dos sistemas de equações. Pode-se evitar a renormalização usando raio unitário, mas então o circuito deve estar normalizado²⁹, para boa precisão no cálculo.

A análise nodal é bastante restrita quanto aos elementos aceitos, mas o problema pode ser contornado de várias formas, através de deslocamentos de fontes de tensão ou de modelamento dos ramos controlados a corrente, como se verá a seguir.

1.6 Deslocamento de fontes de tensão

A análise nodal normal não permite o tratamento direto de elementos com controle por corrente, onde a tensão depende da corrente, no próprio ramo ou em outro. O caso mais simples é o da fonte de tensão, que coloca a mesma tensão no ramo para qualquer corrente. Usando a análise nodal básica, pode-se tratar fontes de tensão usando equivalentes Norton e deslocamentos de fontes. Uma fonte de tensão, independente ou controlada, em série com um elemento de impedância Z (o que inclui a análise de circuitos resistivos lineares e as análises no estado permanente senoidal e em transformada de Laplace), pode ser diretamente eliminada por um equivalente Norton. Se a fonte de tensão estiver em série com uma fonte de corrente, independente ou controlada, a fonte de tensão pode ser eliminada, pois sua presença não altera a corrente no ramo (figura 1.32):

Note-se que um nó desaparece no processo, e que a tensão e a corrente sobre a impedância ficam diferentes no equivalente Norton. A tensão sobre a fonte de corrente é toda a tensão sobre o ramo. No caso de uma fonte isolada, ela pode ser deslocada para qualquer um dos lados (figura 1.33), e os ramos resultantes transformados.

Também desaparece um nó no processo (o nó a), mas sua tensão nodal pode ser facilmente calculada somando-se V à tensão no nó restante (nó b) da fonte de tensão. As tensões nos nós restantes não são alteradas. Deslocamentos podem ser feitos também com fontes controladas, mas é preciso ter cuidado com modificações nas variáveis controladoras das fontes, quando fontes são deslocadas para os ramos que as contém. Como cada deslocamento elimina um nó do circuito, o máximo número de fontes de tensão em um circuito é igual ao número de nós, exceto o nó de terra. Estes deslocamentos não afetam as correntes nos ramos.

Variáveis de corrente controladoras de fontes controladas também podem ser deslocadas, usando-se as mesmas regras. Uma corrente controladora isolada em um ramo, um curto-circuito, que não pode existir

²⁹Operando em torno de 1 rad/s, com níveis de impedância em torno de 1Ω . A normalização em impedância e frequência é feita multiplicando todas as admitâncias por um valor médio de resistência no circuito e multiplicando capacitâncias e indutâncias por uma frequência angular média de operação do circuito. Uma normalização correta resulta em todos os coeficientes dos polinômios próximos a 1. Para um dos polinômios, como o do denominador de todas as variáveis, pode-se conseguir coeficientes de maior e menor grau unitários.

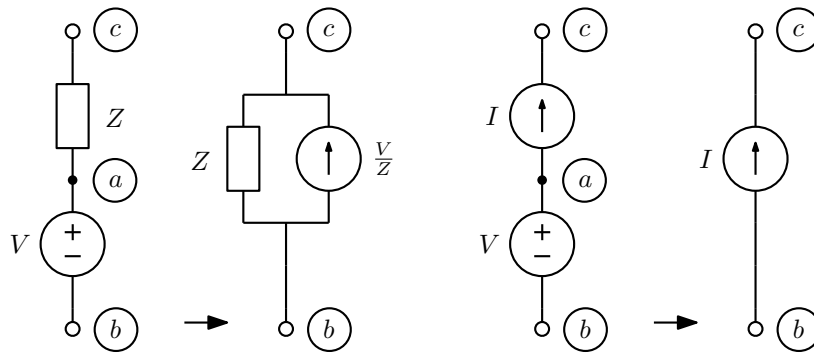


Figura 1.32: Equivalente Norton e eliminação de fonte de tensão.

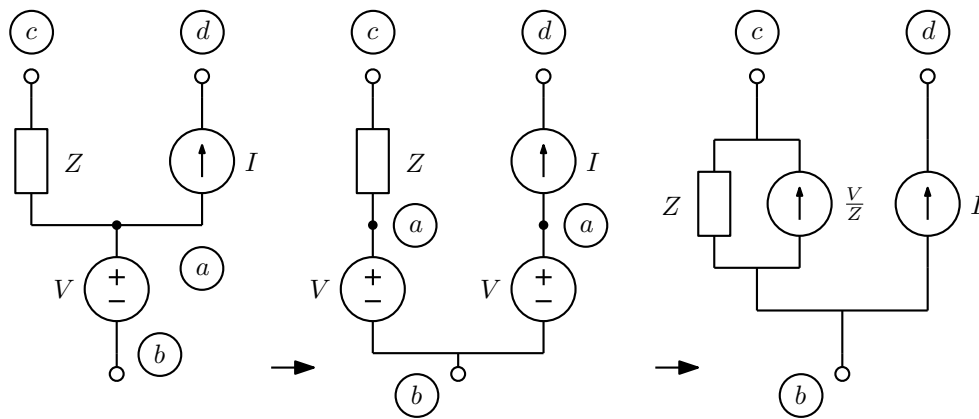


Figura 1.33: Deslocamento de fonte de tensão.

na análise nodal normal, pode ser deslocada como se desloca uma fonte de tensão. O deslocamento é feito até que seja possível exprimir o valor do controle em termos das variáveis do sistema, as tensões nodais.

Estas operações reduzem o tamanho do sistema a ser resolvido, mas são de complicada implementação em um programa de análise de circuitos. E no caso de existirem fontes controladas, podem requerer a solução de um sistema de equações apenas para a montagem do sistema nodal, em circuitos com várias fontes controladas deslocadas umas para os ramos controladores das outras. Em geral é o melhor processo para uma análise manual de um circuito, especialmente se os deslocamentos são simples. Deslocamentos são menos úteis em circuitos não lineares, pois neles não existe diretamente o equivalente Norton.

Deslocamentos na direção do nó de terra deslocam as fontes na direção do terminal de terra também. Isto faz com que todas as tensões nodais fiquem acrescidas do valor da fonte deslocada.

Exemplo: Seja o circuito da figura 1.34. Ele tem duas fontes de tensão e um curto-circuito que devem ser deslocados. Os deslocamentos vão alterar as tensões de controle v_1 e v_2 .

A fonte V pode ser deslocada na direção do nó 3, ficando em série com os resistores R_3 e R_2 , e desaparecendo em série com a fonte Bj_5 . A fonte Av_1 pode ser deslocada na direção do nó 4, ficando em série com R_3 e desaparecendo em série com a fonte Gv_2 . Há aí uma dificuldade, pois a fonte Gv_2 passa a ficar ligada entre o nó 2 e a terra, e a tensão de controle v_1 não é mais tensão sobre ela, e deve ser calculada em função de e_2 , ou melhor, de e_1 :

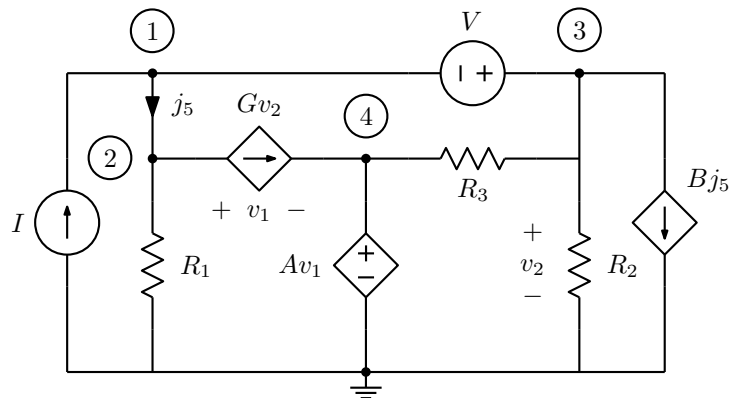


Figura 1.34: Exemplo onde vários deslocamentos que interagem são necessários.

$$v_1 = e_2 - e_4 = e_2 - Av_1$$

$$v_1 = \frac{e_2}{1 + A} = \frac{e_1}{1 + A}$$

A corrente j_5 pode ser calculada deslocando o curto-circuito na direção do nó 2. Fica em função de $e_2 = e_1$ e v_2 , mas $v_2 = e_3$ desaparece no deslocamento da fonte V e tem que ser obtida a partir de e_1 e V . v_2 também é necessária para controlar a fonte Gv_2 :

$$v_2 = e_1 + V$$

$$j_5 = \frac{e_2}{R_1} + Gv_2 = \frac{e_1}{R_1} + G(e_1 + V)$$

Resulta o modelo da figura 1.35, antes dos equivalentes Norton, e sem decompor as fontes controladas em controladas e independentes. Os três deslocamentos eliminam três nós:

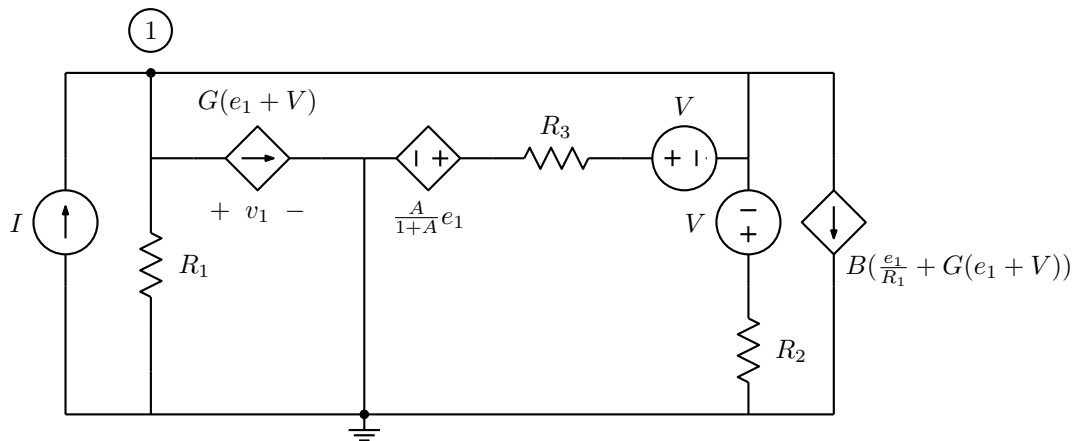


Figura 1.35: Deslocamentos e identificação das variáveis controladoras feitos.

Resta uma só equação nodal, que calcula e_1 :

$$\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + G - \frac{A}{R_3(1+A)} + B \left(\frac{1}{R_1} + G \right) \right] e_1 = \left[I - GV - \frac{V}{R_3} - \frac{V}{R_2} - BGV \right]$$

As outras tensões nodais podem ser calculadas em função de e_1 , observando-se o circuito original:

$$\begin{aligned} e_2 &= e_1 \\ e_3 &= e_1 + V \\ e_4 &= \frac{A}{1+A} e_1 \end{aligned}$$

O deslocamento de fontes pode ser aplicado também ao deslocamento de outros elementos. Um resistor, por exemplo, pode ser modelado como um transresistor em série com um curto-circuito (figura 1.36).

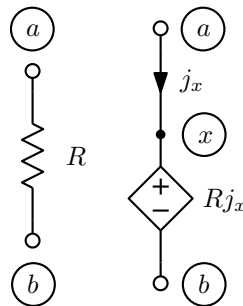


Figura 1.36: Equivalente deslocável de um resistor.

O transresistor pode então ser deslocado em direção ao nó b , e o curto-circuito deslocado na direção do nó a . A operação deixa apenas o nó x , e é equivalente a eliminar a tensão do nó b do sistema de equações. Normalmente não é muito útil essa operação, mas é um recurso.

Exemplo: Um circuito para análise no estado permanente senoidal é mostrado na figura 1.37.

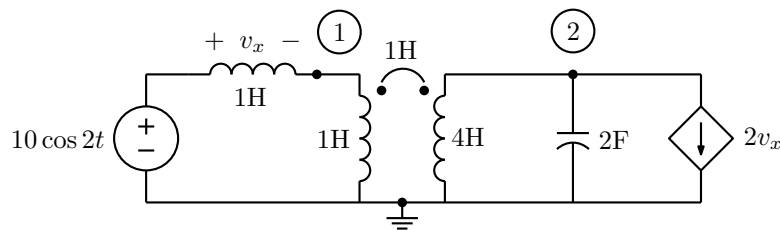


Figura 1.37: Circuito que requer transformações para análise no estado permanente senoidal.

A matriz de indutâncias recíprocas do transformador é:

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \therefore [\Gamma] = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Deslocando a fonte de tensão na direção do indutor e fazendo um equivalente Norton ela afeta o controle do transcondutor, já que $V_x(j2) = 10 - E_1(j2)$. Modelando o transformador e usando fasores resulta o modelo da figura 1.38.

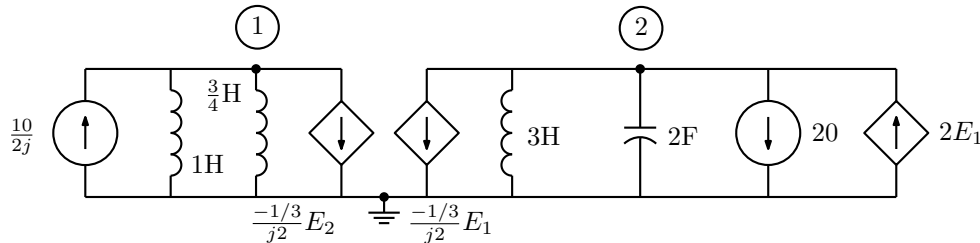


Figura 1.38: Modelo com deslocamentos feitos.

O sistema nodal é:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{j2} + \frac{4}{j6} & -\frac{1}{j6} \\ -\frac{1}{j6} - 2 & \frac{1}{j6} + j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(j2) \\ E_2(j2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{j2} \\ -20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -j\frac{7}{6} & j\frac{1}{6} \\ j\frac{1}{6} - 2 & j\frac{23}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(j2) \\ E_2(j2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j5 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Resolvendo:

$$E_1(j2) = \frac{\frac{115}{6} + j\frac{10}{3}}{\frac{9}{2} + j\frac{1}{3}} = \frac{3145}{733} + j\frac{310}{733} = 4.29 + j0.423$$

$$E_2(j2) = \frac{-\frac{5}{6} + j\frac{40}{3}}{\frac{9}{2} + j\frac{1}{3}} = \frac{25}{733} + j\frac{2170}{733} = 0.0341 + j2.96$$

Voltando para o domínio do tempo:

$$e_1(t) = 4.29 \cos 2t - 0.423 \sin 2t$$

$$e_2(t) = 0.0341 \cos 2t - 2.96 \sin 2t$$

Observe-se que esse circuito é instável, devido ao valor da transcondutância, o que esta análise não revela. Superposta a esta resposta existem termos que crescem exponencialmente com o tempo.

1.7 Análise nodal modificada

Os elementos básicos de interesse que a análise nodal não admite são a fonte independente de tensão, a fonte de tensão controlada a tensão (amplificador de tensão), a fonte de corrente controlada a corrente (amplificador de corrente) e a fonte de tensão controlada a corrente (transresistor). Pode-se incluir também o amplificador operacional ideal, e resistores com controle por corrente. É também conveniente tratar o indutor e os transformadores usando controle por corrente, no caso das análises no estado permanente senoidal e em transformada de Laplace.

A técnica da “análise nodal modificada” [23] permite o tratamento de fontes de tensão e outros elementos que a análise nodal não admite diretamente sem alterações no circuito. O custo é um sistema de equações maior. Há duas interpretações possíveis para o que é feito, descritas a seguir:

Na primeira interpretação, que é a clássica, a modificação consiste em introduzir como variáveis as correntes nas fontes de tensão, e, em geral, outras correntes que se tenha interesse em calcular. Para cada corrente acrescentada, uma nova equação deve ser também adicionada ao sistema. Essas equações são as equações dos ramos onde passam as correntes, na forma com controle por corrente.

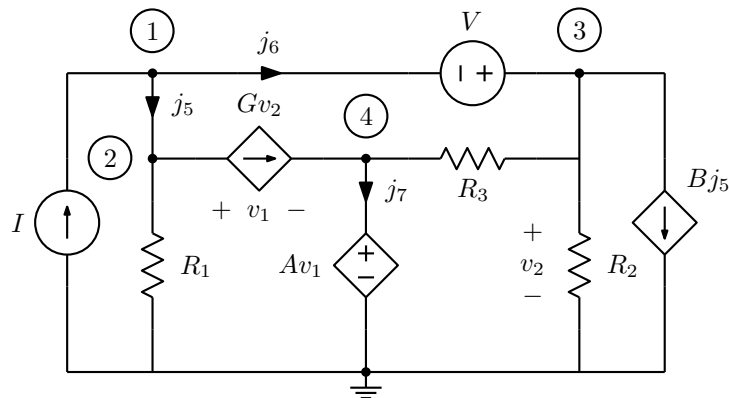


Figura 1.39: Circuito para análise nodal modificada.

Exemplo: Seja o mesmo circuito anterior, na figura 1.39. As equações nodais modificadas, escritas por extenso são:

- 1) $j_5 + j_6 = I$
- 2) $g_1 e_2 + G e_3 - j_5 = 0$
- 3) $g_2 e_3 + g_3 (e_3 - e_4) + B j_5 - j_6 = 0$
- 4) $g_3 (e_4 - e_3) - G e_3 + j_7 = 0$
- 5) $e_1 - e_2 = 0$
- 6) $e_3 - e_1 = V$
- 7) $A (e_2 - e_4) - e_4 = 0$

As primeiras quatro equações são as equações dos nós, com as correntes nos ramos com fontes de tensão acrescentadas. As últimas três são as equações dos ramos onde passam as três correntes acrescentadas. Colocando em forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & g_1 & G & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2 + g_3 & -g_3 & B & -1 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 - G & g_3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & -A - 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema é muito maior que o obtido por deslocamentos, mas cada elemento é tratado sem informação sobre os demais, e nenhuma transformação é necessária.

1.7.1 Interpretação como uso de modelos

Na segunda interpretação, os elementos especiais são modelados usando fontes de corrente e transdutores. Usando modelos adequados, onde nós internos são acrescentados e os transdutores arrumados de forma a que as tensões nos novos nós sejam numericamente idênticas às correntes nas fontes de tensão, as equações resultantes são equivalentes às obtidas pelo processo clássico. Esses modelos são mostrados na

figura 1.40, para a fonte de tensão, o amplificador de tensão, o amplificador de corrente e o transresistor, de cima para baixo.

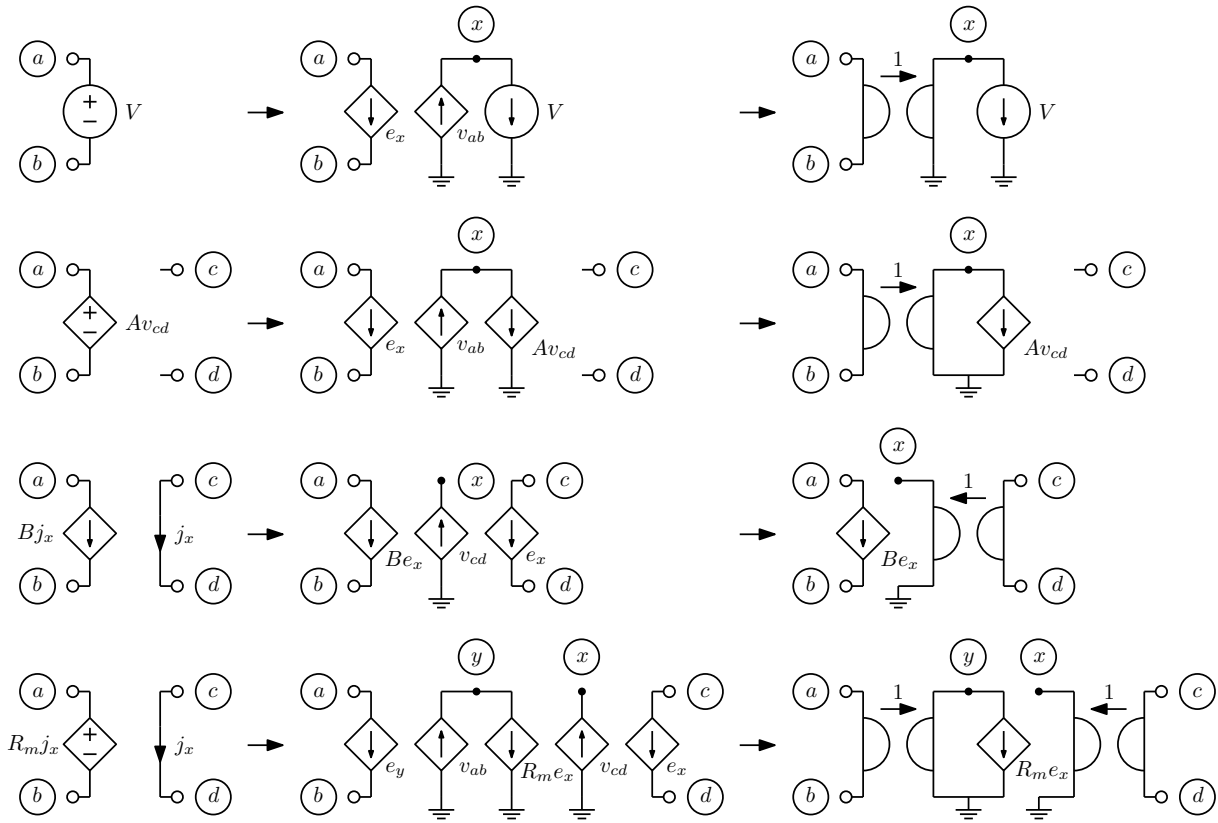


Figura 1.40: Modelos nodais para elementos com controle por corrente.

Estes modelos³⁰ sempre usam pares de transdutores configurados como giradores, para transformar elementos em suas formas duais. Para a fonte de tensão, tanto a independente como a controlada, a tensão no nó extra x equivale à corrente na fonte j_x . Para o amplificador de corrente equivale à corrente no curto-circuito de entrada (ou fonte de tensão de valor 0), j_x , e no transresistor as tensões nos dois nós internos x e y correspondem às correntes nos ramos de entrada (j_x) e saída (j_y). Estes modelos correspondem a estampas, que podem ser usadas com as estampas dos elementos básicos³¹:

$$\text{Fonte de tensão: } \begin{matrix} a \\ b \\ x \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & +1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ j_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ -V \end{bmatrix}$$

³⁰Notar que o aterramento indicado nos modelos poderia ser feito em qualquer ponto do circuito, pois a solução coloca corrente nula fluindo para aquele nó. O nó de terra é apenas mais conveniente.

³¹Nestas estampas, daqui por diante, as colunas das matrizes não são mais indicadas. Ficam associadas ao vetor de variáveis.

$$\text{Amp. de tensão: } \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ x \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & +1 & +A & -A & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \\ j_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$\text{Amp. de corrente: } \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ x \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +B \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -B \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & -1 & +1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \\ j_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$\text{Transresistor: } \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ x \\ y \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & +1 & \cdot & \cdot \\ -1 & +1 & \cdot & \cdot & +R_m & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \\ j_x \\ j_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Note que nas equações dos nós extra, o preenchimento de mais colunas corresponde ao acréscimo de fontes de tensão controladas a tensão (no quadrante inferior esquerdo), resistores e transresistores (no quadrante inferior direito) e fonte de tensão (no vetor \vec{i}_n), todos em série com o ramo. Nos modelos estes elementos aparecem em forma dual, junto do circuito dualizado pelos giradores. O caso do resistor é particularmente útil, já que a resistência pode valer zero. A estampa do resistor controlado a corrente é então:

$$\begin{matrix} a \\ b \\ x \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & +1 & +R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ j_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

As equações dos ramos de fontes de tensão ficam com sinais invertidos em relação ao que foi feito na outra interpretação com o uso desses modelos, o que não faz diferença no resultado. Pode-se então adotar esta convenção de polaridade sempre, forçando que elementos no segundo segmento das equações dos ramos, representando resistências em série nos ramos, sejam sempre positivos³². A forma sem inversões é obtida com inversões de polaridades das fontes nos modelos.

Exemplo:

Seja o mesmo circuito anterior, mas com uma resistência no ramo onde passa j_5 (figura 1.41). O ramo de entrada do amplificador de corrente agora tem uma resistência, e a equação 5 se torna:

$$5) -e_1 + e_2 + R_4 j_5 = 0$$

Usando as estampas acima, resulta:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & g_1 & G & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2 + g_3 & -g_3 & B & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -g_3 - G & g_3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & -A - 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -V \\ 0 \end{bmatrix}$$

³²A análise de sensibilidades pelo método da rede adjunta (ver adiante) requer esta forma.

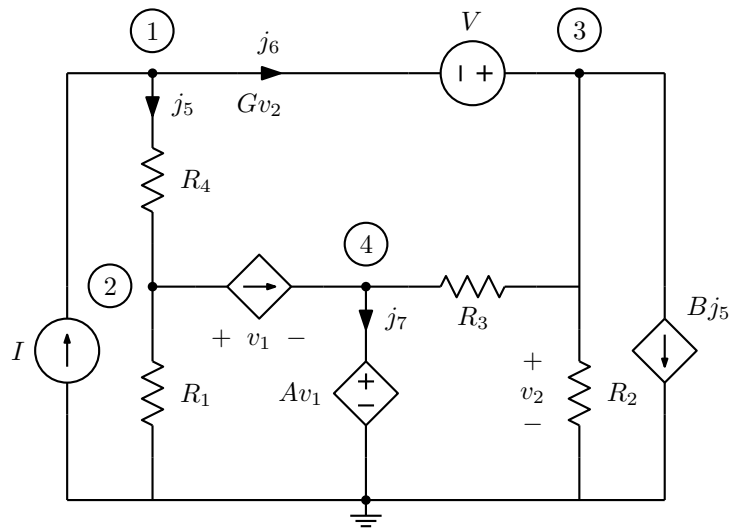


Figura 1.41: Circuito para análise nodal modificada, com um resistor controlado a corrente (R_4).

1.7.2 Indutores

A análise nodal modificada é conveniente para análise de circuitos contendo indutores, com o cálculo das correntes neles. Se pode também estender uma análise no estado permanente senoidal ao caso de frequência zero e a análise em transformada de Laplace ao caso de indutância nula.

A estampa para análise no estado permanente senoidal é uma extensão do caso do resistor controlado a corrente:

$$\begin{matrix} a \\ b \\ x \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & +1 & +j\omega L & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a(j\omega) \\ E_b(j\omega) \\ J(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

E para análise em transformada de Laplace é similar, com acréscimo do efeito da corrente inicial como fonte de tensão impulsional em série com o indutor:

$$v(t) = L \frac{dj}{dt} \Rightarrow V(s) = sLJ(s) - Lj(0)$$

$$\begin{matrix} a \\ b \\ x \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & +1 & +sL & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a(s) \\ E_b(s) \\ J(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ +Lj(0) \end{bmatrix}$$

1.7.3 O transformador ideal

Um elemento importante que não admite tratamento direto na análise nodal pura é o transformador ideal. Ele é o que resulta de um transformador “real” quando o coeficiente de acoplamento é unitário e as indutâncias tendem ao infinito.

Seja o caso de duas bobinas. Um transformador “real” teria as equações:

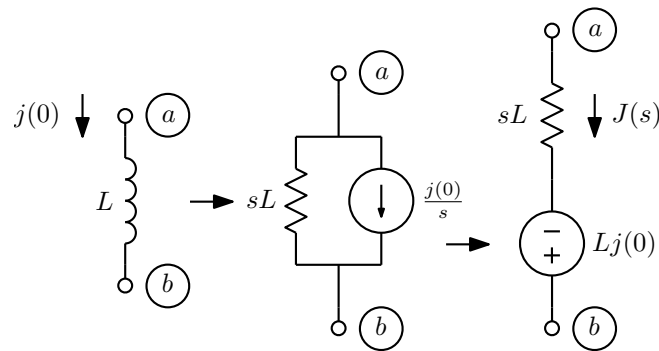


Figura 1.42: Indutor na análise nodal modificada em transformada de Laplace.

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} \\ M_{21} & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dj_1}{dt} \\ \frac{dj_2}{dt} \end{bmatrix}$$

Se $M_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$, pode-se dividir uma equação pela outra, obtendo:

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{L_1 \frac{dj_1}{dt} + \sqrt{L_1 L_2} \frac{dj_2}{dt}}{\sqrt{L_1 L_2} \frac{dj_1}{dt} + L_2 \frac{dj_2}{dt}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{n}$$

onde se usa o fato das indutâncias serem proporcionais ao quadrado do número de espiras, para indutores de mesma geometria. Se as indutâncias tenderem a infinito, com derivadas das correntes finitas, a primeira equação se reduz a (a segunda também):

$$0 = L_1 \frac{dj_1}{dt} + \sqrt{L_1 L_2} \frac{dj_2}{dt} \therefore \frac{dj_2}{dt} = -\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = -\frac{1}{n}$$

Esta é a forma correta, onde as derivadas das correntes ficam associadas, mas ignorando possíveis componentes contínuas nas correntes se acha a relação mais comum de se encontrar:

$$\frac{j_1(t)}{j_2(t)} = -n$$

O transformador ideal pode então ser modelado com duas fontes controladas. Um amplificador de tensão e um amplificador de corrente (figura 1.43).

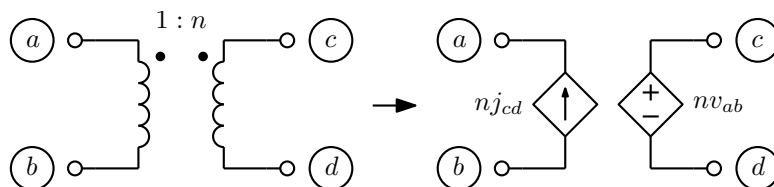


Figura 1.43: Transformador ideal.

Este modelo pode ser facilmente incluído na análise nodal modificada, com o cálculo da corrente j_{cd} , com a estampa:

$$\begin{array}{l}
 a \\
 b \\
 c \\
 d \\
 x
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccc|c}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -n \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +n \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\
 \hline
 +n & -n & -1 & +1 & \cdot
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 e_a \\
 e_b \\
 e_c \\
 e_d \\
 j_{cd}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot
 \end{array}
 \end{array}$$

Este modelo equivale a dois giradores em cascata (figura 1.44).

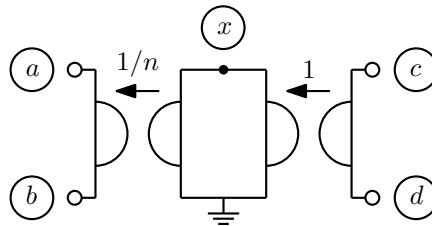


Figura 1.44: Transformador ideal modelado com giradores.

Para o caso de mais de duas bobinas, pode-se interligar vários transformadores de duas bobinas, ligando todas as bobinas de um lado em paralelo. Note-se que com este modelo é possível ligar uma fonte de corrente em paralelo com o ramo ab e/ou uma fonte de tensão em paralelo com o ramo cd , e isto não gera singularidade do sistema de equações (naturalmente, com ambos os lados do transformador aterrados ou referenciados a alguma tensão definida). Não é possível, entretanto, ligar duas fontes de tensão ou duas fontes de corrente aos dois lados. Resulta um sistema singular se isso for feito.

O transformador tem uma interessante e útil propriedade de conversão de níveis de impedância. Colocando-se um dos lados ligado a uma impedância Z , a impedância vista pelo outro lado é vista dividida pelo quadrado da relação de espiras, na forma mostrada na figura 1.45. Assim se pode obter circuitos equivalentes de circuitos contendo transformadores movendo impedâncias através do transformador.

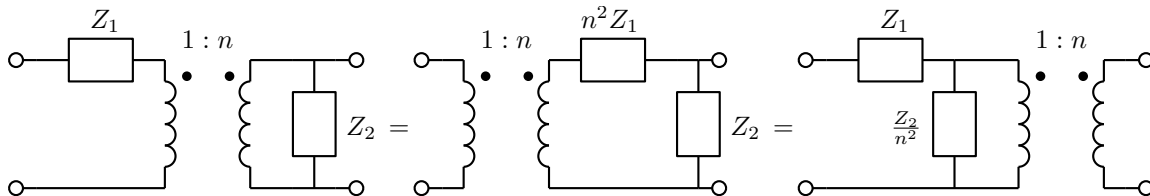


Figura 1.45: Conversão de impedância com transformador ideal.

1.7.4 O transformador real

Embora seja possível tratar o transformador real pela análise nodal básica, há alguns inconvenientes. O acoplamento não pode ser cerrado ($k = 1$), pois isto torna impossível inverter a matriz de indutâncias. Embora transformadores com acoplamento cerrado não existam na realidade, são um modelamento idealizado frequentemente utilizado. Também não é possível realizar análise em frequência zero na análise de estado permanente senoidal, ou zerar as indutâncias. O mesmo ocorre para indutores isolados. A análise nodal modificada permite analisar os indutores e transformadores, calculando as correntes neles, de forma a evitar estes inconvenientes.

As equações para um transformador com dois enrolamentos em transformada de Laplace, incluindo o efeito das correntes iniciais, são (aplicando a transformada diretamente às equações no tempo, usando a transformada da derivada):

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{ab}(0) \\ j_{cd}(0) \end{bmatrix}$$

Este sistema corresponde ao modelo da figura 1.46.

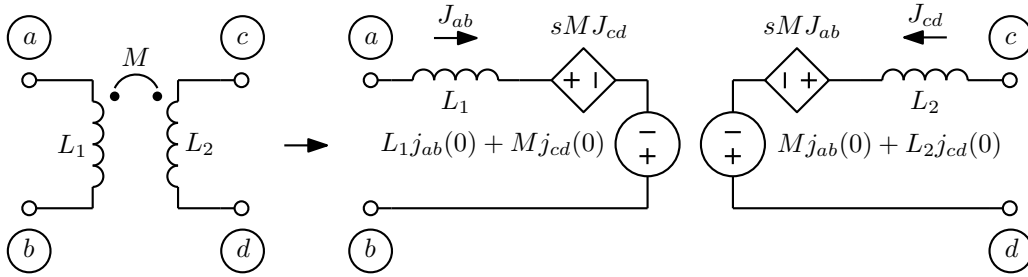


Figura 1.46: Transformador real em transformada de Laplace na análise nodal modificada.

A estampa correspondente é então da forma:

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ x \\ y \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \hline -1 & +1 & \cdot & \cdot & +sL_1 & +sM \\ \cdot & \cdot & -1 & +1 & +sM & +sL_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a(s) \\ E_b(s) \\ E_c(s) \\ E_d(s) \\ \hline J_{ab}(s) \\ J_{cd}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline +L_1j_{ab}(0) + Mj_{cd}(0) \\ +Mj_{ab}(0) + L_2j_{cd}(0) \end{bmatrix}$$

onde se pode notar que a estampa do acoplamento mútuo é separada das estampas dos dois indutores, o que é muito conveniente, pois se pode especificar acoplamentos entre os indutores independentemente, sem ter que recalculá-la na montagem do sistema.

Para análise no estado permanente senoidal, a estrutura é a mesma:

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ x \\ y \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \hline -1 & +1 & \cdot & \cdot & +j\omega L_1 & +j\omega M \\ \cdot & \cdot & -1 & +1 & +j\omega M & +j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a(j\omega) \\ E_b(j\omega) \\ E_c(j\omega) \\ E_d(j\omega) \\ \hline J_{ab}(j\omega) \\ J_{cd}(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Exemplo: Seja analisar o circuito da bobina de Tesla da figura 1.25 usando análise nodal modificada, para o caso geral de indutância mútua. O modelo correspondente é o da figura 1.47, que tem duas tensões nodais e duas correntes a calcular (equivalente Norton para o capacitor primário usado no sistema):

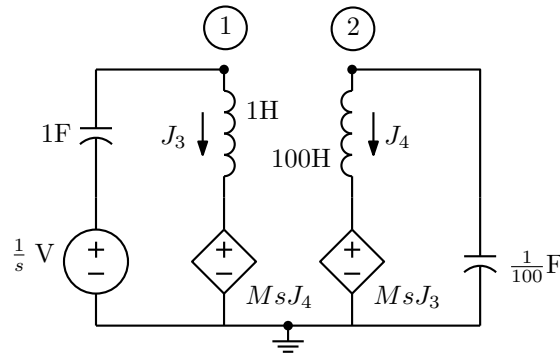


Figura 1.47: Modelo para uma bobina de Tesla usando análise nodal modificada.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} s & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{s}{100} & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & s & Ms \\ 0 & -1 & Ms & 100s \end{array} \right] \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ J_3(s) \\ J_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

É simples obter a solução pelo método de Cramer para 4 variáveis, obtendo-se resultado que se simplifica para o mesmo já visto pela análise nodal simples com uma multiplicação por $\frac{100}{100-M^2}$ dos polinômios, para $M = 6$ H:

Denominador, expandindo pela primeira coluna:

$$s \begin{vmatrix} \frac{s}{100} & 0 & 1 \\ 0 & s & Ms \\ -1 & Ms & 100s \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{s}{100} & 0 & 1 \\ -1 & Ms & 100s \end{vmatrix} = s(s^3 + s - \frac{M^2}{100}s^3) - 1(-1 - s^2) = \frac{100 - M^2}{100}s^4 + 2s^2 + 1$$

Numerador para $E_1(s)$, expandindo pela primeira coluna:

$$1 \begin{vmatrix} \frac{s}{100} & 0 & 1 \\ 0 & s & Ms \\ -1 & Ms & 100s \end{vmatrix} = 1(s^3 + s - \frac{M^2}{100}s^3) = \frac{100 - M^2}{100}s^3 + s$$

Numerador para $E_2(s)$, expandindo pela segunda coluna:

$$-1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & s & Ms \\ 0 & 6s & 100s \end{vmatrix} = -(-Ms) = Ms$$

Os quadrados das raízes do polinômio do denominador valem $-\frac{10}{10+M}$ e $-\frac{10}{10-M}$. Assim, e usando $M = k\sqrt{1 \times 100} = 10k$:

$$E_1(s) = \frac{\left(\frac{100-M^2}{100}\right) s^3 + s}{\left(\frac{100-M^2}{100}\right) \left(s^2 + \frac{10}{10+M}\right) \left(s^2 + \frac{10}{10-M}\right)} = \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + \frac{10}{10+M}} + \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + \frac{10}{10-M}} = \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + \frac{1}{1+k}} + \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + \frac{1}{1-k}}$$

$$E_2(s) = \frac{Ms}{\left(\frac{100-M^2}{100}\right) \left(s^2 + \frac{10}{10+M}\right) \left(s^2 + \frac{10}{10-M}\right)} = \frac{5s}{s^2 + \frac{10}{10+M}} - \frac{5s}{s^2 + \frac{10}{10-M}} = \frac{5s}{s^2 + \frac{1}{1+k}} - \frac{5s}{s^2 + \frac{1}{1-k}}$$

$$e1(t) = \frac{1}{2} \cos \sqrt{\frac{1}{1+k}} t + \frac{1}{2} \cos \sqrt{\frac{1}{1-k}} t$$

$$e2(t) = 5 \cos \sqrt{\frac{1}{1+k}} t - 5 \cos \sqrt{\frac{1}{1-k}} t$$

Colocando a razão entre as duas frequências como b/a , vem a relação já mencionada para k , que é válida no caso geral também:

$$\frac{\frac{1}{1-k}}{\frac{1}{1+k}} = \frac{b^2}{a^2} \quad \therefore \quad k = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$$

A operação desejada ocorre exatamente quando as duas frequências estão em uma razão de números inteiros diferindo de 1. A figura 1.48 mostra o caso de razão 6:7, $k = \frac{13}{85} \approx 0.153$. A transferência completa de energia ocorre em $b/2 = 3.5$ ciclos, ou $7\pi \approx 22$ s.

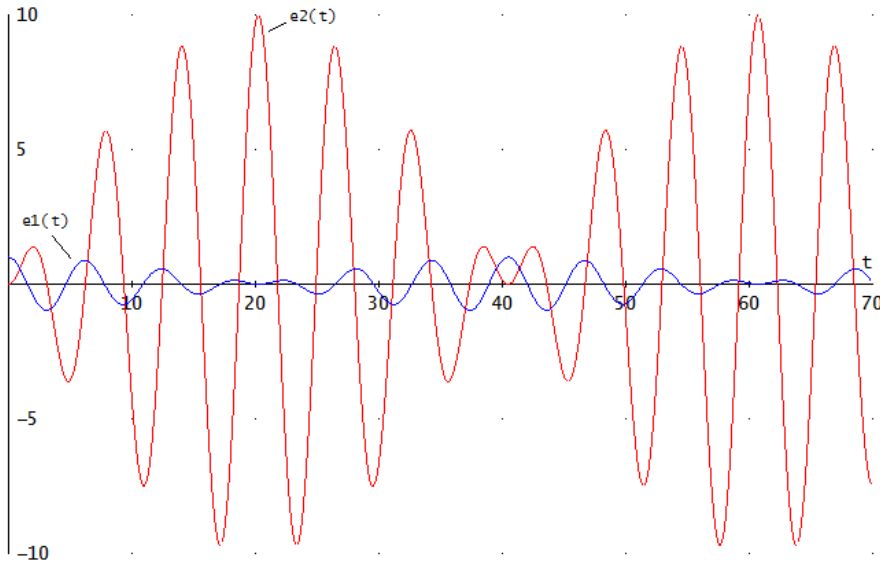


Figura 1.48: Formas de onda para uma bobina de Tesla no modo 6:7.

É possível obter um modelo para o transformador de dois enrolamentos com apenas uma corrente calculada. O modelo a usar é o da figura 1.49. É simples verificar que o modelo satisfaz as equações do transformador real. L_1 é a indutância vista no lado esquerdo quando o lado direito está em aberto. A indutância vista pelo lado direito com o lado esquerdo em curto-circuito vale $\frac{1}{\Gamma_{22}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1} = L_2(1-k^2)$. O ganho de tensão da esquerda para a direita vale $\frac{M}{L_1} = k \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = n$. De um lado aparece a “indutância de

magnetização”, que é a própria L_1 . Do outro lado aparece uma “indutância de dispersão” proporcional a L_2 e que desaparece quando $k = 1$. O transformador ideal no centro tem a relação de espiras multiplicada por k .

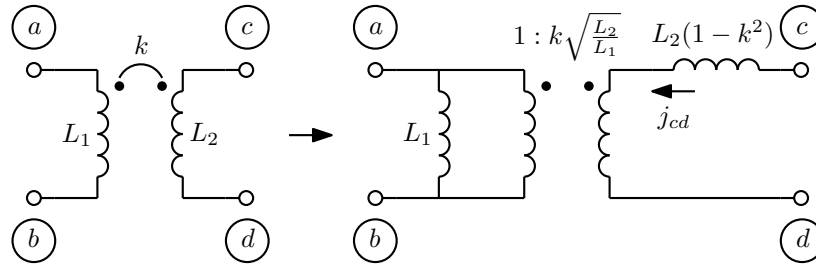


Figura 1.49: Transformador real modelado com um transformador ideal e indutâncias de magnetização e de dispersão.

A estampa que descreve este modelo é uma modificação da estampa do transformador ideal, no caso para análise no estado permanente senoidal. Para análise em transformada de Laplace, as condições iniciais seriam colocadas como na análise nodal normal ou como na análise nodal modificada, mas para se ter j_{cd} calculada corretamente, e como a corrente no lado esquerdo não é calculada, é mais conveniente a forma na segunda equação abaixo³³:

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ x \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cc} \frac{1}{j\omega L_1} & -\frac{1}{j\omega L_1} & \cdot & \cdot & -n & \\ -\frac{1}{j\omega L_1} & \frac{1}{j\omega L_1} & \cdot & \cdot & +n & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \\ \hline +n & -n & -1 & +1 & j\omega(1-k^2)L_2 & \end{array} \right] \begin{array}{c} E_a(j\omega) \\ E_b(j\omega) \\ E_c(j\omega) \\ E_d(j\omega) \\ \hline J_{cd}(j\omega) \end{array} = \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline \cdot \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ x \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cc} \frac{1}{sL_1} & -\frac{1}{sL_1} & \cdot & \cdot & -n & \\ -\frac{1}{sL_1} & \frac{1}{sL_1} & \cdot & \cdot & +n & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \\ \hline +n & -n & -1 & +1 & s(1-k^2)L_2 & \end{array} \right] \begin{array}{c} E_a(s) \\ E_b(s) \\ E_c(s) \\ E_d(s) \\ \hline J_{cd}(s) \end{array} = \begin{array}{c} -\frac{j_{ab}(0)+nj_{cd}(0)}{s} \\ +\frac{j_{ab}(0)+nj_{cd}(0)}{s} \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline +L_2(1-k^2)j_{cd}(0) \end{array}$$

Exemplo: Seja analisar o circuito da figura 1.50 para calcular a corrente no indutor e a tensão no capacitor, com condições iniciais nulas. Usando o modelo da figura 1.43 com o transformador invertido, pode-se usar uma análise nodal modificada aproveitando que a corrente é a mesma nos três ramos do lado esquerdo:

$$\left[\begin{array}{c|c} sC & -\frac{1}{n} \\ \hline -\frac{1}{n} & sL \end{array} \right] \begin{array}{c} E_1(s) \\ J_2(s) \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ \frac{V}{s} \end{array}$$

³³Obtida pelo deslocamento da fonte de corrente da condição inicial $j_{cd}(0)$ (figura 1.22) para dentro do modelo (figura 1.49), ficando em paralelo com a indutância de dispersão na direita, onde é feito um equivalente Thévenin, e em paralelo com a indutância de magnetização na esquerda, transformada pela relação de espiras n .

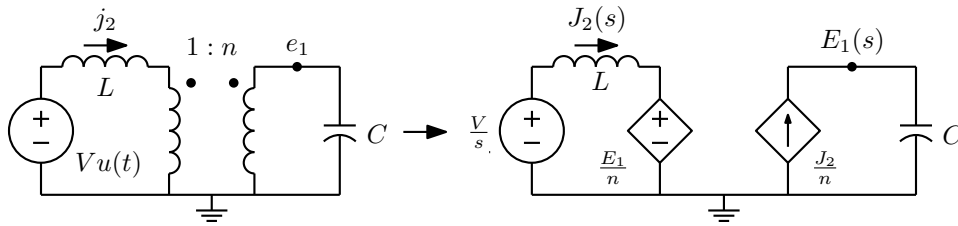


Figura 1.50: Circuito com transformador ideal.

A solução é facilmente obtida pelo método de Cramer:

$$E_1(s) = \frac{\frac{V}{ns}}{s^2 LC + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{V}{nLC}}{s(s^2 + \frac{1}{n^2 LC})} = nV \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \frac{1}{n^2 LC}} \right)$$

$$e_1(t) = nV \left(1 - \cos \frac{1}{n\sqrt{LC}} t \right)$$

$$J_2(s) = \frac{CV}{s^2 LC + \frac{1}{n^2}} = \frac{nV \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{1}{n\sqrt{LC}}}{s^2 + \frac{1}{n^2 LC}}$$

$$j_2(t) = nV \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \frac{1}{n\sqrt{LC}} t$$

Estes valores correspondem ao que se obtém da análise de um circuito LC série ligado à fonte de tensão, com o capacitor transportado para o lado esquerdo do transformador ideal, com sua impedância dividida por n^2 , e com e_1 sendo a tensão neste capacitor multiplicada por n . Observe-se os resultados irrealísticos, na corrente senoidal no indutor e na tensão com nível contínuo no capacitor. Uma análise com transformador real resulta, adicionalmente, em uma rampa somada a j_2 . A tensão e_1 continua tendo uma componente contínua devida à indutância mútua e à corrente j_2 crescendo continuamente.

Um outro modelo para transformador, no caso em que existe um terminal comum entre os indutores acoplados, é o da figura 1.51. O modelo tem três indutores não acoplados e um nó extra³⁴ Este modelo é útil para verificação de modelos para transformador, e para a obtenção de circuitos equivalentes. Por exemplo, um auto-transformador pode ser convertido em um transformador com dois indutores na forma mostrada na figura 1.52.

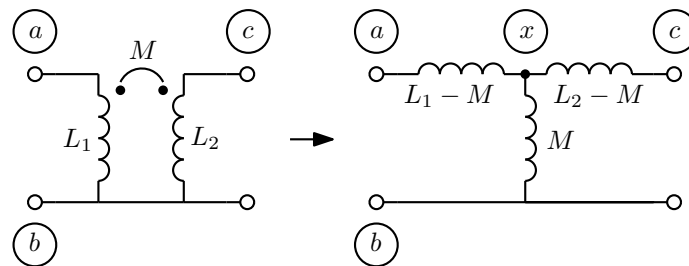


Figura 1.51: Modelo “T” para um transformador com terminal comum entre os indutores.

³⁴é possível eliminar o nó extra com uma transformação Δ -estrela, obtendo-se um modelo “ π ”. Também é possível inserir um transformador ideal na rede, eliminando o nó comum.

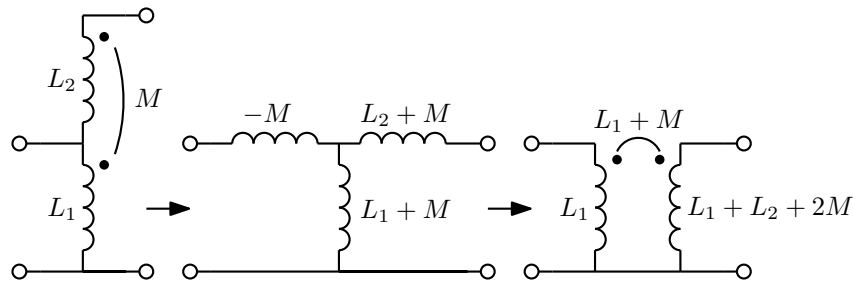


Figura 1.52: Usando o modelo “T” para obter um equivalente de um autotransformador.

Um outro modelo é o da figura 1.53. Ele tem duas indutâncias de dispersão e um transformador ideal com a relação de espiras ideal. É simples verificar que ele também obedece as equações do transformador real: As indutâncias de entrada e de saída com o outro lado em aberto são $L_1(1 - k) + kL_1 = L_1$ e $L_2(1 - k) + kL_1 \frac{L_2}{L_1} = L_2$, e as transimpedâncias valem $skL_1 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = sM$.

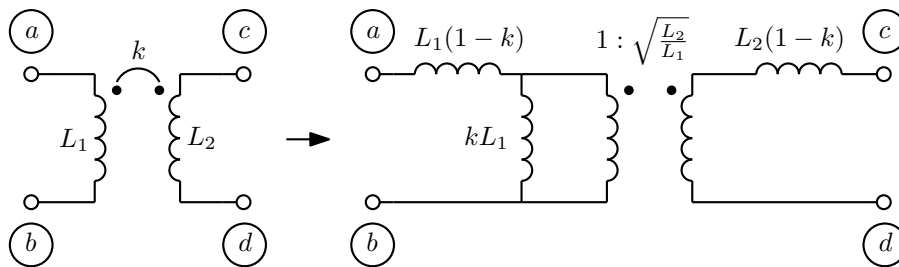


Figura 1.53: Modelo com duas indutâncias de dispersão e transformador ideal para o transformador.

1.7.5 O amplificador operacional ideal

O amplificador operacional ideal é um elemento que pode ser considerado um limite de qualquer das quatro frentes controladas, quando o fator de ganho se torna infinito. Considerando que ele é sempre usado com realimentação negativa, e a tensão e corrente da saída são finitas, a tensão e a corrente de entrada são muito baixas, idealmente nulas. O modelo para o amplificador operacional é um par de dois elementos especiais chamados “nullator” e “norator” (figura 1.54). O “nullator” tem tensão nula e corrente nula. O “norator” tem tensão e corrente indeterminadas. Estes elementos são necessariamente usados aos pares, e nessa condição é possível resolver o circuito. A solução somente é correta se o circuito estiver operando com realimentação negativa. Caso a realimentação seja positiva, o ponto de equilíbrio encontrado é instável. Se não existir realimentação, não é possível resolver o circuito.

$$\begin{aligned} v_{ab} &=? & j_{ab} &=? \\ v_{cd} &=0 & j_{cd} &=0 \end{aligned}$$

Em circuitos normais, o nó b é a terra, já que amplificadores operacionais com saída suspensa não são usuais. Mas o modelo admite saída suspensa, e pode ser usado em modelamento de outros dispositivos. A resolução de circuitos com amplificador operacional pode ser feita assumindo-se as condições $e_c = e_d$ e $j_{cd} = 0$. Na análise nodal modificada, isto pode ser feito acrescentando-se como variável a corrente de

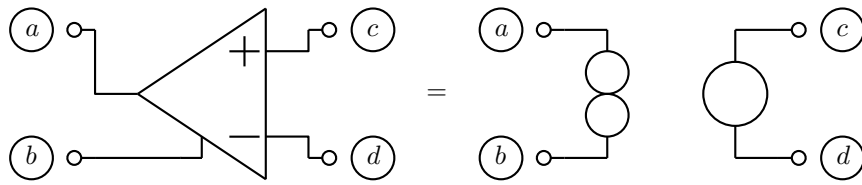


Figura 1.54: Modelo “nullator-norator” para o amplificador operacional ideal.

saída do amplificador, j_{ab} , e introduzindo-se a equação do ramo de entrada, $e_c = e_d$. Há um modelo e uma estampa correspondentes a isso, mostrado na figura 1.55. É uma cascata de dois transdutores.

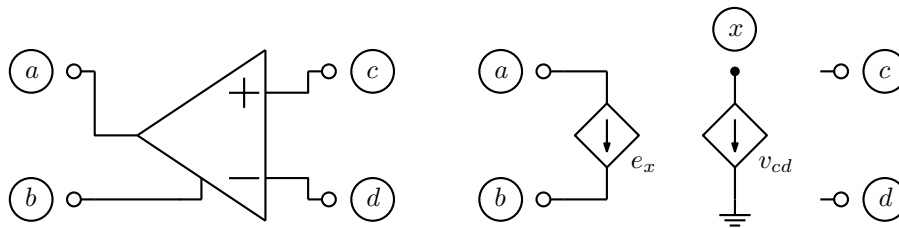


Figura 1.55: Modelo com transdutores para o amplificador operacional ideal. $e_x = j_{ab}$.

$$\begin{array}{c}
 a \\
 b \\
 c \\
 d \\
 x
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & +1 & -1 & \cdot
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 e_a \\
 e_b \\
 e_c \\
 e_d \\
 j_{ab}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot
 \end{bmatrix}$$

O par ± 1 nas equações a e b é a estampa do “norator”. O par ± 1 na equação x é a estampa do “nullator”. Note-se que se na estampa do amplificador de tensão a equação do ramo de saída é dividida por A e se faz $A = \infty$ a estampa se reduz a esta. Operações nas estampas das demais fontes controladas podem também ser feitas com o mesmo resultado. O modelo e a estampa mostram fatos curiosos: Como não há conexão entre os ramos de entrada e de saída, em um circuito com vários amplificadores operacionais é possível permutar as saídas e as entradas deles, mantendo a mesma solução para o circuito. Nada é dito também sobre a polaridade da entrada ou da saída. Para que as soluções obtidas com essas variações que podem ser obtidas com essas propriedades sejam válidas, é necessário que a realimentação seja negativa em todos os amplificadores. Do contrário a solução obtida é uma situação de equilíbrio instável do circuito.

1.7.5.1 O “fixator”³⁵

O modelo “nullator-norator” força tensão e corrente nulas sobre o “nullator”. Uma versão generalizada do “nullator” é o “fixator” [10], um ramo com corrente e tensão especificadas:

$$v = v_f; \quad j = j_f$$

³⁵Material opcional

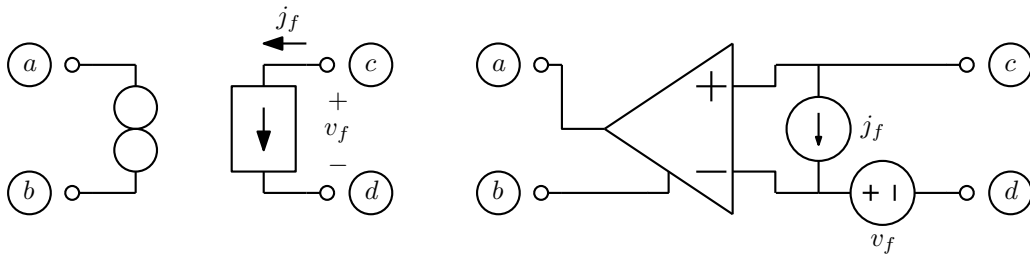


Figura 1.56: Par “fixator-norator” e seu modelo com amplificador operacional ideal.

Este elemento deve ser tratado da mesma forma que o “nullator”, sempre acompanhado de um “norator” em algum ponto do circuito. A estampa do par “fixator-norator” é similar à do amplificador operacional ideal:

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ x \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & +1 & -1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \\ j_{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ -j_f \\ +j_f \\ +v_f \end{bmatrix}$$

Um exemplo de aplicação do “fixator” é em um modelo para um transistor bipolar ideal em um circuito realimentado. O modelo tem um “fixator” com $v_j = 0.6$ V e $j_f = 0$ A entre base e emissor e um “norator” entre coletor e emissor.

Exemplo: Seja o amplificador realimentado da figura 1.57. Ignorando as correntes de base dos transistores, considerando tensões v_{be} fixas de 0.6 V, e considerando alto ganho de corrente h_{fe} nos transistores, resulta o modelo mostrado.

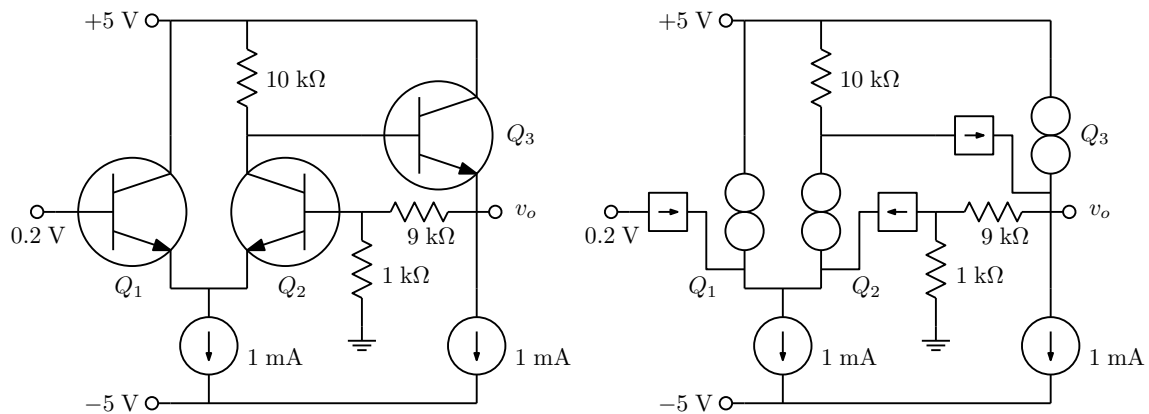


Figura 1.57: Amplificador realimentado e seu modelo com “fixators”, todos com $v_f = 0.6$ V e corrente nula.

Basta inspecionar o circuito para determinar as tensões nodais e as correntes nos transistores, todas determinadas pelas condições sobre os “fixators”. Resulta $v_o = 2$ V, pois há 0.2 V na base de Q_2 , $i_c(Q_3) = 1 + 2/10 = 1.2$ mA, $i_c(Q_2) = (5 - 2 - 0.6)/10 = 0.24$ mA, e $i_c(Q_1) = 1 - 0.24 = 0.76$ mA.

Exemplo: O “fixador” também pode ser usado para calcular valores necessários para componentes para que condições sejam satisfeitas. Seja o circuito da figura 1.58. Deseja-se encontrar quanto tem que valer R_x para que a tensão sobre $R_y = 1\ \Omega$ seja de 1 V. Colocando um “fixador” com 1 V e 1 A no lugar de R_y e um “norator” no lugar de R_x , a solução do circuito dá a tensão e a corrente sobre o “norator” como v_x e j_x . R_x vale então $R_x = \frac{v_x}{j_x}$. Para os valores da figura, resulta $v_x = 2\ \text{V}$, $j_x = 0.5\ \text{A}$, e então $R_x = 4\ \Omega$. O sistema resolvido foi:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 0.5 & 0 & -0.5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 & -1 \\ -0.5 & -0.5 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ j_v \\ j_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

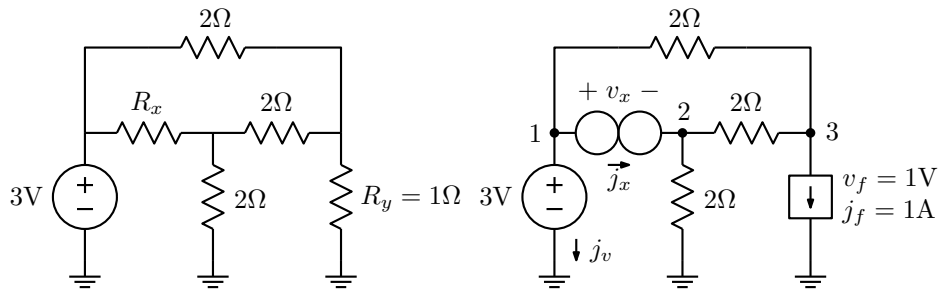


Figura 1.58: “Fixador” usado para calcular o valor de R_y para 1 V sobre R_y .

No exemplo, se forem forçados valores de tensão entre 6/7 V e 1.5 V resultam valores positivos de R_x . Valores maiores que 1.5 V levam a R_x negativo entre 0 Ω e $-8/7\ \Omega$. Valores menores que 6/7 V levam a valores negativos menores que $-8/7\ \Omega$.

1.7.6 Tratamento simplificado do amplificador operacional

É possível eliminar os amplificadores operacionais do sistema de equações de forma bem simples: Se as equações dos nós de saída forem somadas, a corrente de saída é eliminada do sistema. Se as colunas c e d da matriz de condutância dos nós forem somadas, isto equivale a dizer que $e_c = e_d$. Estas operações podem ser realizadas sobre o sistema montado ignorando-se o amplificador, ou podem ser mapeadas em dois vetores, que indicam onde vão ficar as linhas e colunas do sistema de equações correspondentes aos nós do circuito, vetores estes montados com um simples pré-processamento. Uma “estampa” para o amplificador operacional tratado desta forma pode ser então:

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ \left\{ \begin{array}{l} e_c \\ e_d \end{array} \right\} \\ e_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

As chaves indicam linhas e colunas a somar, e variáveis que são reduzidas a uma só por serem iguais. As colunas em $[G_n]$ correspondem às variáveis em \vec{e} . Se uma das linhas ou colunas for a do nó de terra, 0, simplesmente elimina-se a outra.

O pré-processamento a fazer consiste em:

- a) Preparar dois vetores \vec{L} e \vec{C} tais que $L_i = i$ e $C_i = i$, $i = 0..n$. n é o número de nós, não contando o de terra.
- b) Ler da descrição do circuito os amplificadores operacionais. Ordenar os nós de saída a e b e de entrada c e d , de forma a ter $b > a$ e $d > c$. Naturalmente, é proibido ter $a = b$ ou $c = d$.
- c) Realizar o processamento, para cada amplificador operacional, após lembrar $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$ e $d_0 = d$:

Para i variando de 0 a n :

Se $L_i = b_0$, $L_i \leftarrow a_0$

Se $L_i > b_0$, $L_i \leftarrow L_i - 1$

Se $C_i = d_0$, $C_i \leftarrow c_0$

Se $C_i > d_0$, $C_i \leftarrow C_i - 1$

Após o processamento de todos os amplificadores, o sistema é então montado por estampas normalmente, sendo que a estampa que iria para $[G_n]_{xy}$ passa a ir para $[G_n]_{L_x C_y}$, e a estampa que iria para i_{sx} passa a ir para i_{sL_x} . Isto gera diretamente o sistema com todas as somas feitas. O sistema é então resolvido com n -número de amp. ops. equações, e as tensões nos nós originais são encontradas como $e_i = e_{C_i}$.

Exemplo: Seja achar a impedância de entrada do circuito da figura 1.59 em transformada de Laplace:

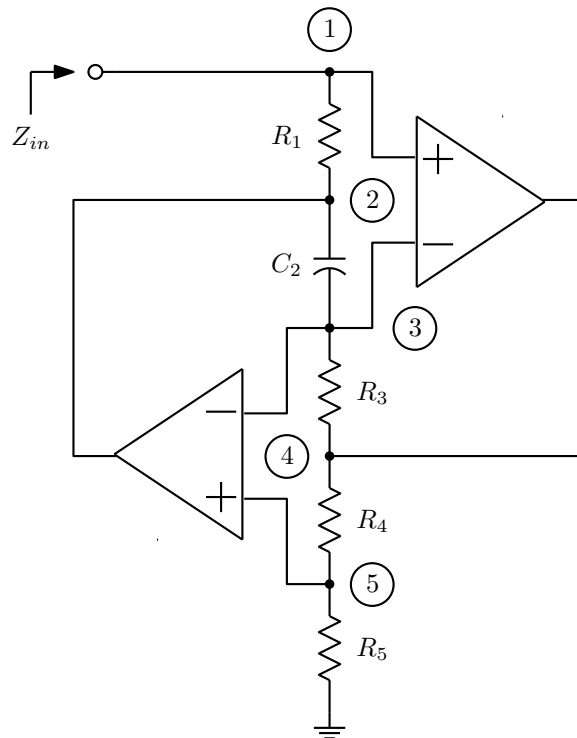


Figura 1.59: Indutor simulado com amp. ops.

Colocando uma fonte de corrente I entre a terra e o nó 1, $Zin(s) = E_1(s)/I$. O sistema sem os amplificadores é:

$$\leftarrow \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 0 & 0 \\ -G_2 & G_1 + sC_2 & -sC_2 & 0 & 0 \\ 0 & -sC_2 & G_3 + sC_2 & -G_3 & 0 \\ 0 & 0 & -G_3 & G_3 + G_4 & -G_4 \\ 0 & 0 & 0 & -G_4 & G_4 + G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ E_3(s) \\ E_4(s) \\ E_5(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As setas e chaves indicam as operações a fazer: Eliminar as equações 2 e 4 (somar com a equação do nó de terra) e somar as colunas 1, 3 e 5. Resulta o sistema:

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ G_3 + sC_2 & -sC_2 & -G_3 \\ G_4 + G_5 & 0 & -G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1,3,5}(s) \\ E_2(s) \\ E_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução é facilmente obtida pelo método de Cramer:

$$Z_{in} = \frac{E_{1,3,5}(s)}{I} = \frac{sC_2G_4}{sC_2G_1G_4 + (G_4 + G_5)G_1G_3 - (G_3 + sC_2)G_1G_4} = \frac{sC_2G_4}{G_1G_3G_5} = \frac{sC_2R_1R_3R_5}{R_4}$$

O circuito se comporta como um indutor aterrado. Note que este circuito possui dois amplificadores, e que, em princípio, as saídas deles podem ser trocadas entre si, com Z_{in} inalterada. As polaridades das entradas tem que ser ajustadas de acordo com o que seja ligado ao circuito para que a estabilidade seja mantida, considerando que os amplificadores tem uma resposta em frequência não constante. Na forma mostrada, ele é sempre estável.

1.8 Análise nodal com modelos baseados em amp. operacionais

Considerando então que amplificadores operacionais são simples de se tratar e que reduzem o tamanho do sistema de equações, é interessante encontrar modelos para os elementos especiais na análise nodal usando amplificadores operacionais. Estes modelos são vistos na figura 1.60. Note a relação com os modelos desenvolvidos para a análise nodal modificada da figura 1.40 [24]. Um dos transdutores de cada girador é substituído por um amplificador operacional. Para gerar uma fonte de tensão, o amplificador fica no lado do girador que gera uma tensão.

Estampas correspondentes podem então ser obtidas. Nas estampas abaixo, apenas termos não nulos, e que não são eliminadas na compressão do sistema são mostrados. As colunas de $[G_n]$ correspondem às incógnitas. Por exemplo, no tratamento da fonte de tensão não é mostrada a coluna x , pois ela é eliminada quando se faz $e_x = 0$.

$$\text{Fonte de tensão: } \begin{cases} a \\ b \\ x \end{cases} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ -V \end{bmatrix}$$

$$\text{Amp. de tensão: } \begin{cases} a \\ b \\ c \\ d \\ x \end{cases} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & +1 & +A & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

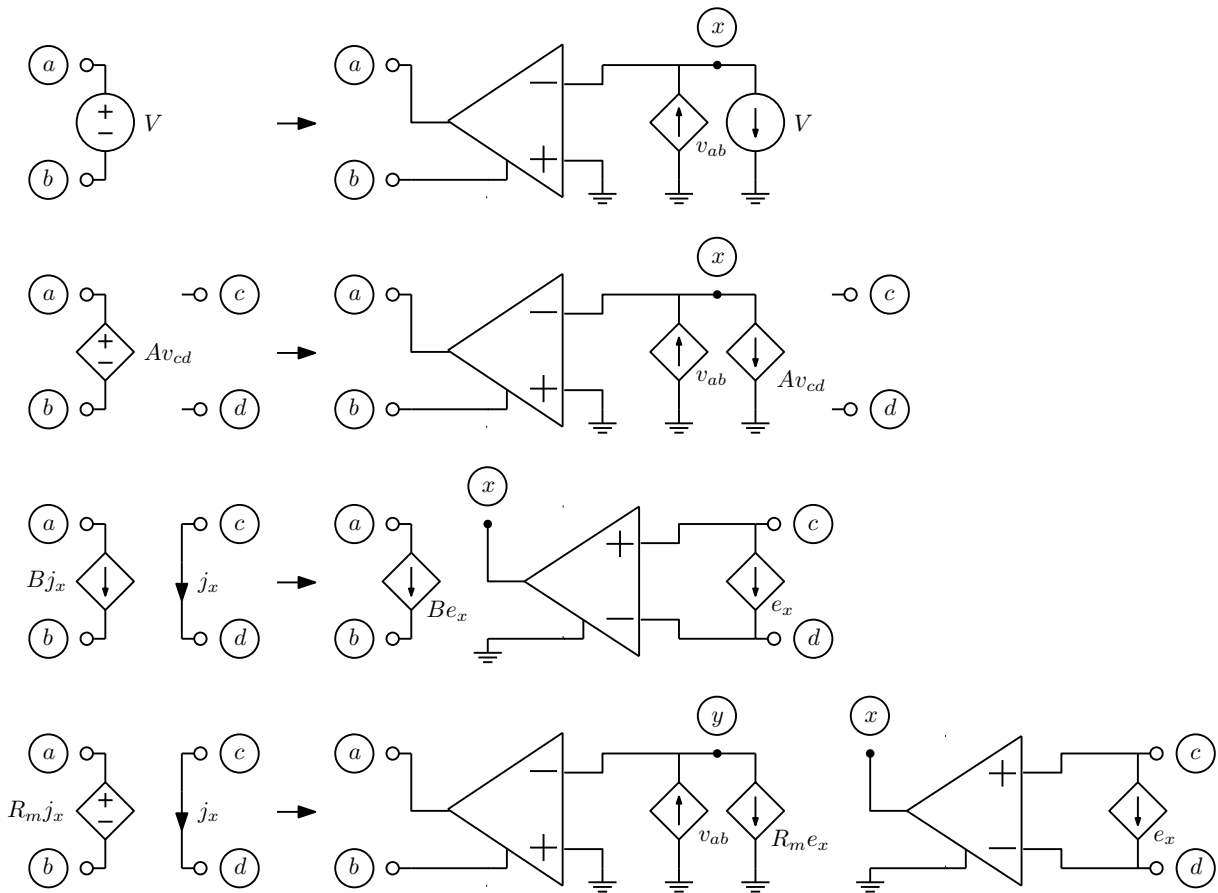


Figura 1.60: Modelos usando amplificadores operacionais.

$$\text{Amp. de corrente: } \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +B \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -B \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \\ e_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$\text{Transresistor: } \begin{cases} a \\ b \\ c \\ d \\ x \end{cases} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & +1 & \cdot & \cdot & +R_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \\ e_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

O modelo do transresistor pode ser simplificado. Pode-se trocar as saídas dos dois amplificadores uma com a outra, obtendo o circuito equivalente da figura 1.61. O amplificador da esquerda faz $v_{ab} = R_m e_x$. Pode-se eliminar todo o circuito associado a ele e substituir diretamente $e_x = \frac{v_{ab}}{R_m}$ no circuito restante, obtendo o circuito da figura 1.62, que pode ser usado se $R_m \neq 0$. Pode-se também apenas observar que o bloco de entrada do modelo do transresistor (usado também no amp. de corrente) já é um transresistor.

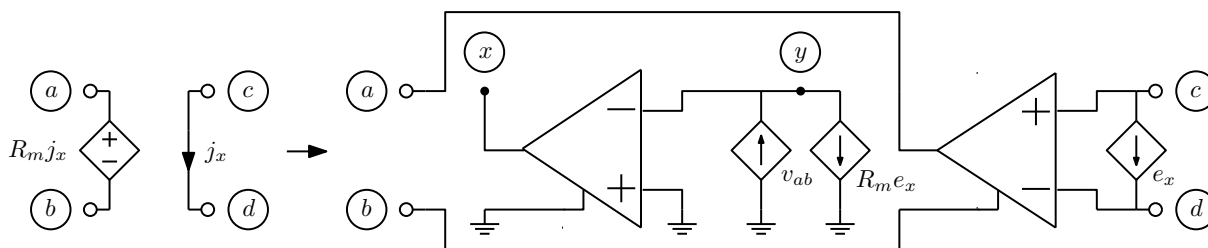


Figura 1.61: Modelo alternativo para o transresistor, trocando-se as saídas dos amplificadores uma com a outra.

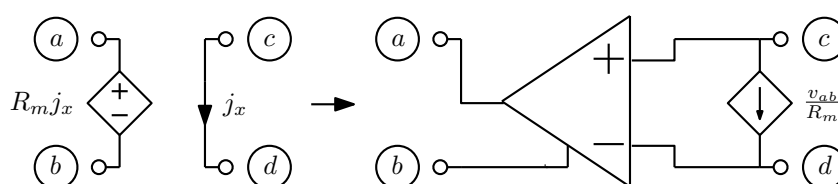


Figura 1.62: Modelo simplificado para o transresistor.

E sua estampa, que reduz o tamanho do sistema de equações em uma equação, é:

$$\begin{cases} a \\ b \\ c \\ d \end{cases} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ +\frac{1}{R_m} & -\frac{1}{R_m} & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{R_m} & +\frac{1}{R_m} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Exemplo: Seja o circuito da figura 1.63.

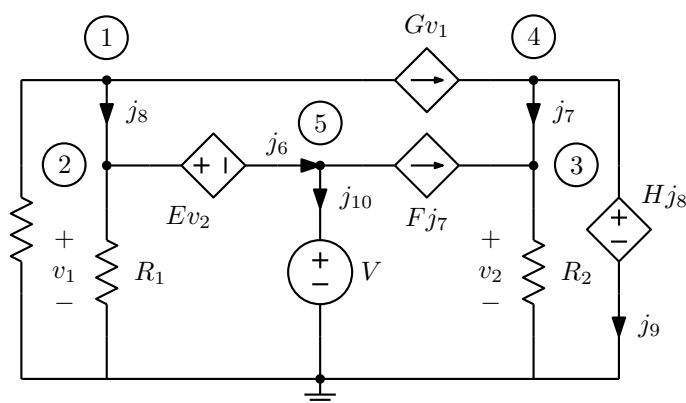


Figura 1.63: Circuito para análise com modelos com amp. operacional.

Analisado com análise nodal modificada normal, teriam que ser incluídas 5 correntes, e o sistema resultante seria:

$$\begin{bmatrix} g_3 + G & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & g_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & g_2 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 - F & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -G & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & F & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \hline \cdot & -1 & E & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & H & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ j_6 \\ j_7 \\ j_8 \\ j_9 \\ j_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -V \end{bmatrix}$$

Usando a análise baseada em modelos com amplificador operacional, resulta o sistema, montado de acordo com as estampas acima, que já tem as eliminações triviais feitas:

$$\begin{matrix} e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ e_3 \\ \leftarrow e_4 \\ \leftarrow e_5 \\ j_6 \\ j_9 \\ j_{10} \end{matrix} \begin{bmatrix} g_3 + G & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & g_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & g_2 & \cdot & \cdot & -1 - F & \cdot & \cdot \\ -G & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & F & \cdot \\ \hline \cdot & -1 & E & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & H \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ j_6 \\ j_7 \\ j_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -V \end{bmatrix}$$

O sistema final, após as três eliminações de equações e as duas condensações de variáveis indicadas, é:

$$\begin{matrix} e_1 \\ e_3 \\ j_6 \\ j_9 \\ j_{10} \end{matrix} \begin{bmatrix} g_3 + G & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & g_2 & \cdot & -1 - F & \cdot & \cdot \\ \hline -1 & E & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & H & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1,2} \\ e_{3,4} \\ e_5 \\ j_7 \\ j_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -V \end{bmatrix}$$

Este procedimento é um tanto complexo para uma análise manual, embora gere sistemas bem menores que a análise nodal modificada. É de simples implementação em um programa de computador, entretanto.

Exemplo: Em alguns casos o uso dos modelos com amplificador operacional facilita a análise manual. Considere-se o circuito da figura 1.64, que tem três nós e um transresistor. Uma análise nodal modificada gera 5 equações, com as três tensões nodais e as duas correntes nos ramos do transresistor como incógnitas. O deslocamento dos dois ramos do transresistor pode ser feito, mas é um tanto complicado. Seja então a análise feita modelando o transresistor na forma que reduz o tamanho do sistema.

Substituindo o transresistor por um modelo com amplificador operacional, resulta o circuito da figura 1.65. O sistema nodal sem considerar o amplificador operacional é então:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_m} & -\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_m} \\ 0 & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_m} & -\frac{1}{R_m} \\ -\frac{1}{R_3} & 0 & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O amplificador operacional soma as equações 2 e 3 e soma as colunas 1 e 2 da matriz do sistema, fazendo $e_1 = e_2$. Resulta:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_m} & -\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_m} \\ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_m} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1,2} \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

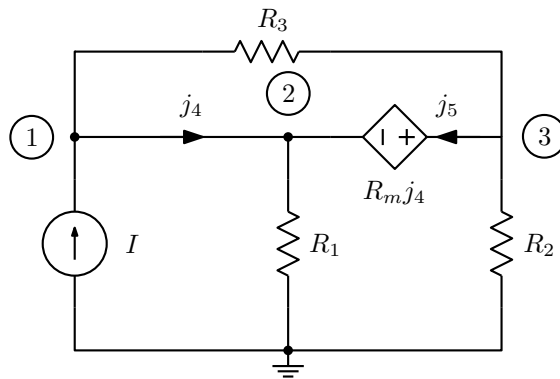


Figura 1.64: Circuito contendo um transresistor.

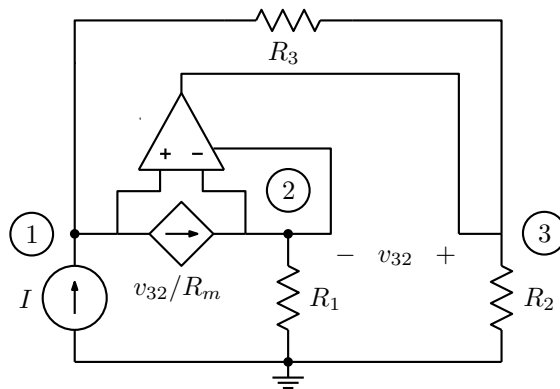


Figura 1.65: Transresistor modelado com amplificador operacional e transcondutor.

A solução é:

$$e_{1,2} = \frac{I \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_m} \right)}{\frac{1}{R_2 R_3} + \frac{1}{R_1 R_3} - \frac{1}{R_2 R_m} - \frac{1}{R_1 R_m}}$$

$$e_3 = \frac{-I \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_m} \right)}{\frac{1}{R_2 R_3} + \frac{1}{R_1 R_3} - \frac{1}{R_2 R_m} - \frac{1}{R_1 R_m}}$$

Com isto, já se tem como analisar qualquer circuito linear invariante no tempo³⁶. Resta a solução de circuitos contendo elementos não lineares, e métodos de análise transiente usando integração numérica no tempo, o que permitirá a análise de circuitos gerais não lineares e variantes no tempo.

³⁶E também circuitos não lineares e variantes no tempo com modelamento linear por partes.

1.9 Análise nodal de circuitos resistivos não lineares

Muitos dispositivos usados na eletrônica podem ser modelados como elementos não lineares, como diodos, transistores, etc. Os dois elementos básicos seriam o resistor não linear e o transcondutor não linear (figura 1.66).

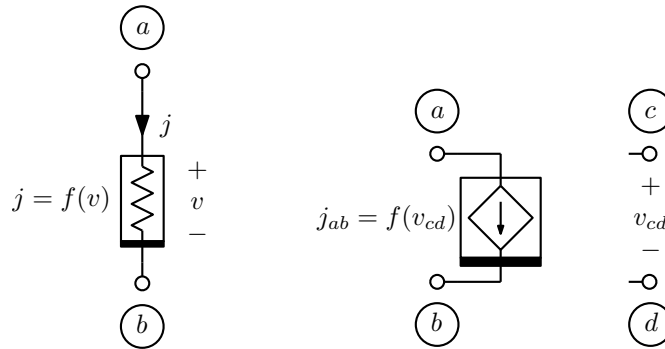


Figura 1.66: Resistor e transcondutor não lineares.

Um sistema nodal não linear pode ser escrito seguindo-se a mesma ideia de para cada nó do circuito se escrever uma equação:

$$\sum \text{correntes saindo do nó} = 0$$

Resulta um sistema de equações não lineares $\vec{F}(\vec{e}) = 0$, que não pode ser colocado em forma matricial. Em raros casos, é possível uma solução algébrica pelo procedimento usual de isolar uma incógnita em uma equação e substituir nas demais, passando a seguir para outra incógnita, até que reste apenas uma equação em uma incógnita. O problema é que estas substituições e a solução final podem envolver raízes múltiplas de equações, nem sempre solúveis analiticamente, tornando o procedimento muito complexo. Fica logo evidente que podem existir múltiplas soluções, e que as soluções podem ser complexas. Soluções complexas são não físicas. Se um circuito tiver apenas soluções complexas, ele na verdade é fisicamente impossível e insolúvel. Erros de modelamento podem levar a casos assim.

Exemplo: Seja o circuito não linear da figura 1.67. As equações nodais para ele tem a forma:

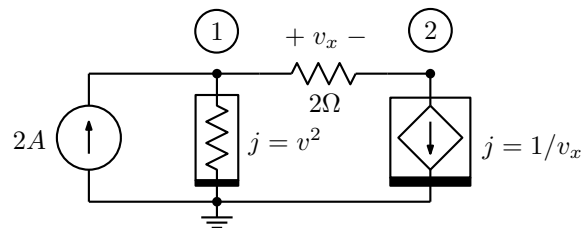


Figura 1.67: Circuito não linear resistivo.

- 1) $\frac{e_1 - e_2}{2} + e_1^2 = 2$
- 2) $\frac{e_2 - e_1}{2} + \frac{1}{e_1 - e_2} = 0$

Resolvendo:

$$-\frac{(e_1 - e_2)^2}{2} + 1 = 0 \therefore e_1 - e_2 = \pm\sqrt{2}$$

$$\frac{\pm\sqrt{2}}{2} + e_1^2 = 2 \therefore e_1 = \pm\sqrt{2 \mp \frac{\sqrt{2}}{2}} \quad e_2 = e_1 \mp \sqrt{2} = \pm\sqrt{2 \mp \frac{\sqrt{2}}{2}} \mp \sqrt{2}$$

São então quatro soluções reais, pois o sinal de $\mp\sqrt{2}$ é o mesmo para um mesmo par e_1 e e_2 . Os quatro pontos, juntamente com as duas curvas correspondentes às equações, que definem uma parábola e duas retas paralelas, são mostrados na figura 1.68.

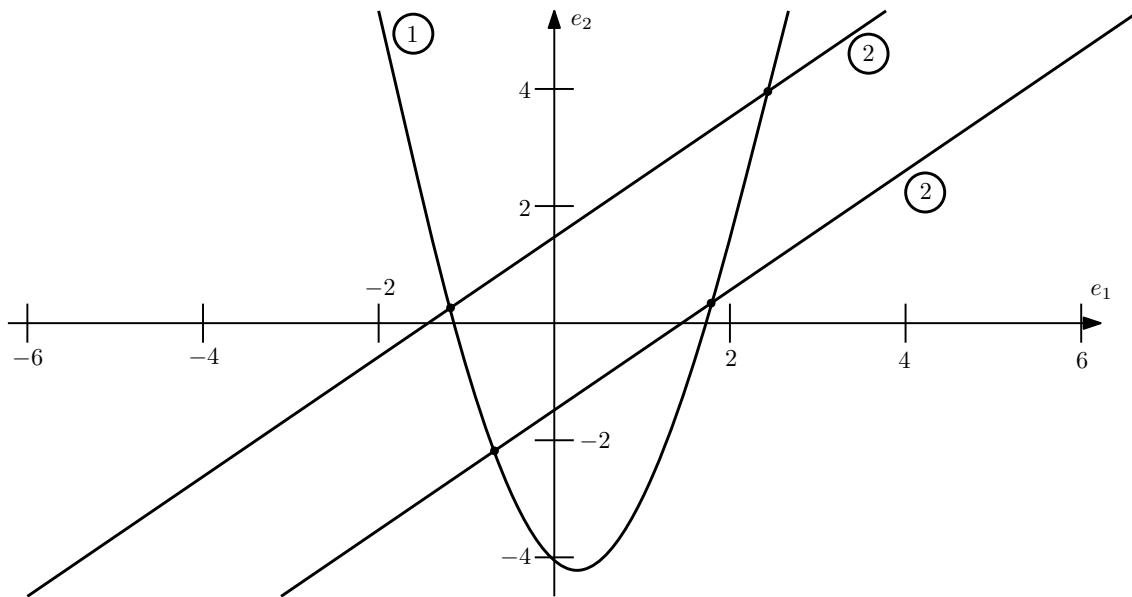


Figura 1.68: Curvas das duas equações e os quatro pontos de solução.

Um sistema não linear pode ser resolvido numericamente de forma sistemática pelo método de Newton-Raphson, na versão multidimensional. Na versão unidimensional, o método de Newton-Raphson³⁷ resolve a equação $f(x) = 0$ linearizando a equação em torno da aproximação atual da solução e achando uma nova solução considerando a curva linearizada (figura 1.69).

O processo é repetido até que $x_{n+1} \approx x_n$, dentro da tolerância requerida. Note que a nova solução é a solução da equação abaixo, o que corresponde a achar onde a reta que lineariza a função original passa por zero:

$$f(x_n) - f'(x_n)x_n + f'(x_n)x_{n+1} = 0$$

No caso multidimensional, esta equação toma a forma:

$$\vec{F}(\vec{x}_n) - \left[J \left(\vec{F}(\vec{x}_n) \right) \right] \vec{x}_n + \left[J \left(\vec{F}(\vec{x}_n) \right) \right] \vec{x}_{n+1} = 0$$

³⁷O método também usualmente citado como “método de Newton”, foi descrito por Isaac Newton em 1669-1671 em problemas relacionados com polinômios, mas não na forma iterativa. A iteração foi introduzida por Joseph Raphson em 1690. Casos específicos do método, como o cálculo da raiz quadrada de y resolvendo $x^2 - y = 0$, o “método babilônico”, são conhecidos desde a antiguidade.

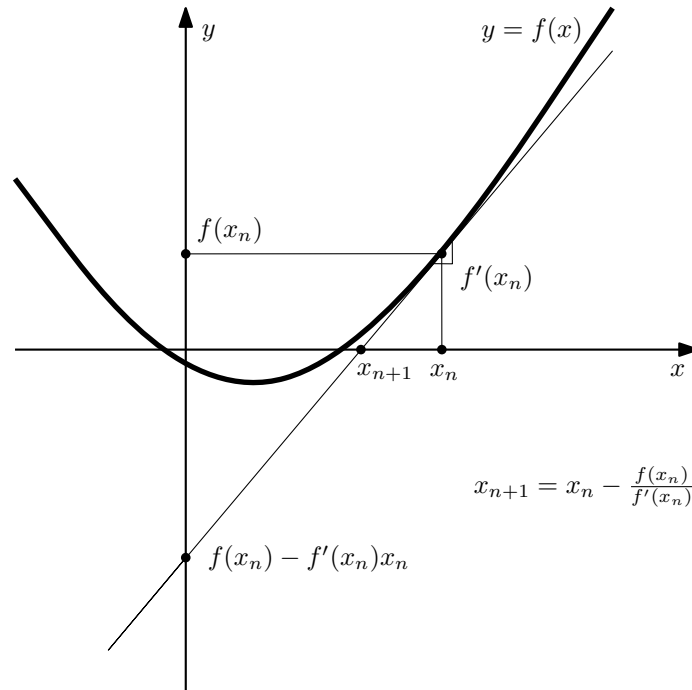


Figura 1.69: Método de Newton-Raphson unidimensional.

onde $\left[J \left(\vec{F}(\vec{x}_n) \right) \right]$ é “matriz Jacobiana”³⁸ do sistema de equações não lineares, na aproximação atual:

$$\left[J \left(\vec{F}(\vec{x}_n) \right) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_n) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_n) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}_n) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}_n) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{x}_n) & \cdots & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x}_n) \end{bmatrix}$$

Isto é um sistema de equações lineares para achar \vec{x}_{n+1} :

$$\left[J \left(\vec{F}(\vec{x}_n) \right) \right] \vec{x}_{n+1} = -\vec{F}(\vec{x}_n) + \left[J \left(\vec{F}(\vec{x}_n) \right) \right] \vec{x}_n$$

Este sistema tem a forma de um sistema nodal, onde os elementos não lineares são linearizados em torno da aproximação atual da solução \vec{x}_n . O sistema pode ser gerado como um sistema nodal para análise de um circuito resistivo linear, montado com os elementos modelados na forma linearizada. A solução do sistema é a próxima aproximação da solução \vec{x}_{n+1} .

1.9.1 Resistor não linear

Um resistor controlado a tensão com a curva $j = f(v)$, na versão linearizada se torna um resistor com $R = 1/G_0$ em paralelo com uma fonte de corrente I_0 , com a curva original tocando a reta $j = I_0 + G_0v$, com as mesmas derivadas, no ponto $(v_n, f(v_n))$:

³⁸De Carl Gustav Jakob Jacobi, ~1841.

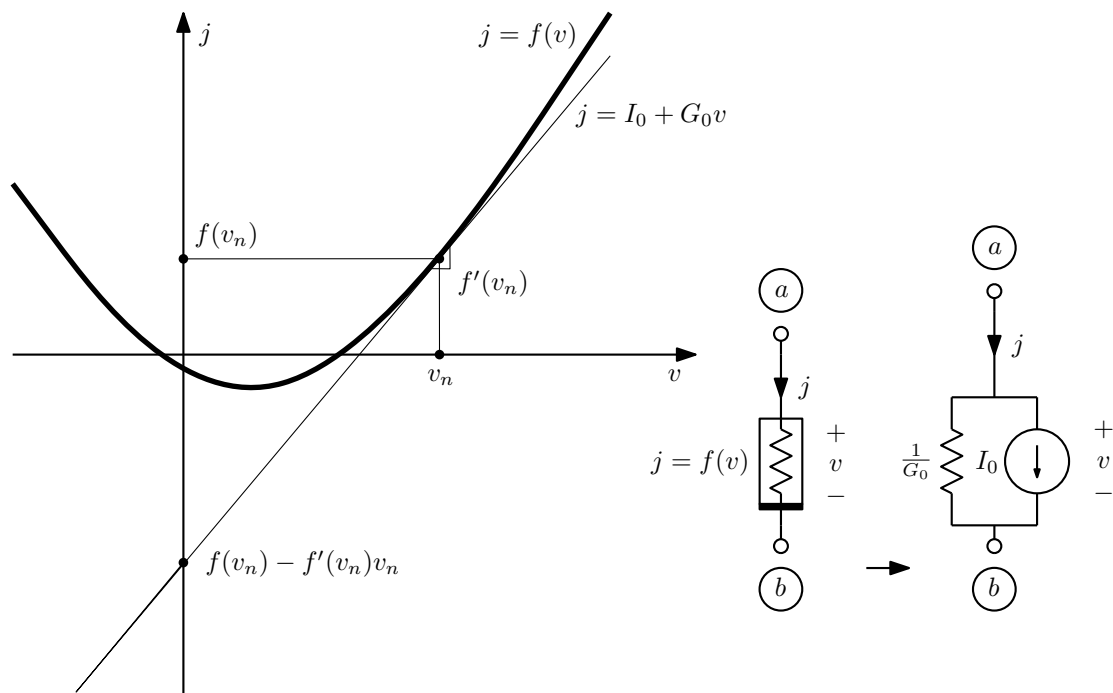


Figura 1.70: Linearização do resistor não linear.

$$j = f(v) \approx f(v_n) - f'(v_n)v_n + f'(v_n)v = I_0 + G_0v$$

$$G_0 = f'(v_n)$$

$$I_0 = f(v_n) - G_0v_n$$

1.9.2 Transcondutor não linear

Basta estender a mesma ideia do resistor não linear para o caso em que a tensão de controle v_{cd} está em outro ramo (figura 1.71).

$$j_{ab} = f(v_{cd}) \approx f(v_{cd n}) - f'(v_{cd n})v_{cd n} + f'(v_{cd n})v_{cd} = I_0 + G_m v_{cd}$$

$$G_m = f'(v_{cd n})$$

$$I_0 = f(v_{cd n}) - G_m v_{cd n}$$

Para outras fontes não lineares a linearização segue sempre a mesma regra. Uma fonte de tensão controlada a tensão é linearizada como uma fonte de tensão fixa em série com uma fonte de tensão controlada a tensão linear. Uma fonte de corrente controlada a corrente se torna uma fonte de corrente fixa em paralelo com uma fonte de corrente controlada a corrente linear. E uma fonte de tensão controlada a corrente se torna uma fonte de tensão fixa em série com uma fonte de transresistência linear. Estas fontes são tratadas pela análise nodal modificada (figuras 1.72, 1.73 e 1.74).

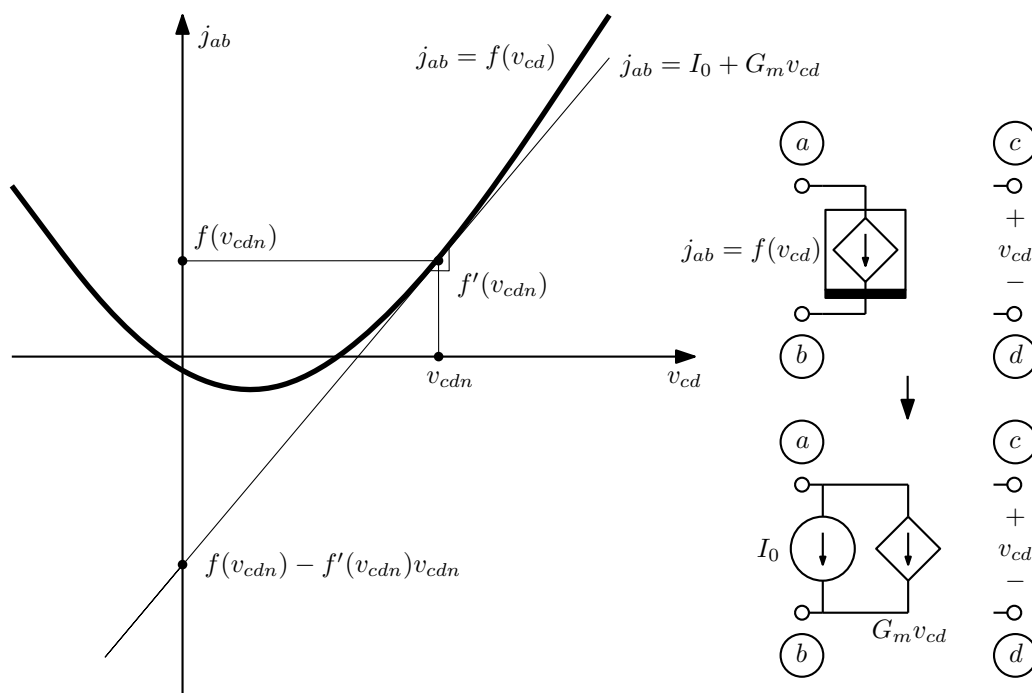


Figura 1.71: Linearização do transcondutor não linear.

1.9.3 Amplificador de tensão não linear

$$v_{ab} = f(v_{cd}) \approx f(v_{cdn}) - f'(v_{cdn})v_{cdn} + f'(v_{cdn})v_{cd} = V_0 + A_0 v_{cd}$$

$$A_0 = f'(v_{cdn})$$

$$V_0 = f(v_{cdn}) - A_0 v_{cdn}$$

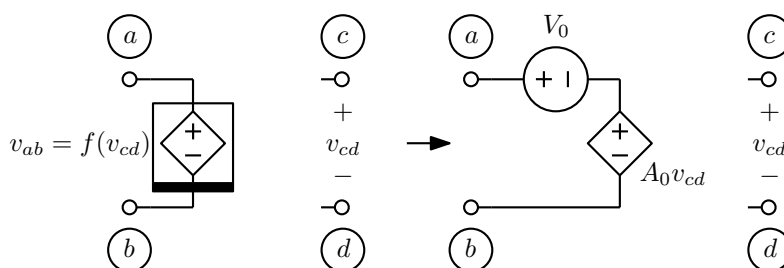


Figura 1.72: Linearização do amplificador de tensão não linear.

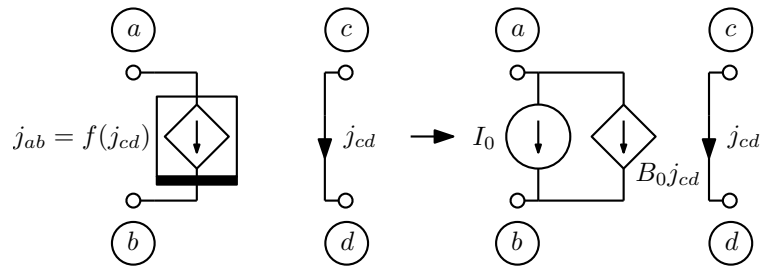


Figura 1.73: Linearização do amplificador de corrente não linear.

1.9.4 Amplificador de corrente não linear

$$j_{ab} = f(j_{cd}) \approx f(j_{cd n}) - f'(j_{cd n})j_{cd n} + f'(j_{cd n})j_{cd} = I_0 + B_0j_{cd}$$

$$B_0 = f'(j_{cd n})$$

$$I_0 = f(j_{cd n}) - B_0j_{cd n}$$

1.9.5 Transresistor não linear

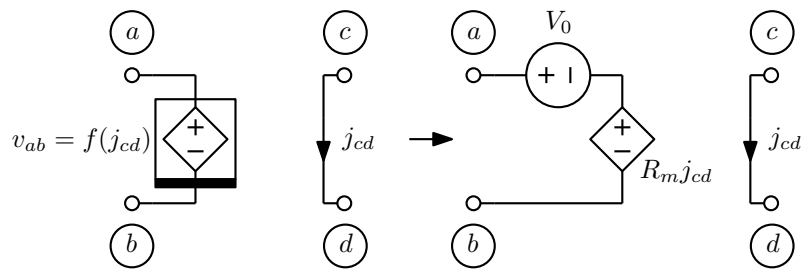


Figura 1.74: Linearização do transresistor não linear.

$$v_{ab} = f(j_{cd}) \approx f(j_{cd n}) - f'(j_{cd n})j_{cd n} + f'(j_{cd n})j_{cd} = V_0 + R_mj_{cd}$$

$$R_m = f'(j_{cd n})$$

$$V_0 = f(j_{cd n}) - R_mj_{cd n}$$

Um resistor onde seja calculada a corrente equivale a um transresistor controlado por sua própria corrente (figura 1.75). O modelo na análise nodal modificada corresponde ao de um resistor controlado a tensão com a mesma função ligado ao resto do circuito por um girador unitário.

$$v = f(j) \approx f(j_n) - f'(j_n)j_n + f'(j_n)j = V_0 + R_0j$$

$$R_0 = f'(j_n)$$

$$V_0 = f(j_n) - R_0j_n$$

Exemplo: Usando ainda o circuito da figura 1.67, o sistema de equações obtido formalmente do método de Newton-Raphson é:

$$\left[J \left(\vec{F}(\vec{e}_n) \right) \right] \vec{e}_{n+1} = -\vec{F}(\vec{e}_n) + \left[J \left(\vec{F}(\vec{e}_n) \right) \right] \vec{e}_n$$

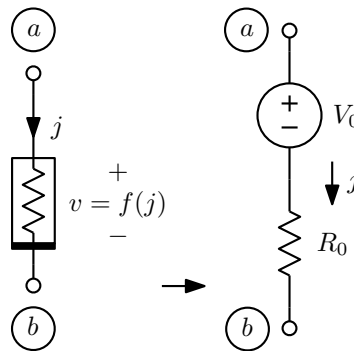


Figura 1.75: Linearização do resistor controlado a corrente.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + 2e_{1n} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{(e_{1n}-e_{2n})^2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{(e_{1n}-e_{2n})^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1\ n+1} \\ e_{2\ n+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{e_{1n}-e_{2n}}{2} + e_{1n}^2 - 2 \\ \frac{e_{2n}-e_{1n}}{2} + \frac{1}{e_{1n}-e_{2n}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + 2e_{1n} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{(e_{1n}-e_{2n})^2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{(e_{1n}-e_{2n})^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1n} \\ e_{2n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + 2e_{1n} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{(e_{1n}-e_{2n})^2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{(e_{1n}-e_{2n})^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1\ n+1} \\ e_{2\ n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1n}^2 + 2 \\ -\frac{2}{e_{1n}-e_{2n}} \end{bmatrix}$$

A figura 1.76 mostra o modelo linearizado em torno de \vec{e}_n . O sistema nodal correspondente é idêntico ao obtido da outra forma:

$$\begin{bmatrix} G_1 + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + G_{m2} & \frac{1}{2} - G_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1\ n+1} \\ e_{2\ n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_1 + 2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = 2e_{1n}; \quad I_1 = e_{1n}^2 - G_1 e_{1n} = -e_{1n}^2; \quad G_{m2} = -\frac{1}{(e_{1n} - e_{2n})^2}; \quad I_2 = \frac{1}{e_{1n} - e_{2n}} - G_{m2}(e_{1n} - e_{2n}) = \frac{2}{e_{1n} - e_{2n}}$$

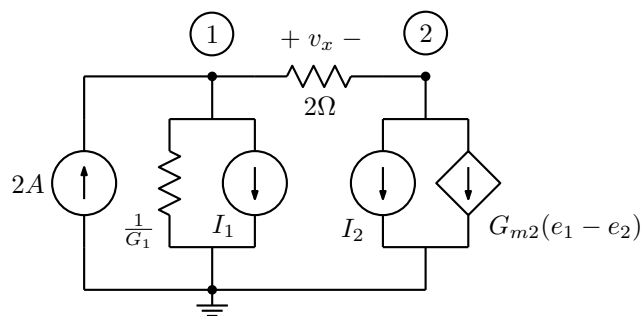


Figura 1.76: Modelo linearizado em torno da solução atual.

1.9.6 Fontes não lineares controladas por várias variáveis

Para uma fonte, de tensão ou de corrente y , controlada por várias variáveis \vec{x} , a linearização é da forma:

$$y = f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_n) - \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_n)x_{in} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_n)x_i = Y_0 + \sum_{i=1}^m K_{0i}x_i$$

$$K_{0i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_n)$$

$$Y_0 = f(\vec{x}_n) - \sum_{i=1}^m K_{0i}x_{in}$$

Desta forma, quando o sistema converge se tem o esperado $y = f(\vec{x})$, pois os somatórios se cancelam. Uma fonte de corrente controlada por duas tensões (figura 1.77) seria modelada como:

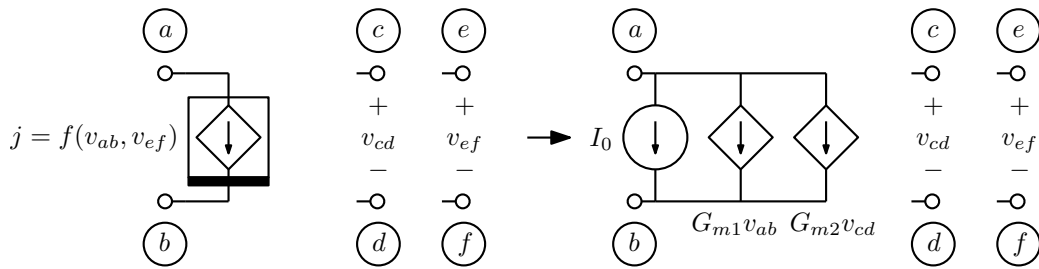


Figura 1.77: Linearização de uma fonte de corrente com dois controles a tensão.

$$j = f(v_{ab}, v_{cd})$$

$$j \approx I_0 + G_{m1}v_{ab} + G_{m2}v_{cd}$$

$$G_{m1} = \frac{\partial f}{\partial v_{ab}}(v_{ab\ n}, v_{cd\ n})$$

$$G_{m2} = \frac{\partial f}{\partial v_{cd}}(v_{ab\ n}, v_{cd\ n})$$

$$I_0 = f(v_{ab\ n}, v_{cd\ n}) - G_{m1}v_{ab\ n} - G_{m2}v_{cd\ n}$$

Exemplo: Seja o circuito da figura 1.78, que contém dois multiplicadores. O modelo para a análise nodal modificada pelo método de Newton-Raphson é mostrado na figura 1.79 uma variável de corrente é acrescentada, no ramo contendo as fontes de tensão. Os parâmetros dos modelos para os multiplicadores são:

$$v_{1n} = e_{1n} - e_{2n}; \quad v_{2n} = e_{1n} - e_{3n}; \quad v_{3n} = e_{3n}$$

$$A_1 = Av_{2n}$$

$$A_2 = Av_{1n}$$

$$V_0 = Av_{1n}v_{2n} - A_1v_{1n} - A_2v_{2n} = -Av_{1n}v_{2n}$$

$$G_2 = Gv_{3n}$$

$$G_3 = Gv_{2n}$$

$$I_0 = Gv_{2n}v_{3n} - G_2v_{2n} - G_3v_{3n} = -Gv_{2n}v_{3n}$$

A equação acrescentada é:

$$e_{2\ n+1} = V_0 + A_1(e_{1\ n+1} - e_{2\ n+1}) + A_2(e_{1\ n+1} - e_{3\ n+1})$$

O sistema de equações nodais modificadas para calcular a próxima aproximação da solução é então:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1/R_1 + 1/R_2 & -1/R_1 & -1/R_2 & 0 \\ -1/R_1 + G_2 & 1/R_1 & -G_2 + G_3 & 1 \\ -1/R_2 - G_2 & 0 & 1/R_2 + 1/R_3 + G_2 - G_3 & 0 \\ \hline A_1 + A_2 & -1 - A_1 & -A_2 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_{1\ n+1} \\ e_{2\ n+1} \\ e_{3\ n+1} \\ j_{4\ n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -I_0 \\ I_0 \\ -V_0 \end{bmatrix}$$

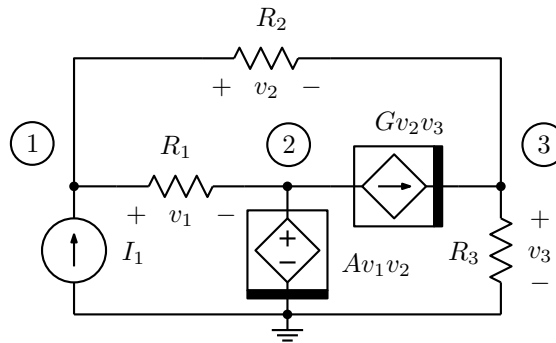


Figura 1.78: Circuito com multiplicadores.

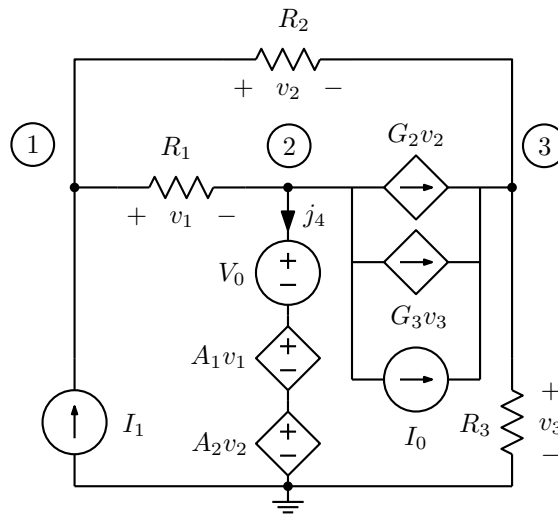


Figura 1.79: Modelo linearizado em torno da solução atual para o circuito com multiplicadores.

1.10 Algoritmo de análise pelo método de Newton-Raphson

Para realizar a análise de um circuito resistivo, as operações a fazer basicamente são:

1. Obter uma aproximação inicial para \vec{e}_n . Pode ser $\vec{e}_n = \vec{0}$, valores aleatórios, etc.

2. Montar o sistema linearizado, com todos os elementos não lineares linearizados em torno da última aproximação da solução \vec{e}_n .
3. Resolver o sistema, que é linear, achando \vec{e}_{n+1} .
4. Comparar a nova solução com a anterior. Se $\vec{e}_{n+1} \approx \vec{e}_n$ dentro de um certo critério de tolerância, o método convergiu e a solução foi encontrada, valendo \vec{e}_{n+1} .
5. Se ainda não foi obtida convergência, fazer $\vec{e}_n \leftarrow \vec{e}_{n+1}$ e voltar a (2).

Deve-se contar quantas iterações são feitas, e se a convergência não for atingida em um número razoável delas, interromper o processo. Várias técnicas podem ser usadas para fazer o método escapar destas situações, muito comuns.

1.11 Controle de convergência

A comparação de \vec{e}_n com \vec{e}_{n+1} é feita comparando os elementos um a um e procurando a maior diferença em módulo. É conveniente usar comparações normalizadas se os valores comparados forem maiores que certo limite e_{min} , em corrente ou tensão ($e_{min} = 1$, por exemplo), e comparações diretas para valores menores, mas de forma a não criar descontinuidades:

$$\text{Se } |e_{n+1\ i}| > e_{min}, \text{ erro} = e_{min} \left| \frac{e_{n+1\ i} - e_{n\ i}}{e_{n+1\ i}} \right|, \text{ senão erro} = |e_{n+1\ i} - e_{n\ i}|$$

O método de Newton-Raphson pode não convergir, tipicamente com a busca da solução ficando presa em um “mínimo local”, causado pela existência de uma solução complexa (que não é física) próxima, ou outras situações. Vários métodos podem ser usados para guiar o método para a solução, supondo que esta exista:

- Pode-se simplesmente abandonar a solução atual e partir de uma nova aproximação inicial a partir de valores randômicos para as variáveis. É melhor randomizar apenas as variáveis que não estão convergindo, pois senão a solução em casos que tenham várias soluções pode ser mudada³⁹, como em circuitos contendo “flip-flops”. A randomização pode ter que ser repetida várias vezes, e deve-se então estipular um número máximo de vezes, e abandonar a análise caso a convergência não seja atingida.
- Pode-se modificar o circuito temporariamente para uma versão que convirja mais facilmente, e gradualmente voltar o circuito ao original. Um método bastante usado é o de acrescentar resistores em paralelo com ramos não lineares, inicialmente valor pequeno, o que lineariza o circuito e força a existência de uma solução, e ir aumentando progressivamente os valores deles, com soluções a cada passo usando a solução anterior como aproximação inicial. Isto guia a solução até uma solução correta. No último passo, podem ser deixadas no circuito condutâncias de valor baixo G_{min} , como usualmente feito em simuladores tipo SPICE (método conhecido como “Gmin stepping”).
- Algo similar é partir de uma aproximação $\vec{e}_n = \vec{0}$ com todas as fontes independentes zeradas, e voltar gradualmente as fontes a seus valores normais, com soluções a cada passo usando a solução anterior como aproximação inicial (“source stepping”).

Com dois métodos de “stepping” também podem gerar mudança da solução. Uma possibilidade para evitar isto é não alterar elementos conectados apenas a nós (ou correntes) que estejam convergindo pelo método normal.

³⁹Em uma análise no tempo, em que soluções são calculadas a pequenos intervalos de tempo. Ver adiante.

Exemplo: Circuitos simples que causam não convergência são os mostrados na figura 1.80. Com a fonte de corrente um pouco fora dos limites entre os picos de $\pm k$ e aproximação e_{1n} atual próxima dos picos correspondentes, em v_a ou v_b , o método passa a alternar entre duas aproximações eternamente, em torno de v_a no caso mostrado, sem encontrar a solução correta e_1 . No caso (a) o processo de “Gmin stepping” é efetivo, pois retifica o resistor não linear, movendo gradualmente a solução para o valor correto e_1 . No caso (b), o método não é efetivo, pois a solução com G_{min} acrescentada move a solução na direção do zero quando a corrente é positiva, e o problema de não convergência resurge quando o pico em v_a reaparece com a redução de G_{min} . Uma solução é a colocação de uma fonte de tensão em série com G_{min} com valor entre v_a e v_b , (em equivalente Norton). A gradual redução de G_{min} então gera convergência corretamente para e_1 ⁴⁰. Notar que “source stepping” variando i somente resolve a não convergência se a aproximação inicial para e_1 ficar acima de v_b . A randomização da aproximação inicial facilmente gera a solução correta, quando gera aproximação acima de v_b .

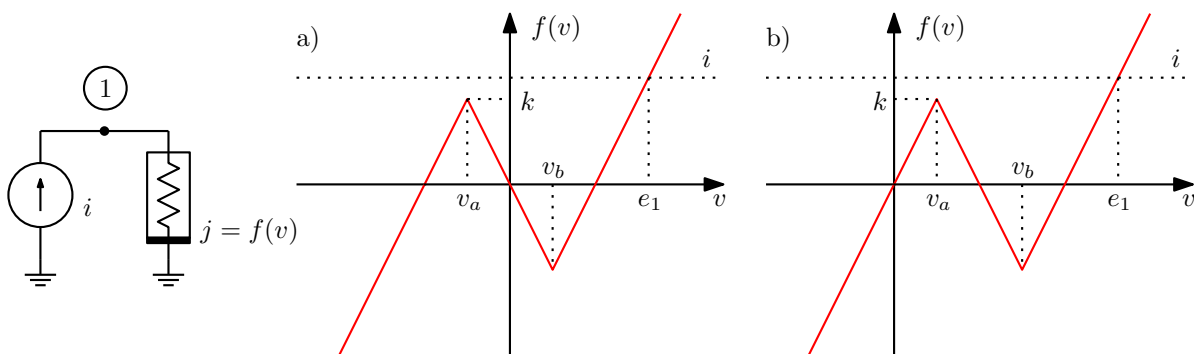


Figura 1.80: Circuitos simples que geram problemas de convergência. O caso (a) é resolvido com “Gmin stepping” normal. O caso (b) não. Nenhum tem solução garantida com “source stepping”.

1.12 Caminhada randômica

Uma solução numérica para um sistema não linear pode ser obtida também por um método simples de caminhada randômica (“Random walk”), que consiste em, para resolver o sistema $\vec{F}(\vec{e}) = 0$:

1. Começar com uma aproximação inicial \vec{e}_n , e avaliar o erro $\vec{\epsilon}_n = \vec{F}(\vec{e}_n)$.
2. Variar aleatoriamente os valores de \vec{e}_n em valores proporcionais ao módulo do erro $\vec{\epsilon}_n$, obtendo $\vec{e}_{n+1} = \vec{e}_n + \vec{\Delta}$, avaliando novamente o erro $\vec{\epsilon}_{n+1} = \vec{F}(\vec{e}_{n+1})$.
3. Se $|\vec{\epsilon}_{n+1}| < |\vec{\epsilon}_n|$, se o novo erro for pequeno o bastante, a solução foi encontrada. Senão, fazer $\vec{e}_n = \vec{e}_{n+1}$, $\vec{\epsilon}_n = \vec{\epsilon}_{n+1}$.
4. Voltar a (2).

O algoritmo explora o sistema de equações, procurando um caminho que se aproxima mais e mais da solução, embora talvez lentamente e com riscos de não convergência e instabilidade. É também inconveniente ter que manipular o sistema não linear, não matricial.

⁴⁰Método implementado em uma versão do programa Mnae.

1.13 Modelamento

Dispositivos eletrônicos comuns não lineares são modelados com os modelos discutidos na seção anterior.

1.13.1 Diodos

Diodos, considerando apenas a característica estática, são resistores não lineares. Um diodo semicondutor usual (figura 1.81) segue uma curva do tipo:

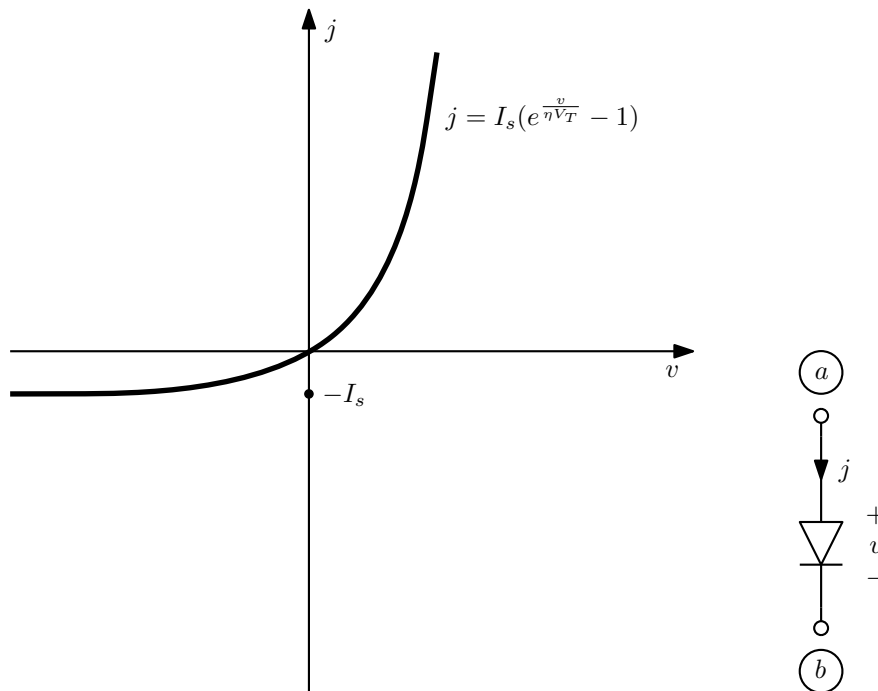


Figura 1.81: Diodo semicondutor.

$$j = I_s \left(e^{\frac{v}{\eta V_T}} - 1 \right)$$

onde I_s é a corrente reversa e $V_T = \frac{kT}{q}$, onde k é a constante de Boltzmann ($1.3806503 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-1}$), q é a carga do elétron ($1.60217646 \times 10^{-19}$ coulombs), e T é a temperatura absoluta em kelvins. Em 300 K, V_T vale aproximadamente 25 mV. Costuma-se colocar um fator empírico η multiplicando V_T para adaptar a curva a características de diodos reais. Com um modelo assim, os parâmetros a usar na análise pelo método de Newton-Raphson são:

$$G_0 = \frac{I_s e^{\frac{v_n}{\eta V_T}}}{\eta V_T}$$

$$I_0 = I_s \left(e^{\frac{v_n}{\eta V_T}} - 1 \right) - G_0 v_n$$

É possível que ocorra “overflow” no cálculo de $e^{\frac{v_n}{\eta V_T}}$, e assim é mais seguro limitar o valor de v_n em algo como 0.7 V, usando o valor do limite no lugar de v_n se o limite for excedido. Isto corresponde a

estender a curva do diodo como uma reta acima do limite. Fazer isto também facilita a convergência no método de Newton-Raphson, evitando correntes exageradamente altas durante o cálculo.

1.13.2 Diodos lineares por partes

Não apenas diodos, mas quaisquer resistores não lineares, podem ser modelados por uma função formada por uma sequência de retas que se interceptam em pontos dados (v_i, j_i) . As retas além dos limites máximo e mínimo de v podem ser extensões das retas entre os pares de pontos nos dois extremos.

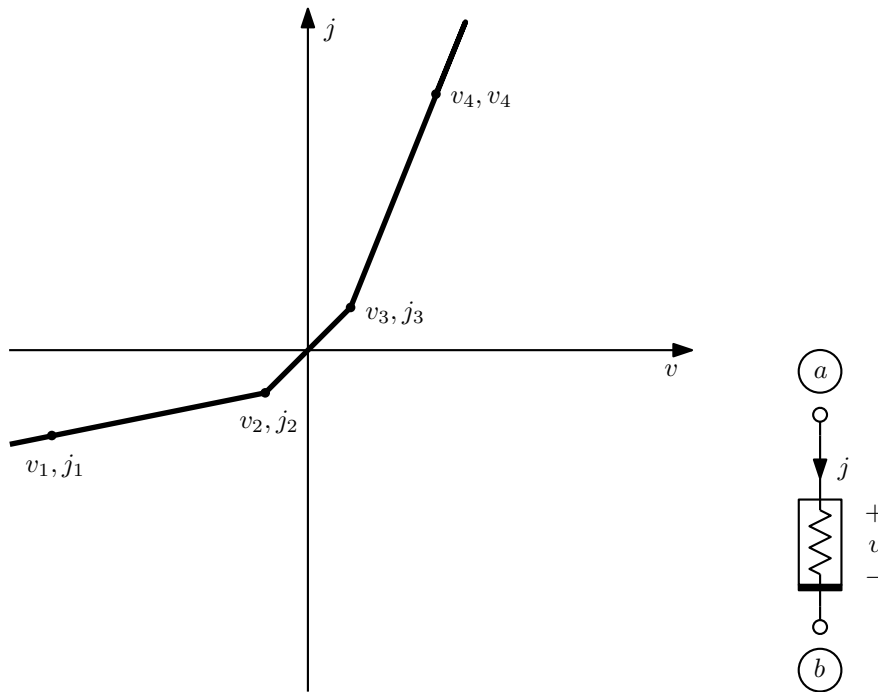


Figura 1.82: Resistor linear por partes.

Dada a solução atual v_n , está determinado o segmento atual e os dois parâmetros da linearização, que vem das equações das retas. No exemplo, há três possibilidades, dados os 4 pontos:

$$v < v_2 : G_0 = \frac{j_2 - j_1}{v_2 - v_1}; I_0 = j_2 - G_0 v_2$$

$$v_2 \leq v < v_3 : G_0 = \frac{j_3 - j_2}{v_3 - v_2}; I_0 = j_3 - G_0 v_3$$

$$v \geq v_3 : G_0 = \frac{j_4 - j_3}{v_4 - v_3}; I_0 = j_4 - G_0 v_4$$

O modelamento linear por partes pode ser usado para fontes controladas por uma variável também, de forma similar. Uma propriedade interessante dos circuitos onde todas as não linearidades sejam tratadas desta forma é que uma vez que a solução atual \vec{e}_n coloque todos os dispositivos em seus segmentos corretos, a solução é exata. Uma nova solução, como o método de Newton-Raphson faria buscando a convergência, dá exatamente o mesmo resultado.⁴¹

⁴¹Em um circuito com todos os elementos lineares por partes com várias soluções, é simples encontrar todas elas. Basta

1.13.3 Diodo ideal

O diodo ideal exigiria um segmento vertical, o que não pode ser feito pela análise anterior. Pode ser tratado como sendo ou um curto-circuito onde a corrente j é calculada ou um circuito aberto onde a tensão v é calculada, seguindo-se as regras de atualização:

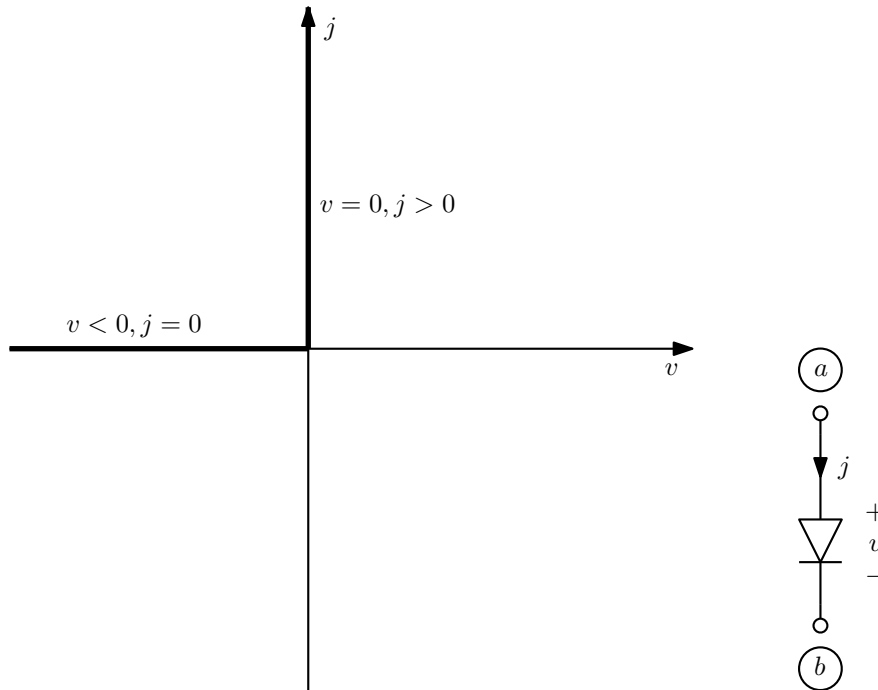


Figura 1.83: Diodo ideal.

Se era um circuito aberto e $v_n > 0$, modelar como curto-circuito, senão continuar modelando como circuito aberto.

Se era um curto-circuito e $j_n < 0$, modelar como circuito aberto, senão continuar modelando como curto-circuito.

Para não ser necessário alterar a estrutura do sistema de equações, usando apenas equações nodais, pode-se modelar o diodo como dois resistores em série, que tem resistências iguais com sinais opostos para modelar um curto-circuito ou tem uma das resistências infinita para modelar um circuito aberto. A corrente pode ser obtida a partir da tensão sobre um deles e a solução para as tensões nodais. Pode-se também usar análise nodal modificada, montando a estampa de um curto-circuito onde a corrente é calculada ou a estampa de uma corrente nula (a equação do ramo é simplesmente $j = 0$). Um modelo que corresponde a isto é mostrado na figura 1.84. Para circuito aberto, os transdutores formando um girador não são montados no sistema. Para curto-circuito, o resistor (unitário) não é montado. Em ambos os casos há uma variável a mais.

inicializar o método com todas as combinações de segmentos de todos os componentes e ver para onde convergem. Os casos correspondentes às soluções convergem imediatamente. Note-se que não é necessário saber qual a solução inicial, já que qualquer uma com os mesmos segmentos da solução converge para ela.

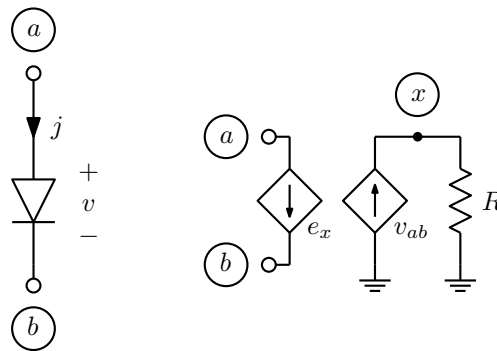


Figura 1.84: Modelo para um diodo ideal.

1.13.4 Transistores bipolares

Um modelo de simples implementação e que cobre todas as possibilidades de operação (cortado, ativo, saturado e invertido) é o modelo de Ebers-Moll (figura 1.85). Um exame em livros e artigos que mostram o modelo mostra que há duas formas usuais: Em uma (esquerda), duas fontes controladas são controladas pelas correntes nos dois diodos. Em outra (direita), elas são controladas pelas correntes de emissor e de coletor.

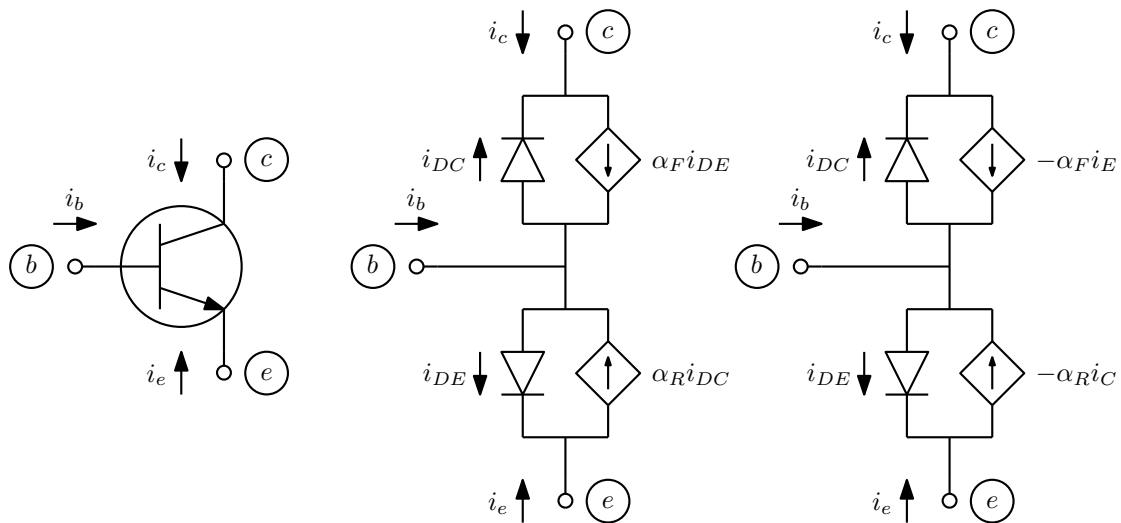


Figura 1.85: Variantes do modelo de Ebers-Moll para o transistor bipolar.

O artigo original [1] usa a segunda forma. Os dois modelos tem o mesmo comportamento, como mostrado abaixo. Os diodos seguem funções arbitrárias, controladas pelas tensões v_{be} , entre base e emissor, e v_{bc} , entre base e coletor:

$$i_{DC} = f_c(v_{bc})$$

$$i_{DE} = f_e(v_{be})$$

Para o primeiro circuito:

$$\begin{aligned} i_c &= -i_{DC} + \alpha_F i_{DE} \\ i_e &= -i_{DE} + \alpha_R i_{DC} \end{aligned}$$

Para o segundo circuito:

$$\begin{aligned} i_c &= -i_{DC} - \alpha_F i_e \\ i_e &= -i_{DE} - \alpha_R i_c \\ i_c &= -i_{DC} + \alpha_F i_{DE} + \alpha_F \alpha_R i_c \\ i_e &= -i_{DE} + \alpha_R i_{DC} + \alpha_R \alpha_F i_e \\ i_c &= \frac{1}{1 - \alpha_F \alpha_R} (-i_{DC} + \alpha_F i_{DE}) \\ i_e &= \frac{1}{1 - \alpha_R \alpha_F} (-i_{DE} + \alpha_R i_{DC}) \end{aligned}$$

Os dois modelos são então equivalentes se as funções dos diodos forem escaladas no primeiro circuito como:

$$\begin{aligned} i_{DC} &= \frac{1}{1 - \alpha_F \alpha_R} f_c(v_{bc}) \\ i_{DE} &= \frac{1}{1 - \alpha_F \alpha_R} f_e(v_{be}) \end{aligned}$$

O primeiro modelo é de implementação simples no método de Newton-Raphson. Basta obter os modelos para os diodos, com resistores e fontes de corrente, a partir das tensões atuais sobre eles e das funções que seguem, e colocar fontes de corrente e transcondutores em proporção, para gerar o efeitos das fontes de corrente controladas a corrente (figura 1.86). Usando o segundo modelo, basta escalar as funções dos diodos como mostrado.

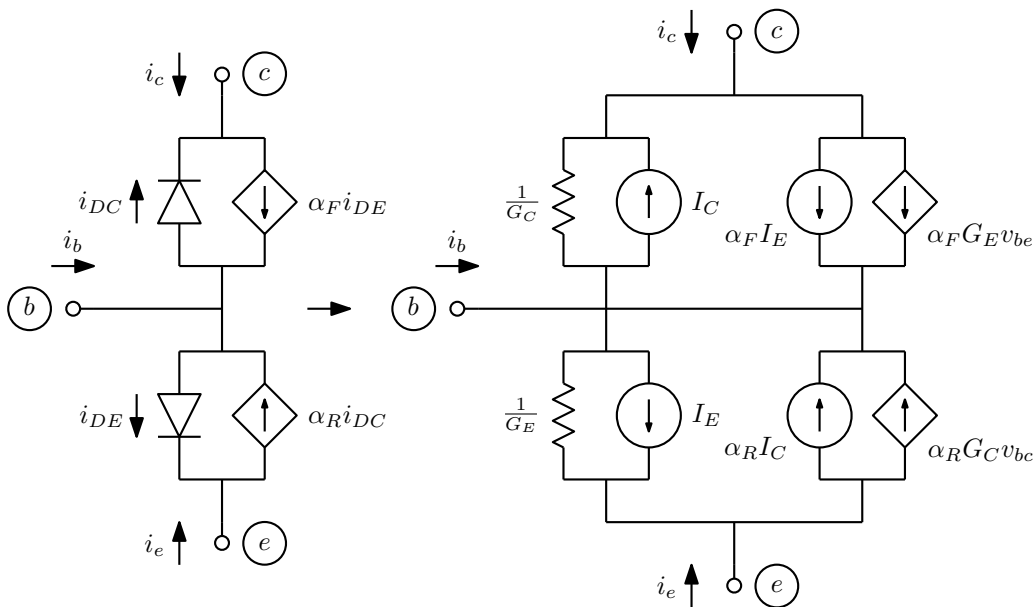


Figura 1.86: Modelo linearizado correspondente ao modelo de Ebers-Moll.

Notar que este modelo não modela o “efeito Early”⁴², que faz a corrente de coletor aumentar em proporção a v_{ce} . O modelo pode ser alterado para que isto ocorra, implementando-se uma multiplicação da corrente de coletor por $1 + v_{ce}/V_A$, onde V_A é a “tensão de Early”, um valor que pode ser determinado experimentalmente, usualmente entre 15 V e 150 V. Para manter a simetria do modelo, pode-se acrescentar uma corrente $i_c v_{cb}/V_A$ entre coletor e base, e outra $i_e v_{eb}/V_A$ entre emissor e base. Estas fontes seriam tratadas como fontes controladas por duas variáveis, multiplicadores. Como $i_c = -i_{DC} + \alpha_F i_{DE}$ e $i_e = i_{DE} + \alpha_R i_{DC}$, as correntes a acrescentar são proporcionais a multiplicações das correntes nos diodos por v_{cb} e v_{eb} . Faz pouca diferença, entretanto, implementar apenas a multiplicação da corrente de coletor por $1 + v_{ce}/V_A$. Para isto coloca-se em paralelo com o transistor, entre coletor e emissor, uma fonte de corrente $i_c v_{ce}/V_A$. Considerando diodos genéricos, como feito no modelo acima, a corrente a acrescentar vale:

$$j_{Early} = i_c v_{ce}/V_A = (\alpha f_e(v_{be}) - f_c(v_{bc})) \frac{v_{ce}}{V_A}$$

Esta é uma função não linear com três controles (Figura 1.87), e é linearizada com três transcondutores e uma fonte de corrente, realizando:

$$j_{Early} = I_0 + G_1 v_{be} + G_2 v_{bc} + G_3 v_{ce}$$

onde:

$$G_1 = \alpha f'_e(v_{be}) \frac{v_{ce}}{V_A}$$

$$G_2 = -f'_c(v_{bc}) \frac{v_{ce}}{V_A}$$

$$G_3 = (\alpha f_e(v_{be}) - f_c(v_{bc})) \frac{1}{V_A}$$

$$I_0 = (\alpha f_e(v_{be}) - f_c(v_{bc})) \frac{v_{ce}}{V_A} - G_1 v_{be} - G_2 v_{bc} - G_3 v_{ce} = -G_1 v_{be} - G_2 v_{bc}$$

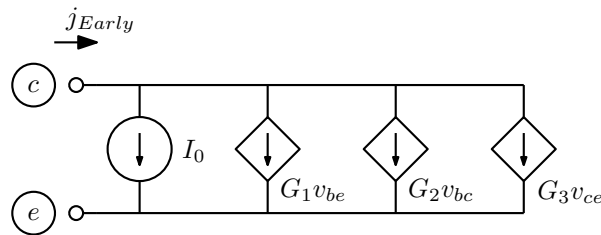


Figura 1.87: Modelo a acrescentar para criar o efeito Early.

Já tendo calculados os parâmetros dos diodos do modelo, as funções requeridas podem ser obtidas diretamente deles:

$$f'_e(v_{be}) = G_E$$

$$f'_c(v_{bc}) = G_C$$

$$f_e(v_{be}) = G_E v_{be} + I_E$$

$$f_c(v_{bc}) = G_C v_{bc} + I_C$$

⁴²J. M. Early, “Effects of space-charge layer widening in junction transistors”, Proc. IRE, vol. 40, pp. 1401-1406, 1952.

Para o transistor PNP, basta trocar as polaridades dos diodos e os sentidos dos amplificadores de corrente, ou apenas trocar as polaridades dos diodos, mantendo os amplificadores. Para fazer isto usando o modelo de diodo semiconductor, basta trocar os sinais de I_s e ηV_T .

Exemplo: O modelo pode gerar resultados estranhos em certos casos. Seja o circuito da figura 1.88, onde se tenta usar uma única análise para determinar que resistor deve ser colocado entre a fonte de alimentação e a base do transistor para que a tensão no coletor seja de exatamente 6 V. Com o amplificador operacional ideal montado como mostrado (um par “fixador-norator”), a solução do circuito força esta condição, e o valor necessário do resistor seria calculado dividindo a tensão sobre o ramo de saída do amplificador por sua corrente de saída.

$$R_b = \frac{e_1 - e_2}{j_5}$$

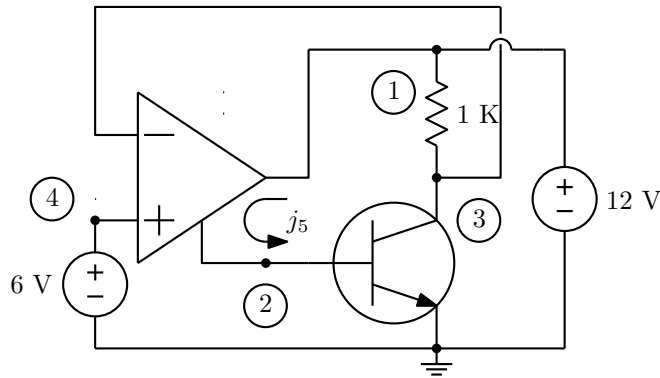


Figura 1.88: Circuito para calcular o valor do resistor de base, que dá resultado estranho.

Ocorre que existem duas soluções neste circuito. Uma é a normal, que geraria uma tensão v_{be} em torno de 0.6 V e uma pequena corrente de base, mas há outra, com o transistor saturado, uma gigantesca corrente de base e uma enorme tensão v_{be} . Modelando o circuito com diodos com $I_s = 3.77513 \times 10^{-14}$ A e $\eta V_T = 0.025$ V, com curva estendida como reta se $v > 0.9$ V, e parâmetros $\alpha = 0.99$ e $\alpha_r = 0.5$, as duas soluções resultam em:

- a) $v_{be} = 0.644794$ V; $j_5 = 6.00006 \times 10^{-5}$ A; $R_b = 189235\Omega$
- b) $v_{be} = 600.875$ V; $j_5 = 1.97259 \times 10^6$ A

Dependendo de qual aproximação inicial é usada, uma ou outra solução é encontrada.

1.13.5 Transistores MOS

Um modelo adequado para transistores onde os campos elétricos internos não são muito grandes, ou para transistores de dimensões não muito pequenas, é o de Shichman-Hodges [4], que também é o modelo de “nível 1” de simuladores tipo SPICE. A formulação usual do modelo (diferente da encontrada no artigo original, mas com mesmo resultado), é, para um transistor de canal N com largura W e comprimento L :

$$i_D = \begin{cases} 0, & \text{se } v_{gs} < V_t, \text{ corte.} \\ K \frac{W}{L} (2(v_{gs} - V_t)v_{ds} - v_{ds}^2) (1 + \lambda v_{ds}), & \text{se } v_{ds} \leq v_{gs} - V_t, \text{ região ôhmica, ou de triodo.} \\ K \frac{W}{L} (v_{gs} - V_t)^2 (1 + \lambda v_{ds}), & \text{se } v_{ds} > v_{gs} - V_t, \text{ região de saturação.} \end{cases}$$

v_{gs} e v_{ds} são as tensões entre porta (“gate”) e fonte (“source”), e entre dreno (“drain”) e fonte, respectivamente, W é a largura do canal, L o comprimento do canal, V_t a tensão de limiar (“threshold”), K o parâmetro de transcondutância e λ um parâmetro que controla a inclinação das curvas, de forma similar à do efeito Early nos transistores bipolares. Considera-se ainda o “efeito de corpo”, que faz com que a tensão v_{gs} tenha que ser maior para fazer o transistor conduzir se a tensão no substrato (terminal b , de “bulk”) for mais negativa, fazendo V_t variar com v_{bs} :

$$V_t = V_{t0} + \gamma(\sqrt{\phi - v_{bs}} - \sqrt{\phi})$$

O parâmetro de transcondutância K é função da mobilidade dos portadores de carga no canal μ e da capacitância por unidade de área entre o “gate” e o canal C_{ox} ⁴³:

$$K = \frac{\mu C_{ox}}{2}$$

Valores típicos para os parâmetros podem ser $V_t = 1$ V, $K = 50 \times 10^{-6}$ A/V², $\lambda = 0.01$, $\gamma = 0.3 \sqrt{V}$ e $\phi = 0.6$ V, dependendo do processo usado. A mobilidade vale por volta de $\mu = 0.05$ para canal N e $\mu = 0.02$ para canal P.

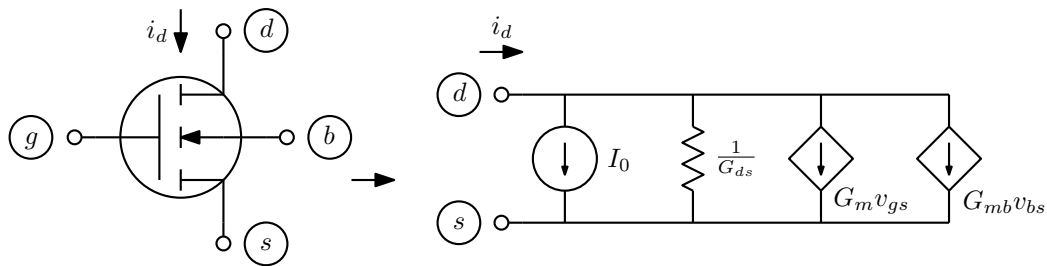


Figura 1.89: Modelo linearizado para um transistor NMOS.

O modelo para a análise pelo método de Newton-Raphson tem então três transcondutâncias (uma delas uma condutância) e uma fonte de corrente (figura 1.89), pois a corrente entre “drain” e “source” é controlada por três tensões. O estado do transistor é definido pelas tensões v_{gs} e v_{ds} da última aproximação da solução, e os valores das transcondutâncias são obtidos como:

⁴³É comum também se definir $K = \mu C_{ox}$, com o “2” absorvido nas equações.

G_{ds} :

Corte: 0

$$\text{Triodo: } K \frac{W}{L} (2(v_{gs\ n} - V_t) - 2v_{ds\ n} + 4\lambda(v_{gs\ n} - V_t)v_{ds\ n} - 3\lambda v_{ds\ n}^2)$$

$$\text{Saturação: } K \frac{W}{L} (v_{gs\ n} - V_t)^2 \lambda$$

G_m :

Corte: 0

$$\text{Triodo: } K \frac{W}{L} (2v_{ds\ n} (1 + \lambda v_{ds\ n}))$$

$$\text{Saturação: } K \frac{W}{L} (2(v_{gs\ n} - V_t) (1 + \lambda v_{ds\ n}))$$

G_{mb} :

Corte: 0

$$\text{Triodo: } \frac{G_m \gamma}{2\sqrt{\phi - v_{bs\ n}}}$$

$$\text{Saturação: } \frac{G_m \gamma}{2\sqrt{\phi - v_{bs\ n}}}$$

Notar que G_{mb} é proporcional a G_m , pois V_t aparece sempre subtraído de v_{gs} nas fórmulas, e então $G_{mb} = -\frac{\partial i_D}{\partial V_{gs}} \frac{\partial V_t}{\partial V_{bs}}$.

Para o transistor PMOS, pode-se trocar todas as polaridades das tensões e o sentido de i_D . No mais o modelo é idêntico.

Como os transistores são simétricos mas o modelo não é, é necessário definir que terminais são “drain” e “source”. Para transistores NMOS, o “source” é o nó de menor tensão nodal entre os dois. Para transistores PMOS o oposto. O modelo deve incluir ainda diodos de “drain” e “source” para o substrato, com anodos no substrato para transistores NMOS e catodos no substrato para transistores PMOS. Os parâmetros destes diodos dependem da geometria das regiões de “drain” e “source”, usualmente da área e do perímetro. Há um problema com o modelo se estes diodos conduzem, pois v_{bs} pode ficar maior que ϕ . É necessário então adaptar as equações que modelam o efeito de variação de V_t com v_{bs} para que isto não ocorra, por exemplo limitando v_{bs} a $\phi/2$ ou menos.

1.13.5.1 Modelo para canal curto⁴⁴

O modelo de “nível 1” é de simples manipulação e útil para projetos iniciais de circuitos, mas não dá resultados corretos para transistores com “canal curto”, onde os campos elétricos internos são elevados. Uma modificação que não acrescenta muita complexidade é alterar as equações na forma⁴⁵:

$$i_D = \begin{cases} 0, & \text{se } v_{gs} < V_t, \text{ corte.} \\ K \frac{W}{L} (2(v_{gs} - V_t)v_{ds} - v_{ds}^2) v_{dsat} / (v_{gs} - V_t)(1 + \lambda v_{gs}), & \text{se } v_{ds} \leq v_{gs} - V_t, \text{ região ôhmica, ou de triodo.} \\ K \frac{W}{L} (v_{gs} - V_t)v_{dsat}(1 + \lambda v_{gs}), & \text{se } v_{ds} > v_{gs} - V_t, \text{ região de saturação.} \end{cases}$$

onde $v_{dsat} = (v_{gs} - V_t) / (LE_{sat})$ ($//$ é a operação de paralelo de impedâncias). E_{sat} é tipicamente da ordem de 4×10^6 V/m. Assim, as fórmulas são como as de canal longo se $v_{gs} - V_t \ll LE_{sat}$, e o

⁴⁴Material opcional.

⁴⁵T. Lee, “The design of CMOS radio-frequency integrated circuits”, Cambridge U. Press, 2004.

crescimento da corrente se torna linear com $v_{gs} - V_t$ e independente de L se o campo elétrico é intenso. As expressões equivalem a multiplicar i_D por $v_{dsat}/(v_{gs} - V_t)$. O modelo para a análise de Newton-Raphson tem a mesma estrutura da figura 1.89, com parâmetros calculados de forma similar:

$$\begin{aligned}
 &G_{ds} : \\
 &\text{Corte: } 0 \\
 &\text{Triodo: } - \frac{E_{sat}KW(v_{dsn}\lambda(3v_{dsn} - 4(v_{gsn} - V_t)) + 2(v_{dsn} - v_{gsn} + V_t))}{LE_{sat} + v_{gsn} - V_t} \\
 &\text{Saturação: } \frac{E_{sat}KW\lambda(v_{gsn} - V_t)^2}{LE_{sat} + v_{gsn} - V_t} \\
 &G_m : \\
 &\text{Corte: } 0 \\
 &\text{Triodo: } \frac{E_{sat}v_{dsn}KW(2E_{sat}L + v_{dsn})(1 + \lambda v_{dsn})}{(LE_{sat} + v_{gsn} - V_t)^2} \\
 &\text{Saturação: } \frac{E_{sat}KW(v_{gsn} - V_t)(2E_{sat} + v_{gsn} - V_t)(1 + \lambda v_{dsn})}{(LE_{sat} + v_{gsn} - V_t)^2} \\
 &G_{mb} : \\
 &\text{Corte: } 0 \\
 &\text{Triodo: } \frac{G_m\gamma}{2\sqrt{\phi - v_{bsn}}} \\
 &\text{Saturação: } \frac{G_m\gamma}{2\sqrt{\phi - v_{bsn}}}
 \end{aligned}$$

Muitos outros modelos tem sido desenvolvidos para transistores, acompanhando a evolução da tecnologia. Na maior parte são complexos e úteis apenas para análise numérica⁴⁶. Parâmetros dinâmicos dos modelos para transistores, capacitâncias, serão tratados mais adiante.

1.13.6 O tiristor, ou SCR

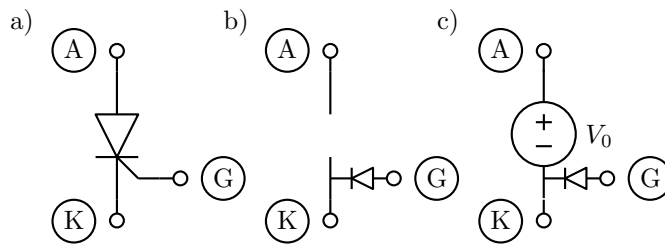


Figura 1.90: Tiristor, ou SCR (a), e seus modelos em corte (b) e em condução (c).

Um SCR (“silicon controlled rectifier”), figura 1.90 tem dois estados possíveis, conduzindo e cortado, e o comportamento, determinado pelas tensões e corrente entre os terminais de anodo (A), catodo (K) e porta (“gate”) (G):

⁴⁶Um outro modelo que é interessante citar é o de “subthreshold”, que descreve o comportamento do transistor MOS quando v_{gs} fica muito próxima ou menor que V_t . Nesta condição a corrente i_D , muito pequena, varia exponencialmente com v_{gs} , na forma $i_D = I_{D0} \frac{W}{L} e^{\frac{v_{gs}}{nV_T}}$, onde $n \approx 1.2$.

$$\begin{aligned} \text{Se está cortado} & \begin{cases} \text{Se } v_{AK} > V_{min} \text{ e } j_{GK} > I_{Gmin}, \text{ passa a conduzindo} \\ \text{Senão continua cortado} \end{cases} \\ \text{Senão (está conduzindo)} & \begin{cases} \text{Se } j_{AK} > I_{min}, \text{ continua conduzindo} \\ \text{Senão passa a cortado} \end{cases} \end{aligned}$$

Os limites V_{min} e I_{min} definem a mínima tensão e a mínima corrente para condução, e I_{Gmin} a mínima corrente para o disparo, ou entrada em condução. Uma outra possibilidade é modelar o SCR com um modelo com dois transistores, um NPN e outro PNP, como na figura 1.91, o que imita a estrutura interna do dispositivo. Os transistores podem usar o modelo de Ebers-Moll.

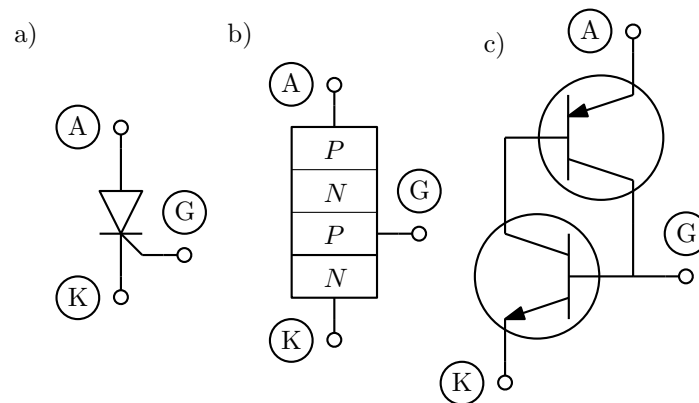


Figura 1.91: Modelo para o SCR (a) usando transistores (c), derivado da estrutura interna com quatro camadas de semicondutores com dopagens P e N (b).

1.13.7 Portas lógicas

Circuitos lógicos estáticos podem ser modelados como fontes controladas não lineares, com função que descreve o comportamento tendo regiões separadas, o que é um modelamento por partes.

1.13.7.1 Inversor

Seja um inversor CMOS, operando com níveis lógicos 0 e V . Sua curva de transferência pode ser como a da figura 1.92, e o modelo como também mostrado. Uma resistência de saída é acrescentada para modelamento mais realístico de carregamentos. Na estrada poderia ser colocada uma capacitância, tratada como na seção seguinte.

O modelo linearizado pode ser obtido na forma, correspondendo aos modelos da figura 1.93:

$$\text{Calcula-se } V_x = \frac{V}{2} - A \left(e_{an} - \frac{V}{2} \right)$$

$$\text{Se } V_x > V: V_0 = V; A_0 = 0$$

$$\text{Senão se } V_x < 0: V_0 = 0; A_0 = 0$$

$$\text{Senão } V_0 = \frac{V}{2}(1 + A); A_0 = -A$$

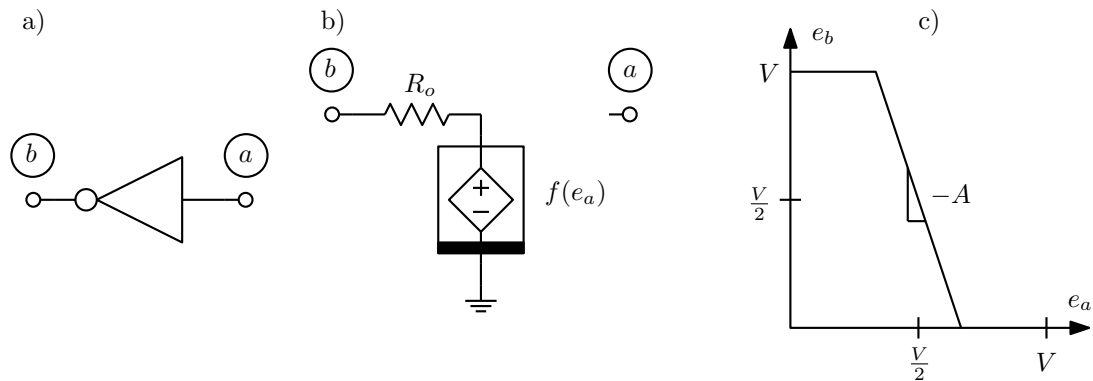


Figura 1.92: Curva de transferência (c) de um inversor lógico (a), e seu modelo (b).

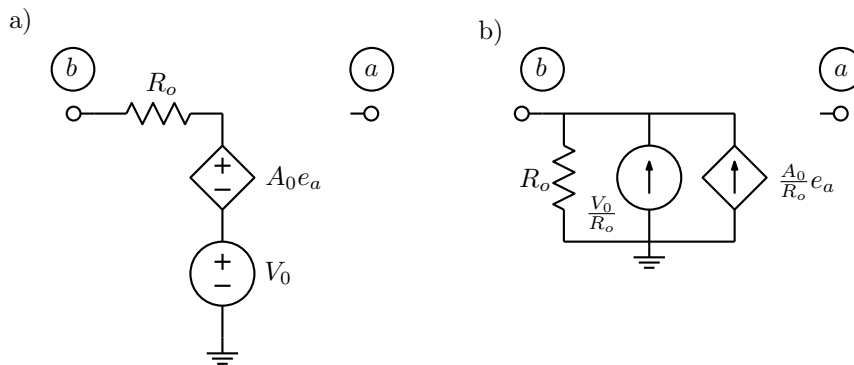


Figura 1.93: Modelo linearizado para o inversor (a), e equivalente Norton (b).

1.13.7.2 Portas de duas entradas

As curvas das portas NAND, AND, NOR e OR de duas entradas, idealizadas de forma similar ao feito para o inversor, são mostradas na figura 1.94. As figuras são visões da curva tridimensional da porta, sem carga, vistas da direção da tensão de saída e_c . Nas áreas hachuradas a derivada de e_c em relação a e_a e e_b vale $\pm A$, dependendo da porta.

Seja por exemplo a porta NAND da figura 1.95. Nota-se que, pela simetria da curva, se $e_a > e_b$ a curva é a de um inversor comandado por e_b , e se $e_b > e_a$ um inversor comandado por e_a . O modelo é então o da figura 1.96, onde os parâmetros podem ser obtidos como:

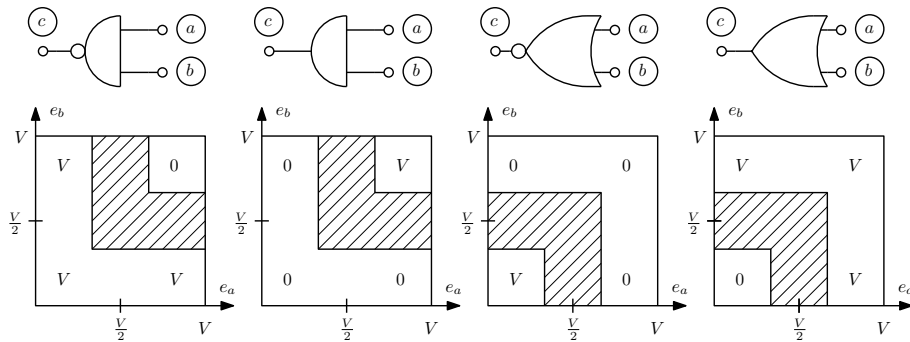


Figura 1.94: Curvas de transferência das portas lógicas de duas entradas.

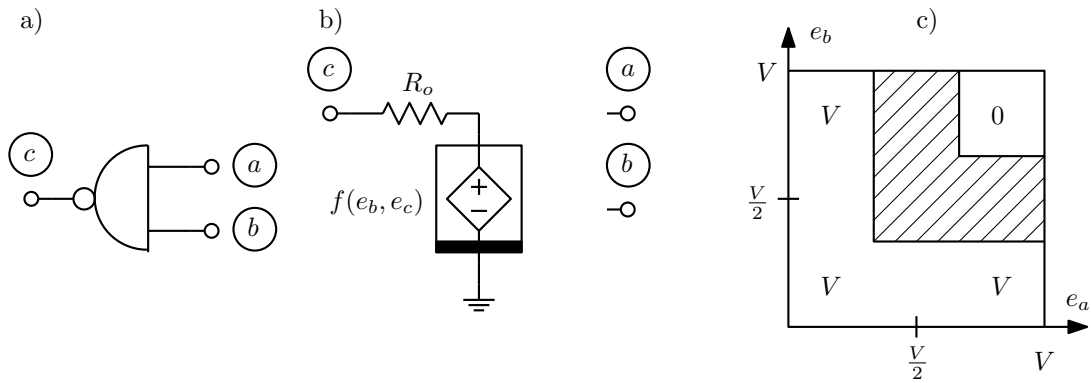


Figura 1.95: Curva de transferência (c) de uma porta NAND de duas entradas (a), e seu modelo (b). Na região hachurada da curva a inclinação vale $-A$, como no inversor.

$$\begin{cases}
 \text{Se } e_a > e_b \begin{cases}
 \text{Calcula-se } V_x = \frac{V}{2} - A \left(e_{bn} - \frac{V}{2} \right) \\
 \text{Se } V_x > V: V_0 = V; A_1 = A_2 = 0 \\
 \text{Senão se } V_x < 0: V_0 = 0; A_1 = A_2 = 0 \\
 \text{Senão } V_0 = \frac{V}{2}(1 + A); A_1 = 0; A_2 = -A
 \end{cases} \\
 \text{Senão } \begin{cases}
 \text{Calcula-se } V_x = \frac{V}{2} - A \left(e_{cn} - \frac{V}{2} \right) \\
 \text{Se } V_x > V: V_0 = V; A_1 = A_2 = 0 \\
 \text{Senão se } V_x < 0: V_0 = 0; A_1 = A_2 = 0 \\
 \text{Senão } V_0 = \frac{V}{2}(1 + A); A_1 = -A; A_2 = 0
 \end{cases}
 \end{cases}$$

Para modelar uma porta AND basta trocar o sinal de A. Para modelar uma porta NOR, basta trocar o teste para se $e_a < e_b$, e para modelar uma porta OR basta fazer as duas trocas. O modelo é sempre o

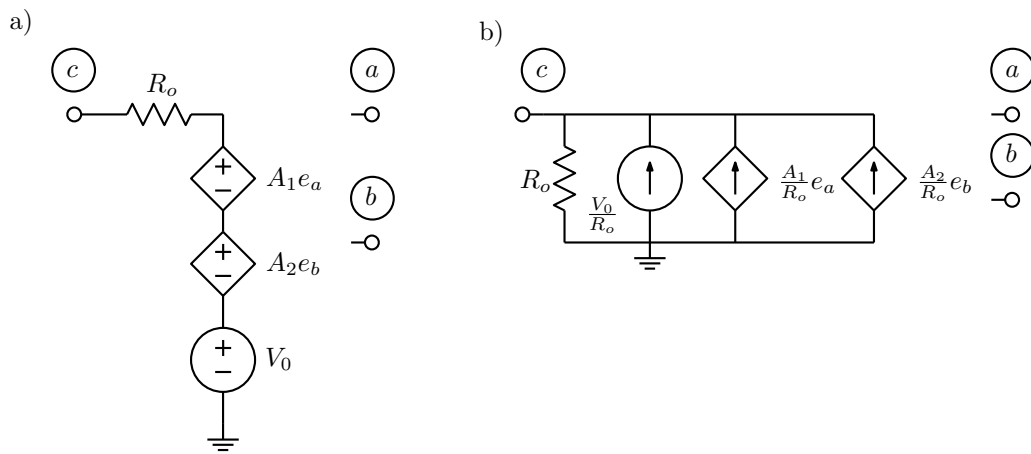


Figura 1.96: Modelo linearizado para a porta NAND (a), e equivalente Norton (b).

da figura 1.96⁴⁷.

1.14 Cálculo de ponto de operação e modelo de pequenos sinais

Quando um circuito está ligado há muito tempo, sem fontes variáveis ativas, tendo atingido uma situação estável, diz-se que atingiu seu “ponto de operação”. A análise para calcular o ponto de operação consiste na resolução do circuito, em geral não linear, obtido quando capacitâncias e indutâncias são zeradas⁴⁸, e fontes de sinal também zeradas, deixando-se no circuito apenas fontes contínuas⁴⁹. A partir do ponto de operação calculado, é possível calcular o efeito de fontes de sinal de pequena amplitude linearizando o circuito em torno do ponto de operação, considerando apenas variações. Como o circuito é então linear, podem ser feitas análises de resposta em frequência e outras requerendo linearidade. O modelo de pequenos sinais, onde estas análises são feitas, pode ser obtido zerando-se todas as fontes contínuas do modelo usado na análise de Newton-Raphson, com os valores finais do cálculo do ponto de operação. A este modelo são repostos capacitores e indutores, e as fontes de sinal.

Exemplo: Seja a análise do amplificador da figura 1.97a. A análise de ponto de operação usaria o circuito da figura 1.97b no método de Newton-Raphson usando o modelo de Ebers-Moll⁵⁰, onde capacitâncias, indutâncias e fontes de sinal foram zeradas. Após a solução do ponto de operação, análises de circuitos lineares, como resposta em frequência, seriam realizadas com o modelo da figura 1.97b. Seriam também incluídas as capacitâncias do transistor, calculadas a partir do da solução encontrada para o ponto de operação⁵¹. Notar que a análise nodal modificada permite manter sempre a mesma estrutura para o circuito.

Sejam os parâmetros do circuito os dados no “netlist”⁵²:

⁴⁷Esta formulação, que vale para portas com mais entradas também, usa as funções do inversor e do “não inversor”, controladas, no caso de portas NAND e AND pela menor tensão de entrada, e no caso de portas NOR e OR pela maior tensão.

⁴⁸Para evitar singularidades causadas por capacitores isolando partes do circuito ou indutores formando ciclos fechados, é melhor substituir capacitores por resistores grandes e indutores por resistores pequenos.

⁴⁹E talvez fontes pulsadas de grande amplitude, com seus valores iniciais.

⁵⁰Sem efeito Early. A inclusão deste geraria mais três transdutores no modelo de pequenos sinais. Usados controles das fontes pelas correntes nos diodos.

⁵¹São as capacitâncias de junção e difusão dos diodos base-emissor e base-coletor. Ver seção 1.15.14.4.

⁵²Formato para análise no programa Rfmlin, usado no exemplo.

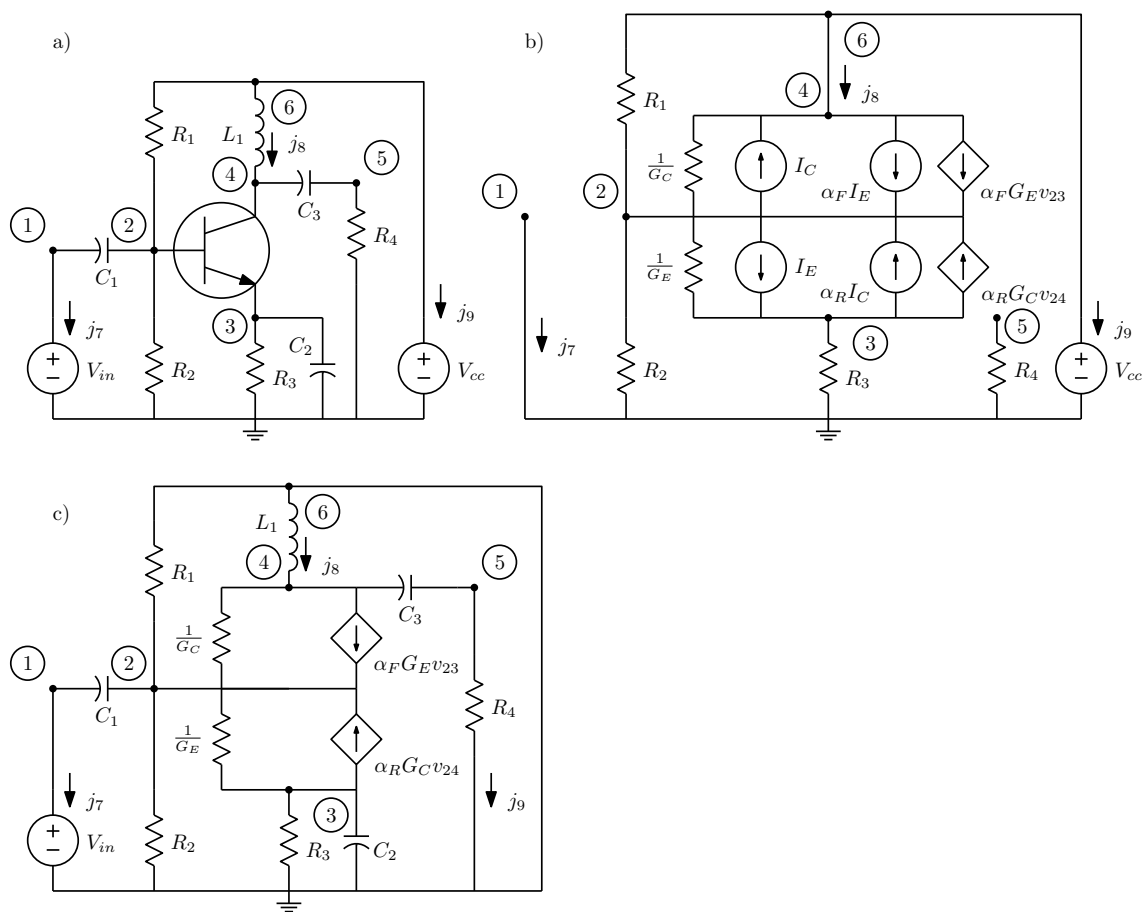


Figura 1.97: Modelo para cálculo do ponto de operação no método de Newton-Raphson (b) e modelo de pequenos sinais (c), para o amplificador (a).

Circuito exemplo

```

R3 3 0 500
R4 5 0 1000
R2 2 0 5000
R1 6 2 10000
L1 6 4 10E-3
C2 3 0 100E-6
C1 1 2 10E-6
C3 4 5 10E-6
Q1 4 2 3 NPN 0.99 0.5 1E-09 0.0434294 1E-09 0.0434294 1E12 5E-12 1E-16 5E-12 1E-16
VIN 1 0 1 0 0
VCC 6 0 0 0 10
.AC DEC 100 1 100E9
    
```

Os parâmetros do transistor estão na sequência: Q<nome> <nóc> <nób> <nóe> <tipo> < α_F > < α_R > < I_{sE} > < ηV_{TE} > < I_{sC} > < ηV_{TC} > < V_A > < C_{0E} > < C_{1E} > < C_{0C} > < C_{1C} >, onde os parâmetros terminados em “E” se referem ao diodo base-emissor e os terminados em “C” ao diodo base-coletor. V_A se

refere ao efeito Early, ignorado no caso. Os diodos com estes parâmetros tem corrente reversa de 1 nA e conduzem 1 mA com 0.6 V. Os quatro parâmetros finais são para cálculo das capacitâncias, e geram 5 pF para a capacitância de junção com tensão nula e 100 pF para a capacitância de difusão para corrente de 1 mA. As fontes são especificadas por V<nome> <nó+> <nó-> <módulo> <fase> <valor contínuo>. O resultado da análise de ponto de operação é:

```
e1: 0
e2: 3.16687
e3: 2.49702
e4: 10
e5: 0
e6: 10
jL1: 0.0049441
jVIN: 0
jVCC: -0.00562742
Q1: tipo=N Vbe=0.669845 Vbc=-6.83313 Vce=7.50298 Ibe=0.00499404 Ibc=-1e-09
Ic=0.0049441 Ib=4.99399e-05 Cbe=5.06475e-10 Cbc=1.42056e-12
```

A análise a partir de valores nulos para todas as variáveis requer 6 iterações até precisão relativa de 10^{-6} . As curvas dos diodos foram linearizadas a partir de 0.7 V. Com mais, mais iterações são necessárias e a convergência pode ficar difícil. Os gráficos da resposta em frequência para saída no nó 5 são os da figura 1.98.

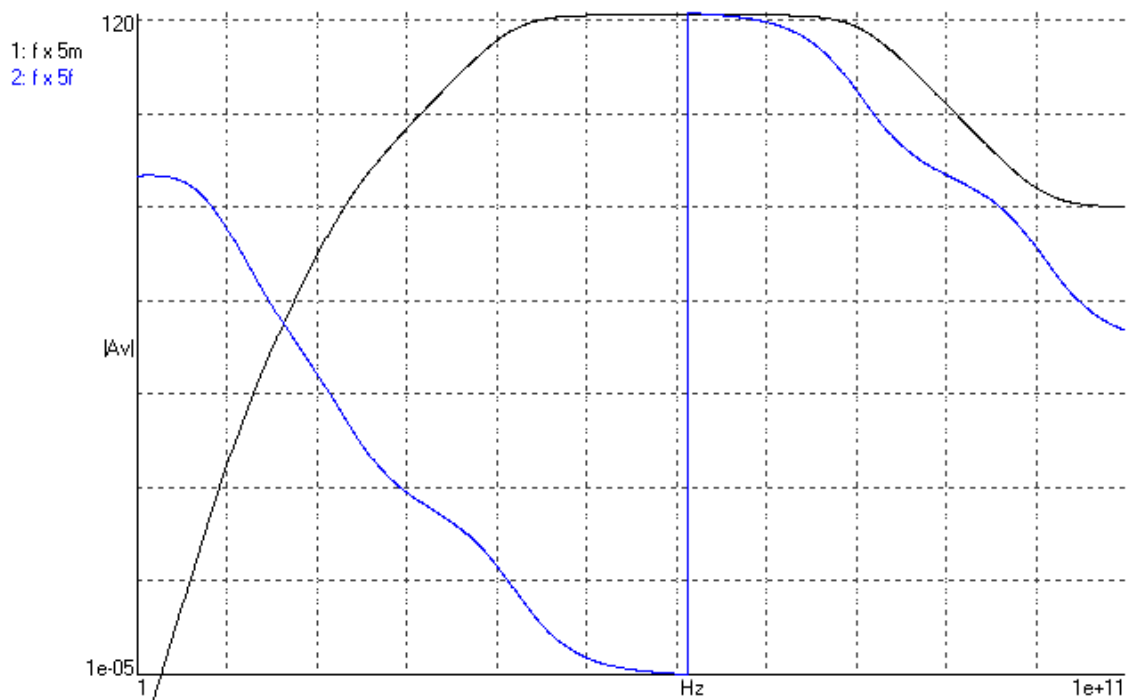


Figura 1.98: Curvas de módulo e fase obtidas para a resposta em frequência do amplificador da figura 1.97. Os limites do gráfico de fase são $\pm 180^\circ$. O ganho de tensão é inversor na banda central. Em alta frequência as capacitâncias do transistor geram um polo real negativo e um zero real positivo, fazendo a fase terminar em 0° , devido ao caminho capacitivo da entrada até a saída.

1.15 Análise nodal no domínio do tempo

Análises transientes no tempo podem ser calculadas numericamente usando métodos de discretização das integrações, que reduzem o problema à análise de circuitos resistivos. O que interessa aproximar é a integração, no caso de uma variável:

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f(t) dt$$

Vários métodos numéricos são conhecidos para aproximar a integração. Alguns dos mais simples são os métodos de Euler⁵³, o método dos trapézios⁵⁴ e os métodos multipasso de Adams-Bashforth, Adams-Moulton⁵⁵ e de Gear⁵⁶.

1.15.1 Método “backward”, ou implícito, de Euler

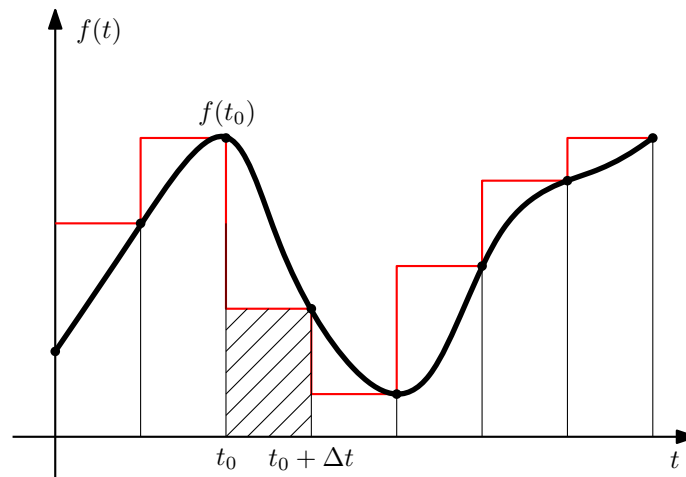


Figura 1.99: Integração “backward” de Euler.

A função é aproximada por retângulos “para trás”. Resulta uma equação associando o valor futuro, em $t = t_0 + \Delta t$ com o valor presente, em t_0 :

$$y(t_0 + \Delta t) \approx y(t_0) + \Delta t f(t_0 + \Delta t)$$

O método tende a aumentar o amortecimento, introduzindo erros bastante severos na simulação se o passo Δt não for pequeno o bastante. Um tanque LC simulado por este método gera uma senoide que decai com o tempo. Por outro lado, é bem comportado quando existem transições abruptas e chaveamentos rápidos.

1.15.2 Método “forward”, ou explícito, de Euler

A função é aproximada por retângulos “para frente”. Resulta uma expressão explícita para o valor futuro:

⁵³Leonhard Euler, “Institutionum calculi integralis”, 1768-1770.

⁵⁴A forma que se segue ao método “backward” de Euler, dentro dos métodos de Adams-Moulton de integração numérica.

⁵⁵John Couch Adams, Francis Bashforth, 1883, Forest Ray Moulton, 1926.

⁵⁶C. W. Gear, “Simultaneous Numerical Solution of Differential-Algebraic Equations”, IEEE Transactions on Circuit Theory, vol. 18, no. 1, pp. 89-95, jan. 1971.

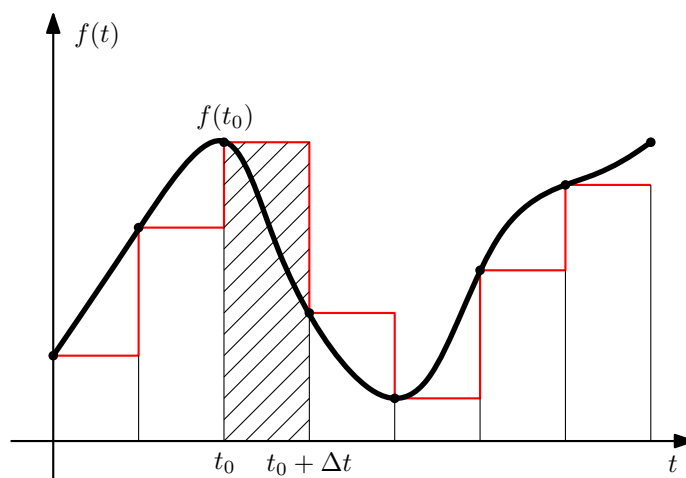


Figura 1.100: Integração “forward” de Euler.

$$y(t_0 + \Delta t) \approx y(t_0) + \Delta t f(t_0)$$

O método tende a reduzir o amortecimento, possivelmente causando instabilidade. Um tanque LC simulado por este método gera uma senoide que cresce com o tempo. É muito mal comportado quando existem transições abruptas, e gera “memórias falsas” em elementos reativos, como se verá adiante.

1.15.3 Método dos trapézios, ou integração bilinear

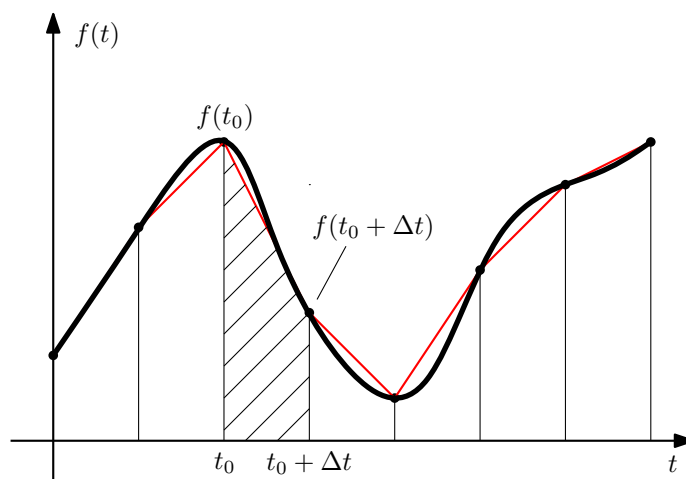


Figura 1.101: Integração trapezoidal.

A função é aproximada por trapézios, com muito maior precisão. Resulta uma combinação dos dois métodos de Euler.

$$y(t_0 + \Delta t) \approx y(t_0) + \frac{\Delta t}{2} (f(t_0) + f(t_0 + \Delta t))$$

É um dos melhores métodos, muito mais preciso que os de Euler. Não altera o amortecimento. Circuitos que gerariam senoides perpétuas continuam a gerá-las, com apenas um pequeno erro de frequência para menos. Gera, entretanto, alguma “memória falsa” e não é bem comportado quando existem transições abruptas, embora seja bem melhor que o “forward” de Euler quanto a isto.

Outros métodos interessantes são os de Adams-Bashforth e de Adams-Moulton, que generalizam os métodos de Euler usando informação de valores anteriores de função $f(t)$, e o método de Gear, que usa informações de tempos anteriores da função $y(t)$, discutidos adiante.

A aplicação dos métodos de integração é feita sobre os elementos reativos diretamente, gerando modelos resistivos.

1.15.4 Capacitor linear invariante no tempo

$$v(t_0 + \Delta t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} j(t) dt$$

Método “backward” de Euler: O capacitor é modelado por um resistor, em série com uma fonte de tensão ou em paralelo com uma fonte de corrente, fazendo-se o equivalente Norton.

$$v(t_0 + \Delta t) \approx v(t_0) + \frac{\Delta t}{C} j(t_0 + \Delta t)$$

$$j(t_0 + \Delta t) \approx \frac{C}{\Delta t} (v(t_0 + \Delta t) - v(t_0))$$

A forma adequada para análise nodal é a última, em que a corrente é expressa em função da tensão.

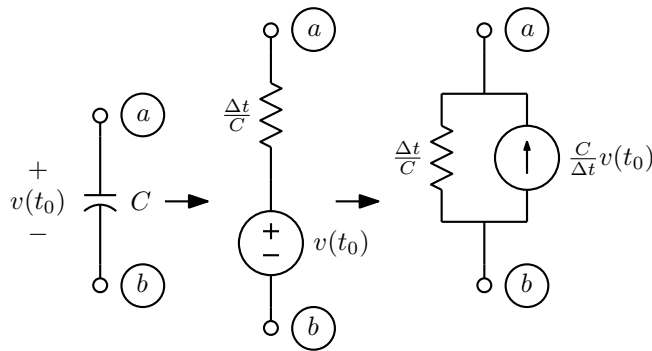


Figura 1.102: Capacitor no método “backward” de Euler.

$$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \begin{bmatrix} +\frac{C}{\Delta t} & -\frac{C}{\Delta t} \\ -\frac{C}{\Delta t} & +\frac{C}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{C}{\Delta t} v(t_0) \\ -\frac{C}{\Delta t} v(t_0) \end{bmatrix}$$

Método “forward” de Euler: O capacitor é modelado como uma fonte de tensão.

$$v(t_0 + \Delta t) \approx v(t_0) + \frac{\Delta t}{C} j(t_0)$$

A corrente no capacitor deve ser calculada ao fim da análise pois é necessária no passo seguinte. Análise nodal modificada é necessária, e circuitos fechados de capacitores e fontes de tensão são proibidos, o que não é prático. Note-se que existe uma “memória falsa” de corrente que pode introduzir sérios artefatos na simulação.

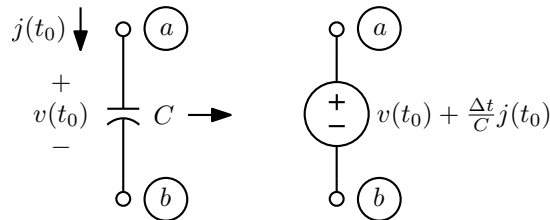


Figura 1.103: Capacitor no método “forward” de Euler.

Método dos trapézios: O modelo é similar ao do método “backward” de Euler, mas também com memória falsa de corrente, que pode também introduzir artefatos. A corrente tem que ser calculada ao fim da análise.

$$v(t_0 + \Delta t) \approx v(t_0) + \frac{\Delta t}{2C} (j(t_0) + j(t_0 + \Delta t))$$

$$j(t_0 + \Delta t) \approx \frac{2C}{\Delta t} (v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)) - j(t_0)$$

O modelo tem a mesma forma do usado no método B. E.:

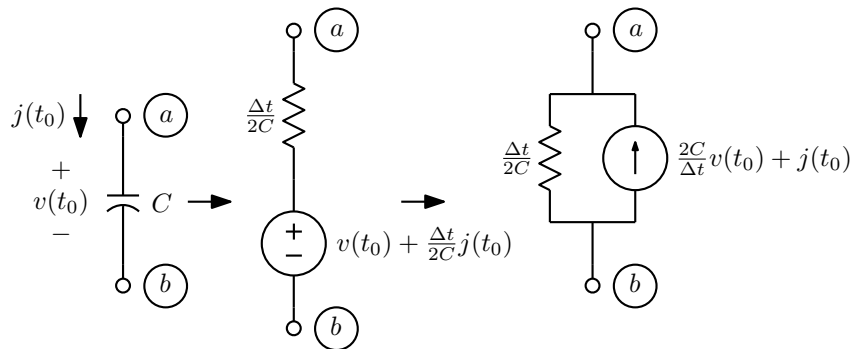


Figura 1.104: Capacitor no método dos trapézios.

$$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \begin{bmatrix} +\frac{2C}{\Delta t} & -\frac{2C}{\Delta t} \\ -\frac{2C}{\Delta t} & +\frac{2C}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{2C}{\Delta t}v(t_0) + j(t_0) \\ -\frac{2C}{\Delta t}v(t_0) - j(t_0) \end{bmatrix}$$

1.15.5 Indutor linear invariante no tempo

$$j(t_0 + \Delta t) = j(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} v(t) dt$$

Método “backward” de Euler:

$$j(t_0 + \Delta t) \approx j(t_0) + \frac{\Delta t}{L} v(t_0 + \Delta t)$$

$$v(t_0 + \Delta t) \approx \frac{L}{\Delta t} (j(t_0 + \Delta t) - j(t_0))$$

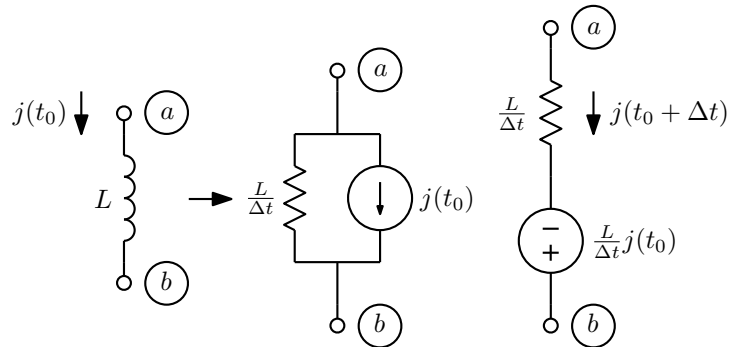


Figura 1.105: Indutor no método “backward” de Euler.

Para análise nodal simples, usa-se a forma com controle por tensão.

$$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \begin{bmatrix} +\frac{\Delta t}{L} & -\frac{\Delta t}{L} \\ -\frac{\Delta t}{L} & +\frac{\Delta t}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j(t_0) \\ +j(t_0) \end{bmatrix}$$

Para análise nodal modificada, usa-se o modelo controlado a corrente, com a vantagem de se ter a corrente calculada.

$$\begin{matrix} a \\ b \\ x \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & +1 & +\frac{L}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \\ j(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ +\frac{L}{\Delta t} j(t_0) \end{bmatrix}$$

Método “forward” de Euler:

$$j(t_0 + \Delta t) \approx j(t_0) + \frac{\Delta t}{L} v(t_0)$$

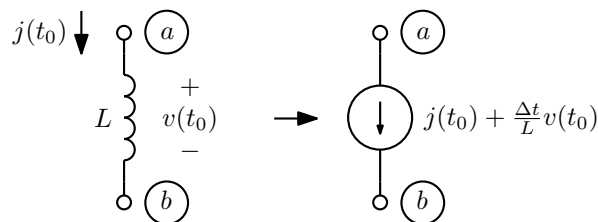


Figura 1.106: Indutor no método “forward” de Euler.

O modelo é uma fonte de corrente, compatível com a análise nodal simples. Este modelo pode ser usado junto com capacitores modelados pelo método “backward” de Euler, com menos erro do que se forem todos os elementos modelados pelo mesmo método de Euler. Blocos de circuito conectados ao resto apenas por indutores e fontes de corrente são proibidos.

$$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{L}v(t_0) - j(t_0) \\ +\frac{\Delta t}{L}v(t_0) + j(t_0) \end{bmatrix}$$

Método dos trapézios:

$$\begin{aligned} j(t_0 + \Delta t) &\approx j(t_0) + \frac{\Delta t}{2L}(v(t_0) + v(t_0 + \Delta t)) \\ v(t_0 + \Delta t) &\approx \frac{2L}{\Delta t}(j(t_0 + \Delta t) - j(t_0)) - v(t_0) \end{aligned}$$

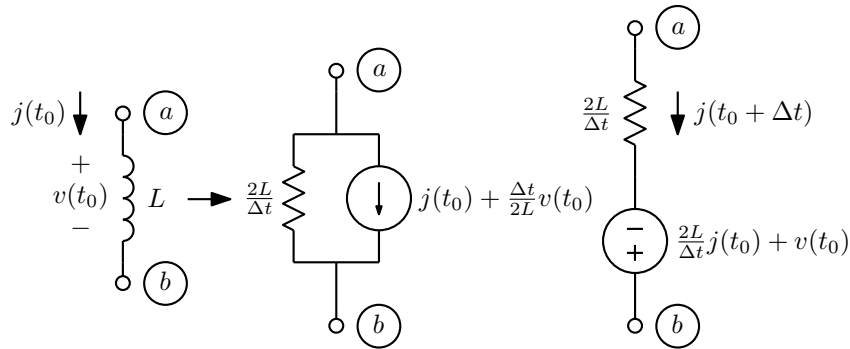


Figura 1.107: Indutor no método dos trapézios.

Novamente se tem um modelo para uso na análise nodal simples, que exige cálculo da corrente após a análise, e um modelo mais conveniente para a análise nodal modificada, com cálculo da corrente:

$$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \begin{bmatrix} +\frac{\Delta t}{2L} & -\frac{\Delta t}{2L} \\ -\frac{\Delta t}{2L} & +\frac{\Delta t}{2L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j(t_0) - \frac{\Delta t}{2L}v(t_0) \\ +j(t_0) + \frac{\Delta t}{2L}v(t_0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} a \\ b \\ x \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \vdots & +1 \\ \cdot & \cdot & \vdots & -1 \\ \hline -1 & +1 & \vdots & +\frac{2L}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \\ j(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \hline +\frac{2L}{\Delta t}j(t_0) + v(t_0) \end{bmatrix}$$

1.15.6 Transformador linear invariante no tempo

Basta generalizar o caso do indutor para uma forma matricial.

$$\vec{j}(t_0 + \Delta t) = \vec{j}(t_0) + [\Gamma] \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{v}(t) dt$$

Método “backward” de Euler

$$\vec{j}(t_0 + \Delta t) \approx \vec{j}(t_0) + \Delta t[\Gamma]\vec{v}(t_0 + \Delta t)$$

$$\vec{v}(t_0 + \Delta t) \approx \frac{1}{\Delta t}[L](\vec{j}(t_0 + \Delta t) - \vec{j}(t_0))$$

Para o caso de dois enrolamentos correspondendo à primeira forma na figura 1.108, na forma para análise nodal simples a estampa é:

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \begin{bmatrix} +\Gamma_{11}\Delta t & -\Gamma_{11}\Delta t & +\Gamma_{12}\Delta t & -\Gamma_{12}\Delta t \\ -\Gamma_{11}\Delta t & +\Gamma_{11}\Delta t & -\Gamma_{12}\Delta t & +\Gamma_{12}\Delta t \\ +\Gamma_{21}\Delta t & -\Gamma_{21}\Delta t & +\Gamma_{22}\Delta t & -\Gamma_{22}\Delta t \\ -\Gamma_{21}\Delta t & +\Gamma_{21}\Delta t & -\Gamma_{22}\Delta t & +\Gamma_{22}\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \\ e_c(t_0 + \Delta t) \\ e_d(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_{ab}(t_0) \\ +j_{ab}(t_0) \\ -j_{cd}(t_0) \\ +j_{cd}(t_0) \end{bmatrix}$$

E para análise nodal modificada, correspondendo à segunda forma na figura 1.108, a estampa é:

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ x \\ y \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \hline -1 & +1 & \cdot & \cdot & +\frac{L_1}{\Delta t} & +\frac{M}{\Delta t} \\ \cdot & \cdot & -1 & +1 & +\frac{M}{\Delta t} & +\frac{L_2}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \\ e_c(t_0 + \Delta t) \\ e_d(t_0 + \Delta t) \\ \hline j_{ab}(t_0 + \Delta t) \\ j_{cd}(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline +\frac{1}{\Delta t}(L_1 j_{ab}(t_0) + M j_{cd}(t_0)) \\ +\frac{1}{\Delta t}(M j_{ab}(t_0) + L_2 j_{cd}(t_0)) \end{bmatrix}$$

Como acontece em outras análises envolvendo transformadores na análise nodal modificada, as estampas dos indutores e do acoplamento são independentes. E como no caso dos indutores não acoplados, na análise nodal simples é necessário calcular as correntes após análise, para usar no passo seguinte. A análise nodal modificada calcula tudo diretamente.

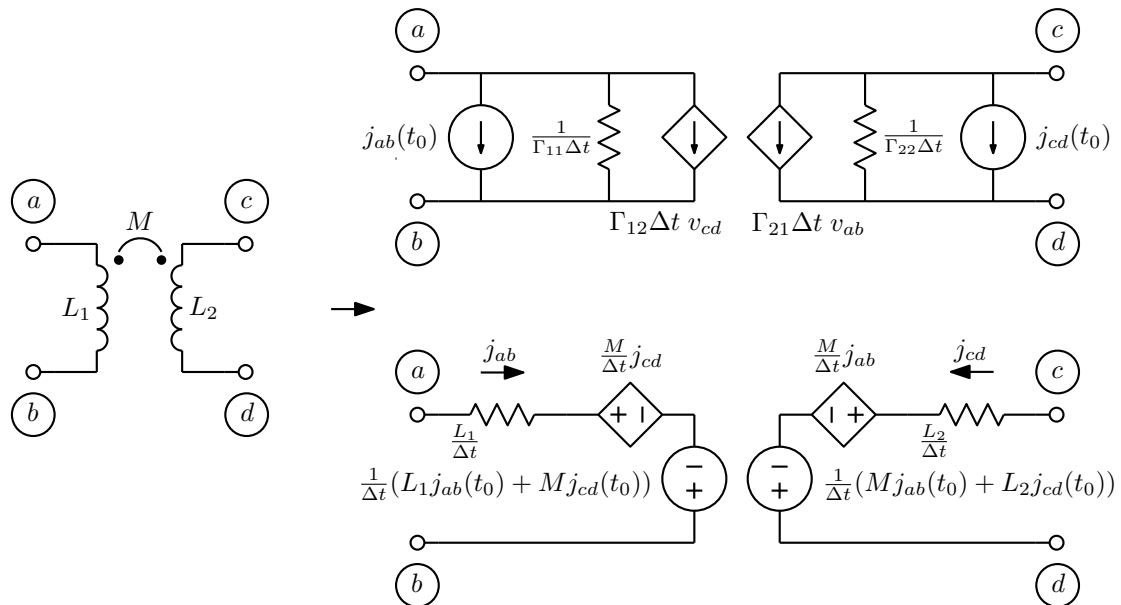


Figura 1.108: Transformador com dois enrolamentos no método “backward” de Euler.

Método “forward” de Euler:

$$\vec{j}(t_0 + \Delta t) \approx \vec{j}(t_0) + \Delta t[\Gamma]\vec{v}(t_0)$$

Só existe a forma para análise nodal simples, que gera fontes de corrente, com memória falsa das tensões. Para o caso de dois enrolamentos:

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \\ e_c(t_0 + \Delta t) \\ e_d(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_{ab}(t_0) - \Delta t(\Gamma_{11}v_{ab}(t_0) + \Gamma_{12}v_{cd}(t_0)) \\ +j_{ab}(t_0) + \Delta t(\Gamma_{11}v_{ab}(t_0) + \Gamma_{12}v_{cd}(t_0)) \\ -j_{cd}(t_0) - \Delta t(\Gamma_{21}v_{ab}(t_0) + \Gamma_{22}v_{cd}(t_0)) \\ +j_{cd}(t_0) + \Delta t(\Gamma_{21}v_{ab}(t_0) + \Gamma_{22}v_{cd}(t_0)) \end{bmatrix}$$

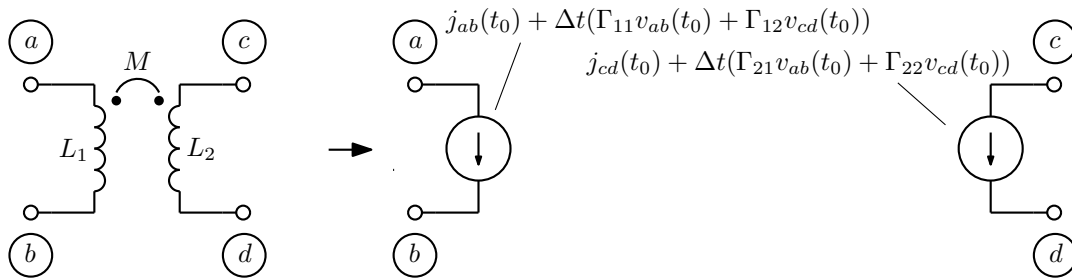


Figura 1.109: Transformador com dois enrolamentos no método “forward” de Euler.

Método dos trapézios:

$$\vec{j}(t_0 + \Delta t) \approx \vec{j}(t_0) + \frac{\Delta t}{2}[\Gamma](\vec{v}(t_0) + \vec{v}(t_0 + \Delta t))$$

$$\vec{v}(t_0 + \Delta t) \approx \frac{2}{\Delta t}[L](\vec{j}(t_0 + \Delta t) - \vec{j}(t_0)) - \vec{v}(t_0)$$

Para o caso de dois enrolamentos, correspondendo à figura 1.110, a estampa para análise nodal simples é:

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \begin{bmatrix} +\Gamma_{11}\frac{\Delta t}{2} & -\Gamma_{11}\frac{\Delta t}{2} & +\Gamma_{12}\frac{\Delta t}{2} & -\Gamma_{12}\frac{\Delta t}{2} \\ -\Gamma_{11}\frac{\Delta t}{2} & +\Gamma_{11}\frac{\Delta t}{2} & -\Gamma_{12}\frac{\Delta t}{2} & +\Gamma_{12}\frac{\Delta t}{2} \\ +\Gamma_{21}\frac{\Delta t}{2} & -\Gamma_{21}\frac{\Delta t}{2} & +\Gamma_{22}\frac{\Delta t}{2} & -\Gamma_{22}\frac{\Delta t}{2} \\ -\Gamma_{21}\frac{\Delta t}{2} & +\Gamma_{21}\frac{\Delta t}{2} & -\Gamma_{22}\frac{\Delta t}{2} & +\Gamma_{22}\frac{\Delta t}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \\ e_c(t_0 + \Delta t) \\ e_d(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_{ab}(t_0) - \frac{\Delta t}{2}(\Gamma_{11}v_{ab}(t_0) + \Gamma_{12}v_{cd}(t_0)) \\ +j_{ab}(t_0) + \frac{\Delta t}{2}(\Gamma_{11}v_{ab}(t_0) + \Gamma_{12}v_{cd}(t_0)) \\ -j_{cd}(t_0) - \frac{\Delta t}{2}(\Gamma_{21}v_{ab}(t_0) + \Gamma_{22}v_{cd}(t_0)) \\ +j_{cd}(t_0) + \frac{\Delta t}{2}(\Gamma_{21}v_{ab}(t_0) + \Gamma_{22}v_{cd}(t_0)) \end{bmatrix}$$

E para análise nodal modificada, correspondendo à segunda forma na figura 1.110, a estampa é:

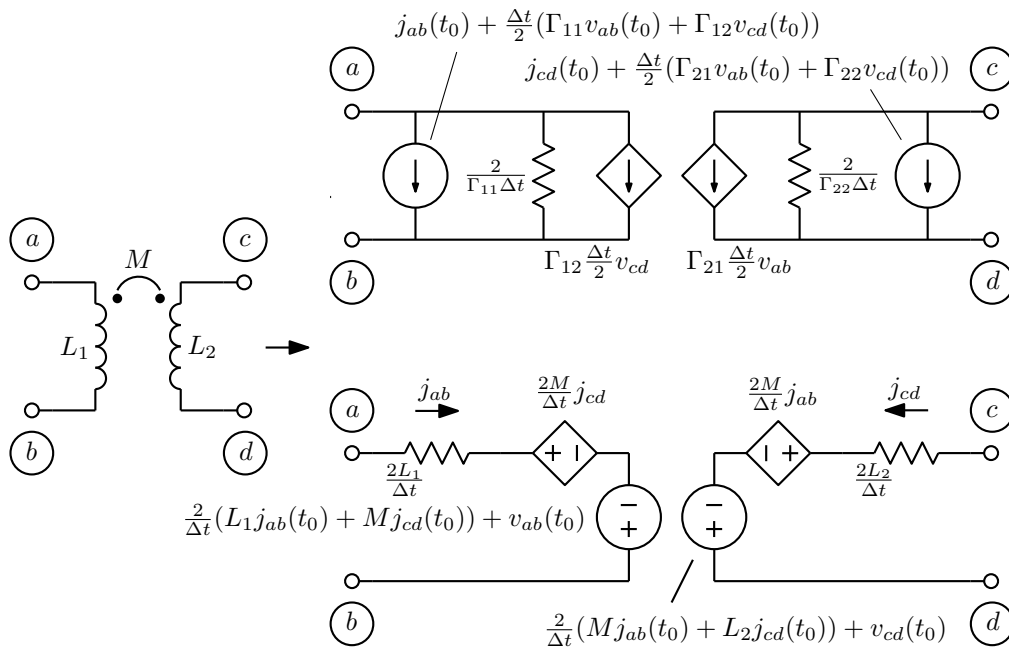


Figura 1.110: Transformador com dois enrolamentos no método dos trapézios.

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ x \\ y \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \hline -1 & +1 & \cdot & \cdot & +\frac{2L_1}{\Delta t} & +\frac{2M}{\Delta t} \\ \cdot & \cdot & -1 & +1 & +\frac{2M}{\Delta t} & +\frac{2L_2}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \\ e_c(t_0 + \Delta t) \\ e_d(t_0 + \Delta t) \\ \hline j_{ab}(t_0 + \Delta t) \\ j_{cd}(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline +\frac{2}{\Delta t} (L_1 j_{ab}(t_0) + M j_{cd}(t_0)) + v_{ab}(t_0) \\ +\frac{2}{\Delta t} (M j_{ab}(t_0) + L_2 j_{cd}(t_0)) + v_{cd}(t_0) \end{bmatrix}$$

1.15.7 Controle do passo

O “passo de integração” Δt determina a precisão da aproximação, e pode ser fixo ou variável. Métodos de passo variável são melhores para análise correta e eficiente de circuitos em que se misturem eventos rápidos e lentos. É necessário então um algoritmo para a variação adaptativa do passo, determinando passo menor durante eventos rápidos e passo maior quando não está havendo muita atividade.

No caso dos métodos de Euler, o erro em cada integração pode ser estimado por comparação com o que seria calculado com o método dos trapézios, mais preciso. O erro em um passo na integração de $f(t)$ é então a área do triângulo com base Δt e altura $f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Ver a figura 1.111.

$$\epsilon \approx \pm \frac{\Delta t (f(t_0 + \Delta t) - f(t_0))}{2}$$

Erros relativos podem ser calculados dividindo os erros assim calculados pelos valores atuais das variáveis integradas. Para evitar divisão por zero, os erros podem ser normalizados apenas se as variáveis

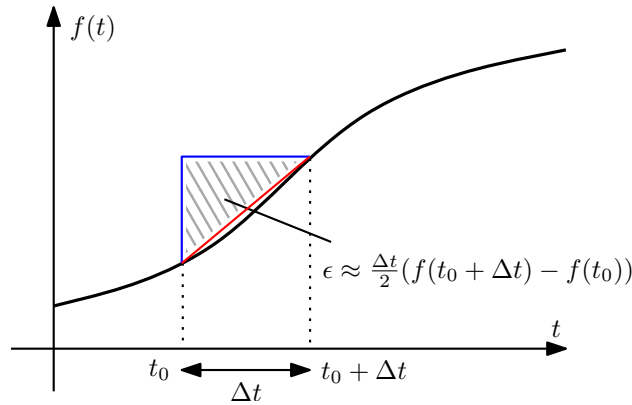


Figura 1.111: Erro de integração no método “backward” de Euler.

integradas forem maiores que 1, em módulo. O controle de passo pode então usar o algoritmo, no caso linear invariante no tempo⁵⁷:

1. Calcular os erros em todas as integrações:
 - Capacitores: $\epsilon \approx \frac{\Delta t}{2C}(j(t_0 + \Delta t) - j(t_0))$
 - Indutores: $\epsilon \approx \frac{\Delta t}{2L}(v(t_0 + \Delta t) - v(t_0))$
 - Transformadores: $\vec{\epsilon} \approx \frac{\Delta t}{2}[\Gamma](\vec{v}(t_0 + \Delta t) - \vec{v}(t_0))$.
2. Normalizar os erros, opcionalmente, dividindo erros em capacitores pela tensão atual e erros em indutores e transformadores pela corrente atual.
3. Achar o maior erro em módulo, $|\epsilon_{max}|$.
4. Se o maior erro é maior que um limite superior ϵ_{max} , dividir o passo por um fator α . Senão, se o maior erro é menor que um limite inferior ϵ_{min} , multiplicar o passo pelo fator α . Senão, manter o mesmo passo.
5. Verificar se o passo está entre limites máximo e mínimo especificados, e voltá-lo a estes limites se não estiver.
6. Se o passo diminuiu, a última análise está com erro excessivo e deve ser refeita.

Notar que os erros em capacitores são medidos por comparação de correntes (que devem então ser calculadas), e que erros em elementos indutivos são medidos por comparação de tensões. Valores adequados para os parâmetros a usar podem ser $\alpha = \sqrt{2}$, com $\epsilon_{max} = 1.5\epsilon_{med}$ e $\epsilon_{min} = 0.67\epsilon_{med}$. Assim se o erro cair um pouco abaixo de ϵ_{min} ou pouco acima de ϵ_{max} deverá ficar próximo do outro limite no passo seguinte, pois o erro é proporcional ao quadrado do passo. Evita-se assim muitas trocas de passo, com recálculos sempre que o passo diminui. Também é possível estimar o passo necessário para colocar o erro no valor ϵ_{med} diretamente, fazendo:

$$\Delta t_{novo} = \Delta t_{atual} \sqrt{\frac{\epsilon_{med}}{\epsilon_{max}}}$$

⁵⁷Método implementado no programa MNAV.

Isto é particularmente efetivo quando o passo deve ser reduzido, evitando-se várias análises abandonadas, e também permite acelerar a análise quando o passo é aumentado. É possível aplicar o erro calculado como descrito a outros métodos de integração mais precisos, mas o erro fica superestimado e o passo menor que o necessário. É possível definir um processo semelhante para o método dos trapézios, com o erro calculado por diferença entre áreas sob parábolas interpoladas em grupos de 2 intervalos de tempo e os valores calculados pelo método. Resulta um erro por volta de 6 vezes menor que o erro do método “backward” de Euler. Ver o método de Adams-Moulton de ordem 3, adiante, que faz a interpolação parabólica, e a discussão sobre erro em métodos multipasso.

Outro método, aplicável diretamente a todos os métodos de integração, pode ser simplesmente exigir que todas as variáveis tenham variações máximas normalizadas dentro de certa faixa dentro de um passo. O controle é similar ao do caso discutido, com dois limites de erro e o passo sendo ajustado para que o erro máximo fique entre eles, com a última análise abandonada sempre que o passo for reduzido.

Pode ser útil diminuir o passo na análise de circuitos não lineares se o método de Newton-Raphson não convergir, embora isto possa apenas refinar o instante de tempo em que a não convergência ocorre.

Em um circuito não linear, um grande número de iterações no método de Newton-Raphson indica que o passo está grande demais e um número pequeno que poderia ser usado um passo maior. O passo pode então ser ajustado de acordo com o número de iterações que estão sendo necessárias para a convergência.

Pode haver alguma comunicação com as fontes independentes presentes no circuito. Por exemplo, se uma fonte de tensão variar acima do limite tolerado atual, a análise pode ser feita diretamente com um passo reduzido, evitando-se uma análise que seria rejeitada por variação excessiva. A comunicação também pode ser usada para evitar perda de eventos, como acontece se um passo grande ignorar um pulso gerado por uma fonte dentro do intervalo do passo. Uma fonte pulsada poderia comandar a ocorrência de análises em todos os instantes em que ela muda de inclinação.

1.15.8 Artefatos devidos a memórias falsas

Os métodos “forward” de Euler e dos trapézios geram nos componentes memórias falsas sobre o comportamento em $t = t_0$. Um capacitor tem sua tensão dependendo da corrente anterior e indutores tem sua corrente dependendo da tensão anterior. O circuito da figura 1.112 ilustra um tipo de artefato que frequentemente se observa devido a isto ⁵⁸. Neste circuito há um instante em que a corrente no indutor se anula, quando o diodo corta, mas a tensão sobre o indutor não se anula. Usando o método dos trapézios, o modelo gerado cria uma tensão sobre o indutor proporcional à tensão anterior sobre ele, invertida. O mesmo se repete nos ciclos seguintes, até que o diodo volta a conduzir. O efeito é uma oscilação de alta frequência na tensão sobre o indutor, inexistente na realidade. A figura 1.113 mostra o que acontece, em uma simulação com um diodo ideal.

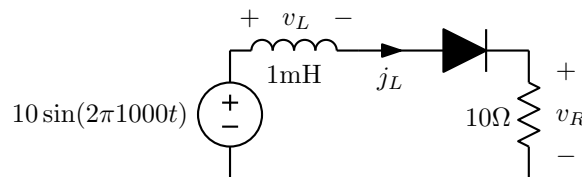


Figura 1.112: Circuito que gera artefato no método dos trapézios

O método “Forward” de Euler gera artefato ainda mais sério neste circuito, pois tenta forçar corrente no diodo cortado, sem um resistor em paralelo, gerando um sistema singular. O método “backward” de Euler funciona corretamente.

⁵⁸Ver adiante como é feita a análise no tempo de circuitos não lineares.

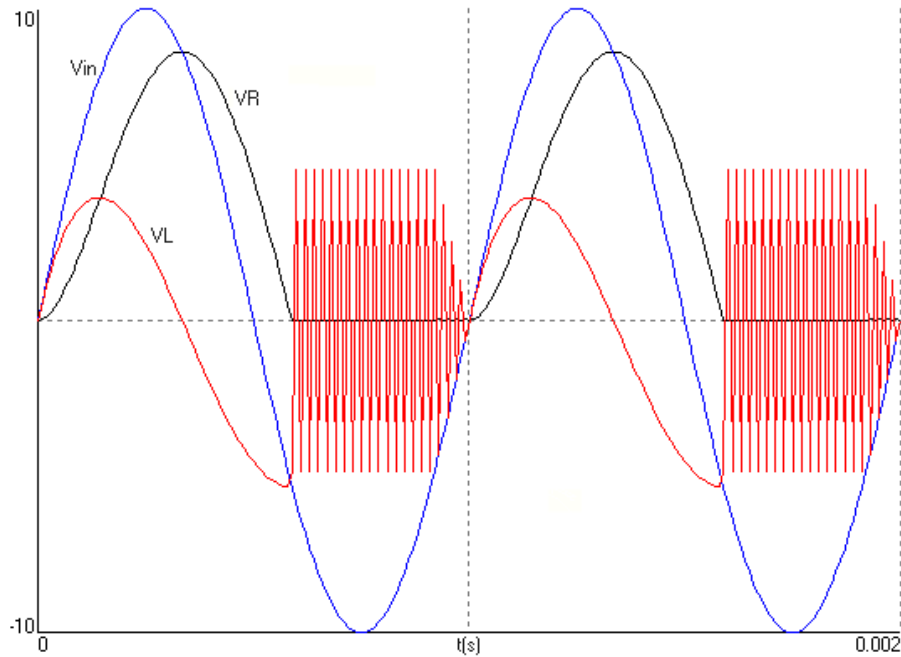


Figura 1.113: Artefato gerado pelo método dos trapézios na tensão sobre o indutor quando a corrente é zerada mas a tensão se mantém. São mostradas a tensão de entrada, a tensão sobre o resistor, proporcional à corrente, e a tensão sobre o indutor.

Sempre que um indutor ficar ligado em alta impedância oscilações similares em sua tensão (e na sua corrente se o circuito não for totalmente aberto) podem ocorrer. No caso dual, sempre que um capacitor ficar ligado em baixa impedância oscilações em sua corrente (e na sua tensão se o capacitor não estiver em curto-circuito) podem ocorrer. O efeito é similar ao de se ter um capacitor em paralelo com cada indutor, ou um indutor em série com cada capacitor. Quando estes elementos não existem explicitamente, a oscilação fica com frequência $\frac{1}{2\Delta t}$. É interessante notar que o método dos trapézios “comprime” a escala de frequências de modo a que não apareça na simulação nenhuma frequência maior que esta. Isto pode ser demonstrado observando-se a equação da integração trapezoidal em transformada Z e comparando com uma integração contínua em transformada de Laplace, para $s = j\omega$:

$$\begin{aligned}
 y(t_0 + \Delta t) &= y(t_0) + \frac{\Delta t}{2}(x(t_0) + x(t_0 + \Delta t)) \\
 Y(z) &= z^{-1}Y(z) + \frac{\Delta t}{2}(z^{-1}X(z) + X(z)) \\
 \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{\Delta t}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \\
 \frac{1}{j\omega_s} &= \frac{\Delta t}{2} \frac{1 + e^{-j\omega_z \Delta t}}{1 - e^{-j\omega_z \Delta t}} \\
 j\omega_s &= \frac{2}{\Delta t} \frac{e^{j\omega_z \frac{\Delta t}{2}} - e^{-j\omega_z \frac{\Delta t}{2}}}{e^{j\omega_z \frac{\Delta t}{2}} + e^{-j\omega_z \frac{\Delta t}{2}}} = \frac{2}{\Delta t} j \frac{2 \sin \frac{\omega_z \Delta t}{2}}{2 \cos \frac{\omega_z \Delta t}{2}} = j \frac{2}{\Delta t} \tan \frac{\omega_z \Delta t}{2}
 \end{aligned}$$

A equação diz que a frequência que se tenta obter, ω_s , é mapeada pela integração trapezoidal na

frequência:

$$\omega_z = \frac{2}{\Delta t} \arctan \frac{\omega_s \Delta t}{2}$$

Uma frequência ω_s infinita é mapeada em $\omega_z = \frac{\pi}{\Delta t}$, que tem período $2\Delta t$.

1.15.9 Efeitos em um oscilador LC

A figura 1.114 mostra o que ocorre na simulação da tensão sobre um tanque LC paralelo com valores unitários, com uma tensão inicial unitária sobre o capacitor, com 50 pontos por ciclo. O método “backward” gera um decaimento. O método “forward” gera um crescimento, na mesma frequência. O método dos trapézios gera uma senoide, com frequência um pouco menor que a correta, devido à compressão descrita acima. Quando o capacitor é modelado pelo método “backward” e o indutor pelo método “forward”, obtém-se uma senoide perfeita, com frequência um pouco maior que a correta⁵⁹.

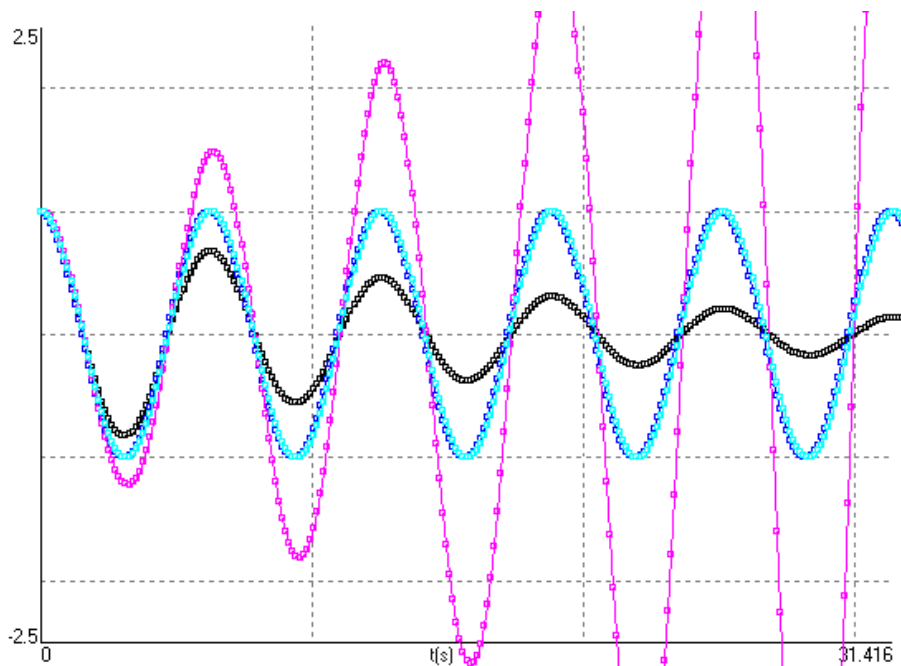


Figura 1.114: Resultados da simulação da tensão sobre um tanque LC. A curva que decai é a do método “backward”. A que cresce a do “forward”. As duas senoides são as do método dos trapézios e da combinação “backward”-“forward”.

1.15.10 Método dos trapézios modificado, ou “Método θ ”

É possível obter um método de integração que varia continuamente entre os métodos “forward” e “backward” de Euler, passando pelo método dos trapézios, aproximando as integrações como:

$$y(t_0 + \Delta t) \approx y(t_0) + \Delta t(\theta f(t_0 + \Delta t) + (1 - \theta)f(t_0))$$

⁵⁹Uma análise similar à feita para a integração trapezoidal revela que a frequência vale $\omega_z = \frac{2}{\Delta t} \arcsin \frac{\omega_s \Delta t}{2}$.

Assim com $\theta = 0$ tem-se o método “forward” de Euler, com $\theta = 1$ o método “backward” de Euler, e com $\theta = \frac{1}{2}$ o método dos trapézios. Valores intermediários de θ levam a métodos com propriedades intermediárias. Por exemplo, com θ entre $\frac{1}{2}$ e 1 os métodos produzem oscilações decrescentes como artefatos, e precisão maior que o método “backward” de Euler.

Os modelos para os elementos tem a mesma estrutura dos obtidos para o método dos trapézios, exceto no caso $\theta = 0$, que recai no método “forward” de Euler quando os elementos resistivos desaparecem, restando apenas fontes independentes. Basta substituir nos modelos apresentados os termos “ $\frac{1}{2}$ ” por θ nos termos correspondentes ao integrando em $t_0 + \Delta t$, para resistores e fontes controladas e por $1 - \theta$ para para o integrando em t_0 . A maior aplicação do método é gerar aproximações entre a “backward” de Euler e a dos trapézios, com a possibilidade de variar θ ao longo da análise para controlar a geração de artefatos. Para um capacitor linear invariante no tempo, as equações do método teta são:

$$v(t_0 + \Delta t) \approx v(t_0) + \frac{\Delta t}{C} (\theta j(t_0 + \Delta t) + (1 - \theta)j(t_0))$$

$$j(t_0 + \Delta t) \approx \frac{C}{\theta \Delta t} (v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)) - \frac{1 - \theta}{\theta} j(t_0)$$

O modelo, desde que $\theta \neq 0$ para o equivalente Norton, fica com a forma e as estampas:

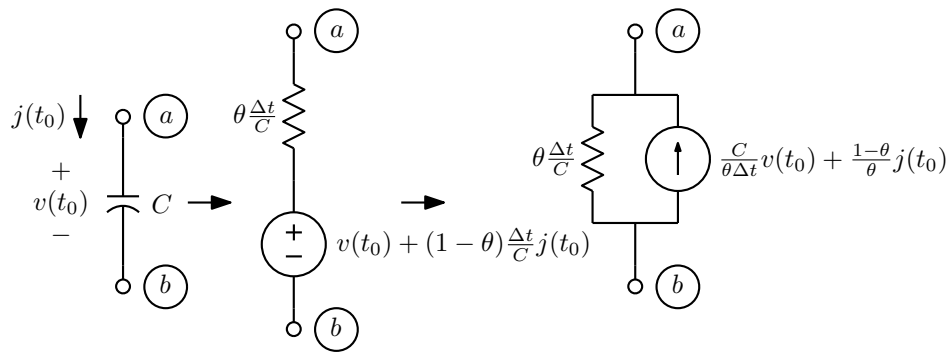


Figura 1.115: Capacitor no método teta.

$$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \begin{bmatrix} +\frac{C}{\theta \Delta t} & -\frac{C}{\theta \Delta t} \\ -\frac{C}{\theta \Delta t} & +\frac{C}{\theta \Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{C}{\theta \Delta t} v(t_0) + \frac{1 - \theta}{\theta} j(t_0) \\ -\frac{C}{\theta \Delta t} v(t_0) - \frac{1 - \theta}{\theta} j(t_0) \end{bmatrix}$$

Para um indutor linear invariante no tempo, as equações são:

$$j(t_0 + \Delta t) \approx j(t_0) + \frac{\Delta t}{L} (\theta v(t_0 + \Delta t) + (1 - \theta)v(t_0))$$

$$v(t_0 + \Delta t) \approx \frac{L}{\theta \Delta t} (j(t_0 + \Delta t) - j(t_0)) - \frac{1 - \theta}{\theta} v(t_0)$$

E os modelos e estampas para os dois casos, para $\theta \neq 0$ no equivalente Thévenin, são:

$$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \begin{bmatrix} +\frac{\theta \Delta t}{L} & -\frac{\theta \Delta t}{L} \\ -\frac{\theta \Delta t}{L} & +\frac{\theta \Delta t}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j(t_0) - \frac{(1 - \theta)\Delta t}{L} v(t_0) \\ +j(t_0) + \frac{(1 - \theta)\Delta t}{L} v(t_0) \end{bmatrix}$$

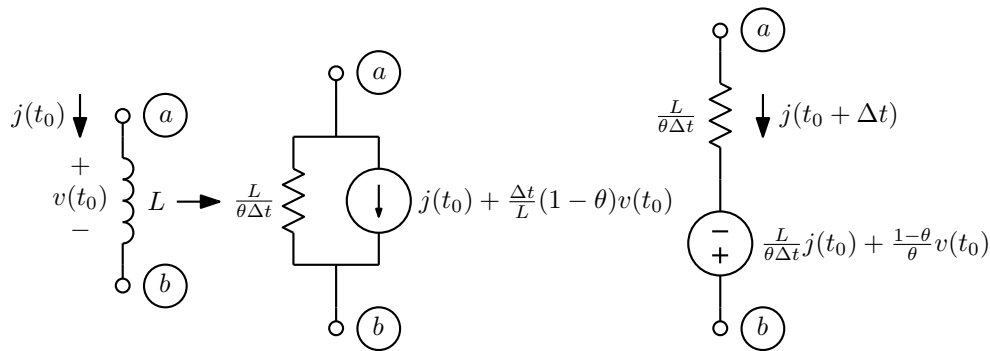


Figura 1.116: Indutor no método θ .

$$\begin{matrix} a \\ b \\ x \end{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & +1 & +\frac{L}{\theta\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t_0 + \Delta t) \\ e_b(t_0 + \Delta t) \\ j(t_0 + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ +\frac{L}{\theta\Delta t}j(t_0) + \frac{1-\theta}{\theta}v(t_0) \end{bmatrix}$$

Um procedimento análogo leva aos modelos para transformadores.

Exemplo: Seja o mesmo circuito da figura 1.112 que gera oscilações com o método dos trapézios, analisado com o método θ , com $\theta = 0.55$. O resultado é a atenuação das oscilações na tensão sobre o indutor, v_L , como mostrado na figura 1.117.

1.15.11 Métodos multipasso⁶⁰

1.15.11.1 Métodos de Adams-Bashforth

O método “forward” de Euler ser estendido, usando-se polinômios de ordem mais alta da variável $f(t)$ para interpolá-la antes de $t = t_0$ e obter valores explícitos para a integral. Pontos conhecidos em $t = t_0$ e antes são usados para interpolar uma curva polinomial, e sua integral a partir de t_0 é calculada. A figura 1.118 mostra as duas possibilidades seguintes ao método “forward” de Euler. As interpolações usando reta e parábola, ordens 2 e 3, geram as aproximações:

$$y(t_0 + \Delta t) \approx y(t_0) + \Delta t \left(\frac{3}{2}f(t_0) - \frac{1}{2}f(t_0 - \Delta t) \right)$$

$$y(t_0 + \Delta t) \approx y(t_0) + \Delta t \left(\frac{23}{12}f(t_0) - \frac{4}{3}f(t_0 - \Delta t) + \frac{5}{12}f(t_0 - 2\Delta t) \right)$$

Estes métodos geram modelos como os mostrados para o método “forward” de Euler, como fontes de tensão para capacitores e fontes de corrente para indutores, como mostrado na figura 1.119 para o caso de ordem 2. Transformadores geram conjuntos de fontes de corrente.

1.15.11.2 Métodos de Adams-Moulton

O método “backward” de Euler pode também ser estendido com polinômios de ordem maior usados para interpolar $f(t)$ e gerar valores implícitos para a integral, como mostrado na figura 1.120. A aproximação

⁶⁰Material opcional.

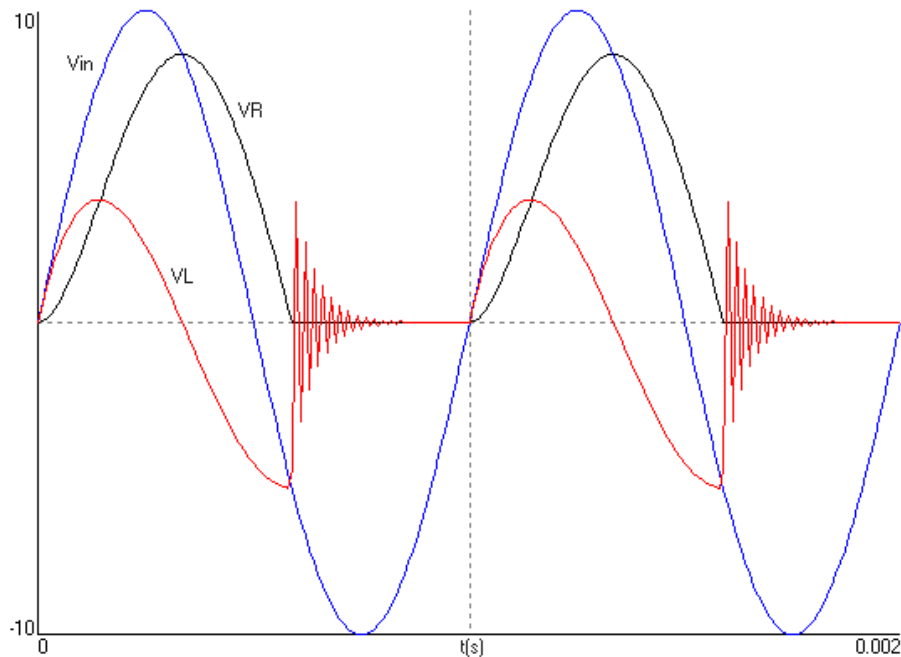


Figura 1.117: Resultado da análise do circuito da figura 1.112 pelo método θ com $\theta = 0.55$.

usando uma constante, de ordem 1, é o método “backward” de Euler, e usando uma reta, de ordem 2, é o método dos trapézios. As próximas, usando uma parábola e uma curva cúbica interpoladas até $t_0 + \Delta t$, ordens 3 e 4, levam a:

$$y(t_0 + \Delta t) \approx y(t_0) + \Delta t \left(\frac{5}{12} f(t_0 + \Delta t) + \frac{2}{3} f(t_0) - \frac{1}{12} f(t_0 - \Delta t) \right)$$

$$y(t_0 + \Delta t) \approx y(t_0) + \Delta t \left(\frac{3}{8} f(t_0 + \Delta t) + \frac{19}{24} f(t_0) - \frac{5}{24} f(t_0 - \Delta t) + \frac{1}{24} f(t_0 - 2\Delta t) \right)$$

Os modelos gerados são similares aos dos métodos “backward” de Euler e dos trapézios. A figura 1.121 mostra os modelos para capacitor e indutor no método de ordem 3. Transformadores são tratados de forma similar ao caso do método dos trapézios. Notar que as memórias de tensão são parte das estampas dos indutores apenas, sem influência da indutância mútua.

1.15.11.3 Passo variável

Se o passo for variável, é possível obter versões mais gerais destes métodos para Δt variável. Seja o método de Adams-Bashforth de ordem 2, que envolve três pontos, $(t_1, f(t_1))$, $(t_2, f(t_2))$ e $(t_3, f(t_3))$. Assuma-se que a função a integrar é uma reta:

$$f(t) = at + b$$

$$y(t_3) = y(t_2) + \int_{t_2}^{t_3} f(t) dt = y(t_2) + \frac{a}{2} (t_3^2 - t_2^2) + b(t_3 - t_2)$$

Os coeficientes da reta que passa por $(t_1, f(t_1))$ e $(t_2, f(t_2))$ são as soluções do sistema:

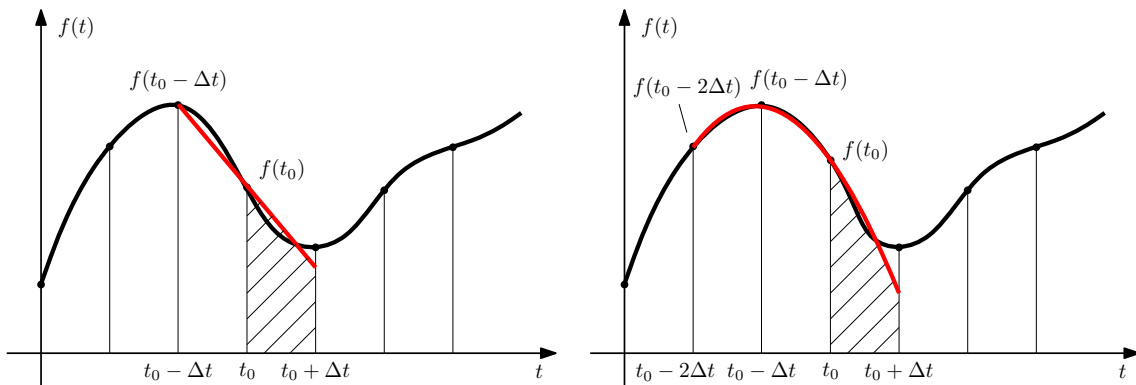


Figura 1.118: Integrações explícitas de Adams-Bashforth de ordens 2 e 3, que usam retas e parábolas.

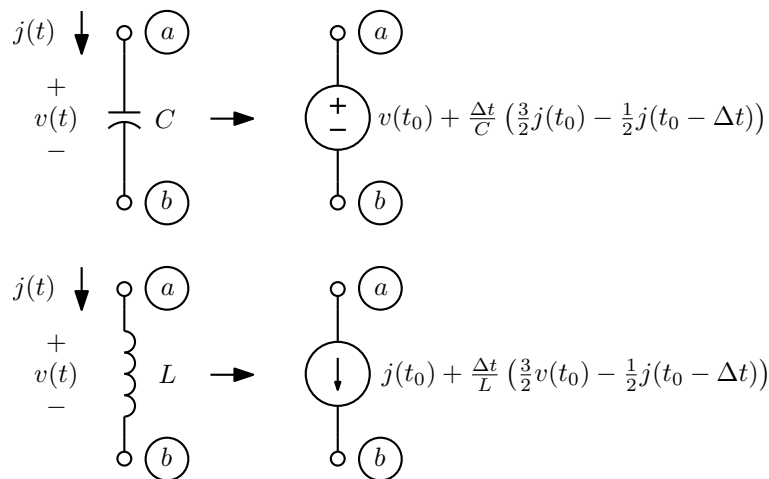


Figura 1.119: Capacitor e indutor no método de Adams-Bashforth de ordem 2.

$$\begin{bmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} a = \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} \\ b = \frac{t_1 f(t_2) - t_2 f(t_1)}{t_1 - t_2} \end{cases}$$

Substituindo os coeficientes a e b calculados na integral, e fazendo $t_1 = t_0 - \Delta t_a$, $t_2 = t_0$ e $t_3 = t_0 + \Delta t_b$, com Δt_a sendo o passo anterior e Δt_b o novo, vem a fórmula de Adams-Bashforth para passo variável de ordem 2:

$$y(t_0 + \Delta t_b) \approx y(t_0) + \Delta t_b \left(\frac{2\Delta t_a + \Delta t_b}{2\Delta t_a} f(t_0) - \frac{\Delta t_b}{2\Delta t_a} f(t_0 - \Delta t_a) \right)$$

Fazendo um procedimento semelhante, também envolvendo três pontos, se obtém a fórmula de Adams-Moulton, para o caso de ordem 3. Assume-se que a função a integrar é uma parábola:

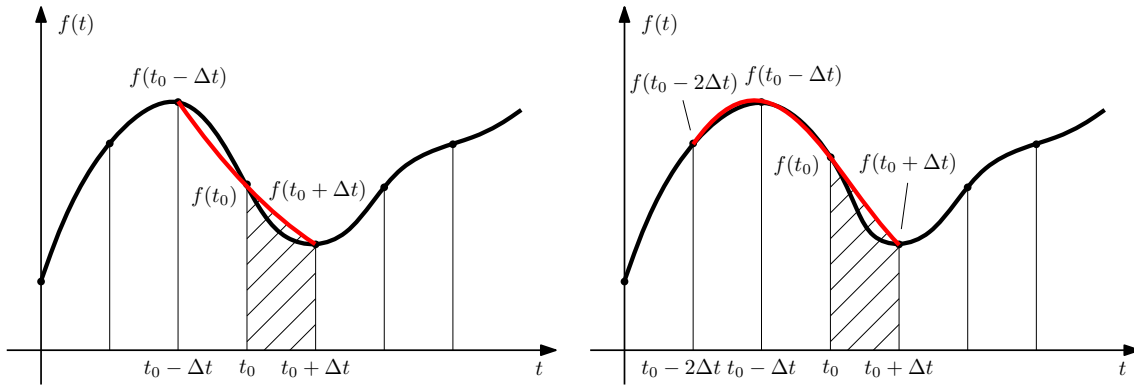


Figura 1.120: Integrações implícitas de Adams-Moulton de ordens 3 e 4, usando parábolas e cúbicas.

$$f(t) = at^2 + bt + c$$

$$y(t_3) = y(t_2) + \int_{t_2}^{t_3} f(t)dt = y(t_2) + \frac{a}{3}(t_3^3 - t_2^3) + \frac{b}{2}(t_3^2 - t_2^2) + c(t_3 - t_2)$$

Os coeficientes da parábola que passa por $(t_1, f(t_1))$, $(t_2, f(t_2))$ e $(t_3, f(t_3))$ são as soluções do sistema:

$$\begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ f(t_3) \end{bmatrix}$$

As soluções são complicadas. Substituindo os coeficientes a , b e c calculados na integral, e fazendo $t_1 = t_0 - \Delta t_a$, $t_2 = t_0$ e $t_3 = t_0 + \Delta t_b$, com Δt_a sendo o passo anterior e Δt_b o novo, vem a fórmula de Adams-Moulton para passo variável de ordem 3:

$$y(t_0 + \Delta t_b) \approx y(t_0) + \Delta t_b \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta t_b}{6(\Delta t_a + \Delta t_b)} \right) f(t_0 + \Delta t_b) + \left(\frac{\Delta t_b}{6\Delta t_a} + \frac{1}{2} \right) f(t_0) + \left(\frac{\Delta t_b}{6(\Delta t_a + \Delta t_b)} - \frac{\Delta t_b}{6\Delta t_a} \right) f(t_0 - \Delta t_a) \right)$$

É possível também aplicar estes métodos com ordem variável, aumentando a ordem até certo limite à medida em que mais amostras sejam calculadas, com algum critério para reduzir o passo no início de transientes abruptos. Em um sistema de passo variável a formulação de passo variável pode ser usada, ou valores anteriores com passo fixo podem ser interpolados.

1.15.11.4 Estabilidade dos métodos de Adams

A estabilidade destes métodos pode ser examinada vendo-se onde o interior do círculo unitário $z = e^{j\omega_z \Delta t}$ é mapeado no plano complexo, como feito para o método dos trapézios. O resultado são curvas que indicam o que ocorre com as frequências naturais do sistema contínuo quando discretizado pelos métodos. Frequências naturais fora da região mapeada pelo interior do círculo, deformada pela transformação, geram sinais crescentes no tempo, instabilizando o sistema. Por exemplo, o caso de Adams-Moulton de ordem 3 resulta no mapeamento:

$$s = \frac{z - 1}{\frac{5}{12}z + \frac{2}{3} - \frac{1}{12}z^{-1}}, \quad z = e^{j\omega_z \Delta t}$$

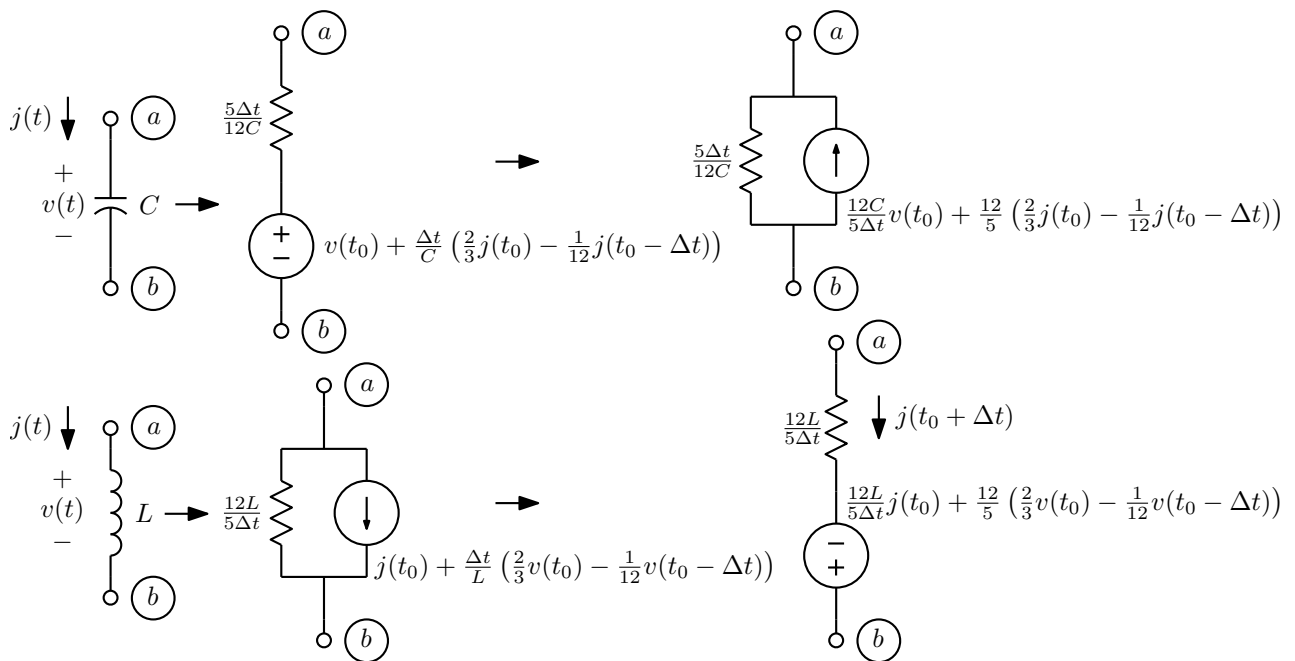


Figura 1.121: Capacitor e indutor no método de Adams-Moulton de ordem 3.

A figura 1.122 mostra os mapeamentos resultantes dos primeiros métodos de Adams-Bashforth e de Adams-Moulton. Observa-se que apenas os métodos “backward” de Euler e dos trapézios mantêm sempre estáveis sistemas estáveis. As curvas dizem, por exemplo, que o método “backward” de Euler gera oscilações perpétuas para frequências naturais em $+1 \pm j$, e o método “forward” de Euler as gera para frequências naturais em $-1 \pm j$, com $\Delta t = 1$ s ⁶¹.

1.15.11.5 Controle do passo

A ideia usada para o controle do passo no método “backward” de Euler pode ser estendida aos métodos de Adams, usando-se como mais correto o método de ordem seguinte⁶². Para o método dos trapézios, por exemplo, o erro seria calculado como a diferença entre a integração usando uma reta e a integração usando uma parábola, como mostrado na figura 1.123, assumindo que o passo não muda. Usando a fórmula de Adams-Moulton de ordem 3, observa-se que o erro é aproximadamente 6 vezes menor que o erro do método “backward”. Parece possível ignorar a amostra em $t_0 - \Delta t$ sem muito erro, e controlar o passo da mesma forma descrita para o método “backward”, com apenas um fator de escala de 1/6 no erro.⁶³

⁶¹Um circuito RLC paralelo com $C = 1$ F, $L = 0.5$ H e $R = -0.5 \Omega$, que deveria ser instável por ter frequências naturais em $1 \pm j$, resulta em oscilações perpétuas com período de 4 s com o método “backward” de Euler com $\Delta t = 1$ s. Isto pode ser verificado fazendo-se $s = \frac{z-1}{\Delta t} = 1 \pm j$. Resolvendo resulta $z = e^{j\omega z} = \pm j$, ou $\omega_z = \pm \frac{\pi}{2}$ rad/s, ou $f_z = \pm \frac{1}{4}$ Hz.

⁶²A forma mais convencional de calcular este erro envolve derivadas da função $f(t)$ no intervalo da integração. O “erro local de truncamento” (LTE, do inglês) vale $\frac{\Delta t^3}{12} f''(t)$ para trapézios, e $\frac{\Delta t^2}{2} f'(t)$ para os métodos de Euler. Com as derivadas estimadas por diferenças finitas entre pontos calculados, o resultado é idêntico ao do método discutido.

⁶³A área hachurada pode ser calculada pelo método da “quadratura da parábola”, de Arquimedes (3º século AC). A área da parábola abc vale $\frac{4}{3}$ da área do triângulo abc , que é $\frac{\Delta t}{2}(f(t_0 + \Delta t) - 2f(t_0) + f(t_0 - \Delta t))$. A área da parábola bc tem $\frac{1}{8}$ desta área, o que dá a fórmula deduzida.

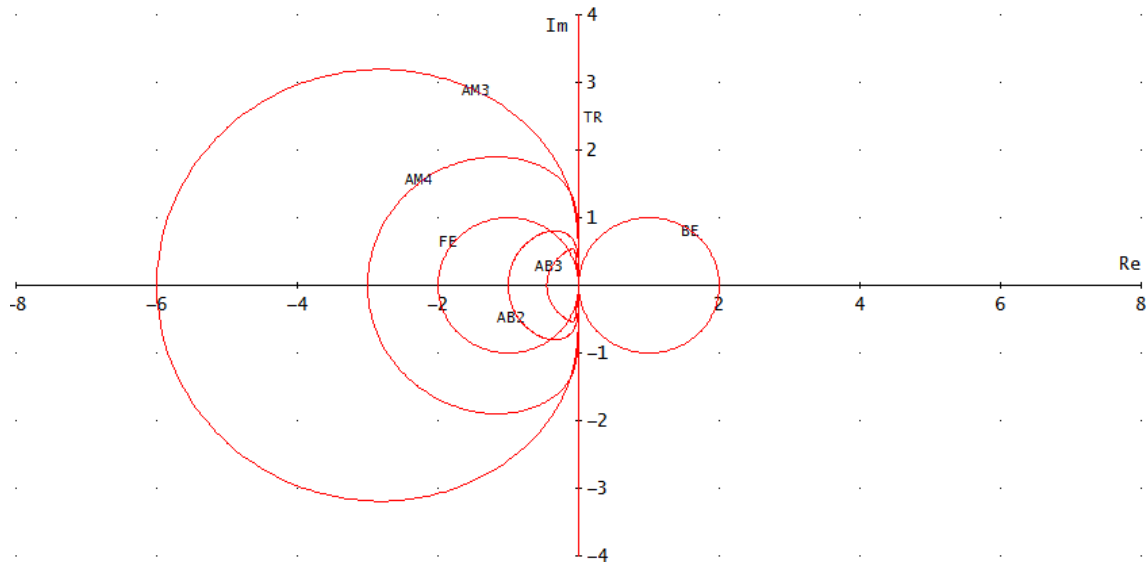


Figura 1.122: Mapeamentos do círculo unitário para vários métodos de Adams-Moulton e Adams-Bashforth. As escalas estão divididas por Δt . A região estável fica à esquerda nas proximidades da origem.

$$\begin{aligned} \epsilon &\approx \Delta t \left(\frac{1}{2}f(t_0 + \Delta t) + \frac{1}{2}f(t_0) \right) - \Delta t \left(\frac{5}{12}f(t_0 + \Delta t) + \frac{2}{3}f(t_0) - \frac{1}{12}f(t_0 - \Delta t) \right) \\ &= \frac{\Delta t}{12} (f(t_0 + \Delta t) - 2f(t_0) + f(t_0 - \Delta t)) \\ &\approx \frac{\Delta t}{12} (f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)), \text{ se } f(t_0) \approx f(t_0 - \Delta t) \end{aligned}$$

Seria mais correto usar a fórmula de Adams-Moulton para passo variável. Resultam as fórmulas:

$$\begin{aligned} \epsilon &\approx \Delta t_b^2 \left(\frac{\Delta t_a(f(t_0 + \Delta t_b) - f(t_0)) - \Delta t_b(f(t_0) - f(t_0 - \Delta t_a))}{6\Delta t_a(\Delta t_a + \Delta t_b)} \right) \\ &\approx \Delta t_b^2 \left(\frac{(f(t_0 + \Delta t_b) - f(t_0))}{6(\Delta t_a + \Delta t_b)} \right), \text{ se } f(t_0) \approx f(t_0 - \Delta t_a) \end{aligned}$$

Um sério problema é que em situações onde as oscilações parasitas criadas pelo método, de período $2\Delta t$, ocorram, o erro fica superestimado, na forma aproximada ou mais ainda na forma completa, e o passo é logo reduzido a um valor muito pequeno se a redução do passo não eliminar as oscilações⁶⁴. As oscilações podem ser reduzidas pela introdução de perdas que quebrem ciclos capacitivos e cortes indutivos, com resistores em série com capacitores e em paralelo com indutores.

Para o método θ , pode-se também estimar o erro por comparação com o método de Adams-Moulton de ordem 3. Resulta:

⁶⁴Notar que a oscilação ocorre justamente na função $f(t)$ que mede o erro, e então parece possível detetar a oscilação e ignorar a medida de erro para um indutor ou capacitor se $f(t_0 + \Delta t) \approx -f(t_0) \approx f(t_0 - \Delta t)$, mas o problema se complica se a oscilação variar de amplitude.

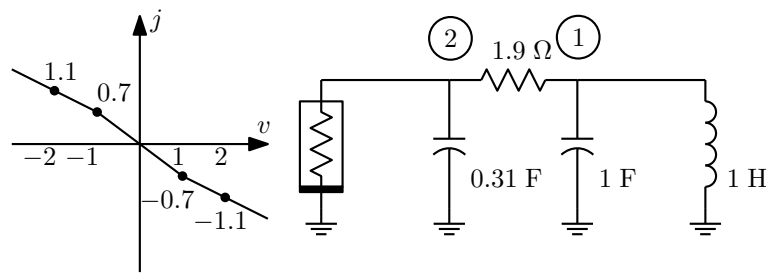


Figura 1.124: Circuito de Chua, normalizado.

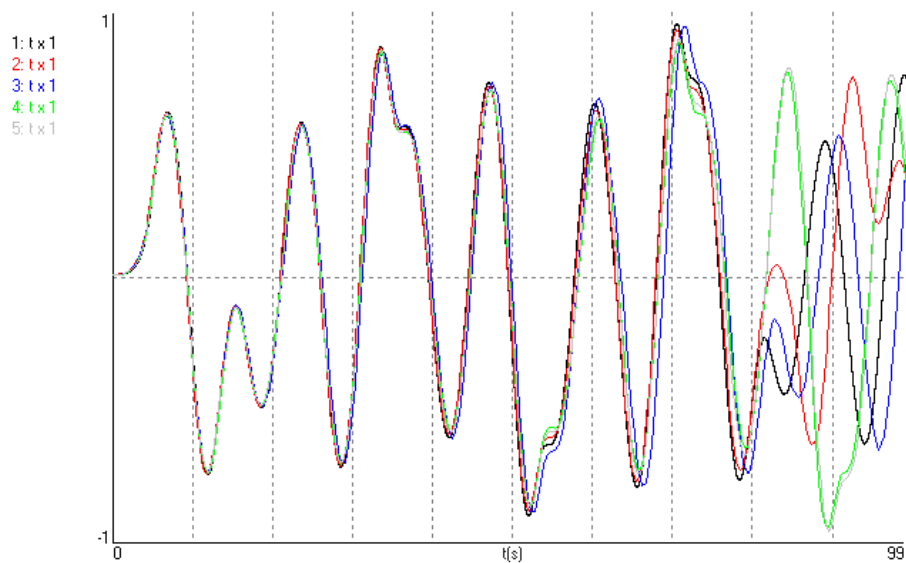


Figura 1.125: Comparação entre a solução ideal do circuito de Chua no nó 1 (1) e aproximações por trapézios com passo variável com várias fórmulas para o erro, centrado em 0.003. 2) Passo variável. 3) Passo fixo. 4) Passo variável aproximada. 5) Passo fixo aproximada.

Os métodos multipasso de Adams-Bashforth e Adams-Moulton tem problemas com “memórias falsas”, e quando usados para capacitores requerem o cálculo e armazenamento das correntes neles. Ambos tem problemas de estabilidade semelhantes aos do método “forward” de Euler, no sentido em que instabilizam oscilações senoidais perpétuas. Um problema particularmente sério é que circuitos que contém ciclos de capacitores e fontes de tensão ou cortes de indutores e fontes de corrente ficam instáveis nos métodos de Adams-Moulton de ordem maior que 2, pois uma “frequência natural infinita”⁶⁷ fica fora da região estável. Nos métodos de Adams-Bashforth estes casos nem são simuláveis pois os modelos são singulares. Estas inconveniências os tornam pouco práticos para uso geral na simulação de circuitos.

⁶⁷Um ciclo de capacitores com uma pequena indutância em série gera frequências naturais imaginárias em alta frequência. Sem a indutância pode-se dizer que gera “frequências naturais no infinito”. O caso dual ocorre com cortes de indutores.

1.15.12 Métodos de Gear

Os métodos multipasso de Gear⁶⁸ geram uma série de aproximações cada vez melhores para integrações, usando valores anteriores da função a integrar em vez de valores da função integrada. Isto evita o efeito de “memória falsa” dos métodos “forward” de Euler, dos trapézios e dos de Adams, embora introduza outros tipos de erro, pois continuam existindo memórias indevidas, mesmo que da variável correta. Os métodos tem também boa estabilidade. O problema é encontrar uma forma aproximada de resolver:

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f(t) dt$$

sem precisar usar valores anteriores de $f(t)$ na equações de integração numérica. Assume-se que $f(t)$ seja uma função polinomial do tempo, por conveniência com a origem do tempo em t_0 :

$$f(t) = k_n(t - t_0)^n + k_{n-1}(t - t_0)^{n-1} + \dots + k_0$$

e que a função integral possa ser escrita como:

$$y(t) = a_0 y(t - \Delta t) + a_1 y(t - 2\Delta t) + a_2 y(t - 3\Delta t) + \dots + b \Delta t f(t)$$

Procura-se então uma solução exata, que independa dos coeficientes k_i . Com a aproximação polinomial, a integral de $f(t)$ vale:

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f(t) dt = y(t_0) + \frac{k_n}{n+1} \Delta t^{n+1} + \frac{k_{n-1}}{n} \Delta t^n + \dots + k_0 \Delta t$$

que deve ser igual a:

$$y(t_0 + \Delta t) = a_0 y(t_0) + a_1 y(t_0 - \Delta t) + a_2 y(t_0 - 2\Delta t) + \dots + b \Delta t f(t_0 + \Delta t)$$

Caso de primeira ordem:

$$\begin{aligned} y(t_0) + k_0 \Delta t &= a_0 y(t_0) + b \Delta t k_0 \\ a_0 &= 1; \quad b = 1 \\ y(t_0 + \Delta t) &= y(t_0) + \Delta t f(t_0 + \Delta t) \end{aligned}$$

É uma aproximação igual à do método “backward” de Euler.

Caso de segunda ordem:

$$y(t_0) + \frac{1}{2} k_1 \Delta t^2 + k_0 \Delta t = a_0 y(t_0) + a_1 \left(y(t_0) + \frac{1}{2} k_1 \Delta t^2 - k_0 \Delta t \right) + b \Delta t (k_1 \Delta t + k_0)$$

$$\text{Termos em } y(t_0) : a_0 + a_1 = 1$$

$$\text{Termos em } k_0 \Delta t : -a_1 + b = 1$$

$$\text{Termos em } k_1 \Delta t^2 : \frac{1}{2} a_1 + b = \frac{1}{2}$$

$$a_0 = \frac{4}{3}; \quad a_1 = -\frac{1}{3}; \quad b = \frac{2}{3}$$

$$y(t_0 + \Delta t) = \frac{4}{3} y(t_0) - \frac{1}{3} y(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{3} \Delta t f(t_0 + \Delta t)$$

⁶⁸Também conhecidos como métodos BDF, de “backward differentiation formula”.

Caso de terceira ordem:

$$\begin{aligned} y(t_0) + \frac{1}{3}k_2\Delta t^3 + \frac{1}{2}k_1\Delta t^2 + k_0\Delta t &= \\ &= a_0y(t_0) + a_1 \left(y(t_0) - \frac{1}{3}k_2\Delta t^3 + \frac{1}{2}k_1\Delta t^2 - k_0\Delta t \right) + \\ &+ a_2 \left(y(t_0) - \frac{8}{3}k_2\Delta t^3 + \frac{4}{2}k_1\Delta t^2 - 2k_0\Delta t \right) + b\Delta t (k_2\Delta t^2 + k_1\Delta t + k_0) \end{aligned}$$

$$\text{Termos em } y(t_0) : a_0 + a_1 + a_2 = 1$$

$$\text{Termos em } k_0\Delta t : -a_1 - 2a_2 + b = 1$$

$$\text{Termos em } k_1\Delta t^2 : \frac{1}{2}a_1 + 2a_2 + b = \frac{1}{2}$$

$$\text{Termos em } k_2\Delta t^3 : -\frac{1}{3}a_1 - \frac{8}{3}a_2 + b = \frac{1}{3}$$

$$a_0 = \frac{18}{11}; a_1 = -\frac{9}{11}; a_2 = \frac{2}{11}; b = \frac{6}{11}$$

$$y(t_0 + \Delta t) = \frac{18}{11}y(t_0) - \frac{9}{11}y(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{11}y(t_0 - 2\Delta t) + \frac{6}{11}\Delta t f(t_0 + \Delta t)$$

Caso geral:

Para qualquer ordem resulta um sistema de $n + 1$ equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (-1)^n & (-2)^n & (-3)^n & \cdots & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

O método de Gear de quarta ordem resulta em:

$$y(t_0 + \Delta t) = \frac{48}{25}y(t_0) - \frac{36}{25}y(t_0 - \Delta t) + \frac{16}{25}y(t_0 - 2\Delta t) - \frac{3}{25}y(t_0 - 3\Delta t) + \frac{12}{25}\Delta t f(t_0 + \Delta t)$$

O método de quinta ordem é:

$$y(t_0 + \Delta t) = \frac{300}{137}y(t_0) - \frac{300}{137}y(t_0 - \Delta t) + \frac{200}{137}y(t_0 - 2\Delta t) - \frac{75}{137}y(t_0 - 3\Delta t) + \frac{12}{137}y(t_0 - 4\Delta t) + \frac{60}{137}\Delta t f(t_0 + \Delta t)$$

E o de sexta ordem é:

$$\begin{aligned} y(t_0 + \Delta t) &= \\ &\frac{120}{49}y(t_0) - \frac{150}{49}y(t_0 - \Delta t) + \frac{400}{147}y(t_0 - 2\Delta t) - \frac{75}{49}y(t_0 - 3\Delta t) \\ &+ \frac{24}{49}y(t_0 - 4\Delta t) - \frac{10}{147}y(t_0 - 5\Delta t) + \frac{20}{49}\Delta t f(t_0 + \Delta t) \end{aligned}$$

O método de ordem n integra corretamente funções polinomiais de ordem $n - 1$, desde que os valores anteriores requeridos estejam corretos. Note que esses métodos geram transientes falsos quando a função a

integrar muda repentinamente de valor. Os métodos de Gear com ordens maiores que 6 geram transientes crescentes, e são instáveis. O método de ordem 7, por exemplo, resulta em:

$$y(t_0 + \Delta t) = \frac{980}{363}y(t_0) - \frac{490}{121}y(t_0 - \Delta t) + \frac{4900}{1089}y(t_0 - 2\Delta t) - \frac{1225}{363}y(t_0 - 3\Delta t) + \frac{196}{121}y(t_0 - 4\Delta t) - \frac{490}{1089}y(t_0 - 5\Delta t) + \frac{20}{363}y(t_0 - 6\Delta t) + \frac{140}{363}\Delta t f(t_0 + \Delta t)$$

1.15.12.1 Estabilidade dos métodos de Gear

A estabilidade para entrada zero destes métodos pode ser avaliada escrevendo-se a expressão da integração em transformada Z:

$$Y(z) = a_0 z^{-1}Y(z) + a_1 z^{-2}Y(z) + \dots + a_{n-1} z^{-n} + b\Delta t F(z)$$

$$\frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{b\Delta t z^n}{z^n - a_0 z^{n-1} - \dots - a_{n-1}}$$

Para estabilidade, as raízes do polinômio do denominador da expressão tem que estar todas dentro do círculo unitário. Os polinômios gerados pelos métodos de Gear tem sempre uma raiz em $z = 1$, e outras raízes, dentro do círculo até a ordem 6. A ordem 7 gera um par complexo um pouco fora do círculo, o que continua em ordens maiores. O mesmo critério aplicado aos métodos de Adams-Bashforth e Adams-Moulton gera apenas a raiz em $z = 1$, significando que eles são estáveis se a variável a integrar $f(t)$ for zerada.

A estabilidade em função das frequências naturais do sistema simulado pode ser avaliada vendo-se onde o círculo unitário é mapeado. Resultam as curvas da figura 1.126. Por exemplo, o caso de ordem 3 resulta em:

$$s = \frac{z - \frac{18}{11} + \frac{9}{11}z^{-1} - \frac{2}{11}z^{-2}}{\frac{6}{11}z}, \quad z = e^{j\omega_z \Delta t}$$

Os métodos de primeira e segunda ordens são estáveis para qualquer sistema contínuo estável. Os demais podem instabilizar sistemas com frequências naturais próximas do eixo imaginário que estejam em certas faixas⁶⁹.

1.15.12.2 Método de Gear de segunda ordem em análise de circuitos no tempo

As equações que resultam são extensões das do método “backward” de Euler, com referências a valores anteriores a $t = t_0$ para os métodos de ordem maior que um, como memórias da variável “certa” para o componente (tensões para capacitores, correntes para indutores). A seguir são descritas as aplicações do método de segunda ordem aos elementos reativos usuais, lineares invariantes no tempo, e os modelos resultantes. As estampas são similares às do método “backward” de Euler.

1.15.12.3 Capacitor linear invariante no tempo

$$v(t_0 + \Delta t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} j(t) dt \approx \frac{4}{3}v(t_0) - \frac{1}{3}v(t_0 - \Delta t) + \frac{2\Delta t}{3C} j(t_0 + \Delta t)$$

$$j(t_0 + \Delta t) \approx \frac{3C}{2\Delta t}v(t_0 + \Delta t) - \frac{2C}{\Delta t}v(t_0) + \frac{C}{2\Delta t}v(t_0 - \Delta t)$$

⁶⁹Para oscilações senoidais, as faixas instáveis para $\omega\Delta t$ são: Ordem 3: abaixo de 1.937. Ordem 4: abaixo de 4.714. Ordem 5: entre 0.7108 e 9.393. Ordem 6: entre 0.8431 e 17.57. Notar que valores acima de π resultam em subamostragem.

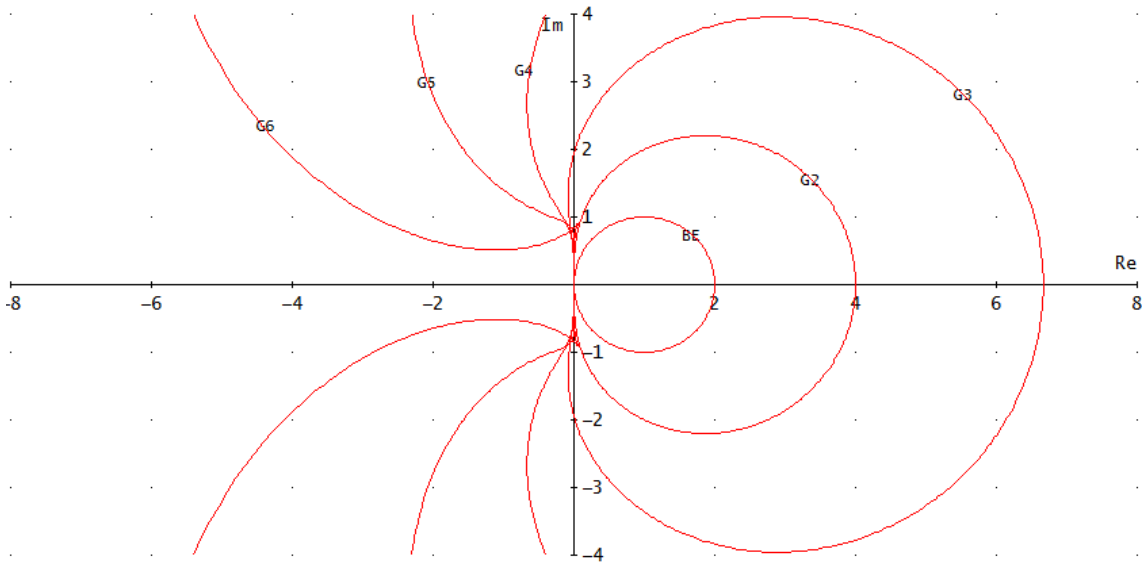


Figura 1.126: Mapeamentos do círculo unitário para os métodos de Gear. As escalas estão divididas por Δt . A região estável fica à esquerda nas proximidades da origem. As curvas para ordens acima de 3 não são mostradas completas.

1.15.12.4 Indutor linear invariante no tempo

$$j(t_0 + \Delta t) = j(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} v(t) dt \approx \frac{4}{3} j(t_0) - \frac{1}{3} j(t_0 - \Delta t) + \frac{2\Delta t}{3L} v(t_0 + \Delta t)$$

$$v(t_0 + \Delta t) \approx \frac{3L}{2\Delta t} j(t_0 + \Delta t) - \frac{2L}{\Delta t} j(t_0) + \frac{L}{2\Delta t} j(t_0 - \Delta t)$$

1.15.12.5 Transformador linear invariante no tempo

$$\vec{j}(t_0 + \Delta t) = \vec{j}(t_0) + [\Gamma] \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{v}(t) dt \approx \frac{4}{3} \vec{j}(t_0) - \frac{1}{3} \vec{j}(t_0 - \Delta t) + \frac{2\Delta t}{3} [\Gamma] \vec{v}(t_0 + \Delta t)$$

$$\vec{v}(t_0 + \Delta t) \approx \frac{3}{2\Delta t} [L] \vec{j}(t_0 + \Delta t) - \frac{2}{\Delta t} [L] \vec{j}(t_0) + \frac{1}{2\Delta t} [L] \vec{j}(t_0 - \Delta t)$$

Para 2 enrolamentos:

$$j_{ab}(t_0 + \Delta t) \approx \frac{4}{3} j_{ab}(t_0) - \frac{1}{3} j_{ab}(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{3} \Delta t (\Gamma_{11} v_{ab}(t_0 + \Delta t) + \Gamma_{12} v_{cd}(t_0 + \Delta t))$$

$$j_{cd}(t_0 + \Delta t) \approx \frac{4}{3} j_{cd}(t_0) - \frac{1}{3} j_{cd}(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{3} \Delta t (\Gamma_{21} v_{ab}(t_0 + \Delta t) + \Gamma_{22} v_{cd}(t_0 + \Delta t))$$

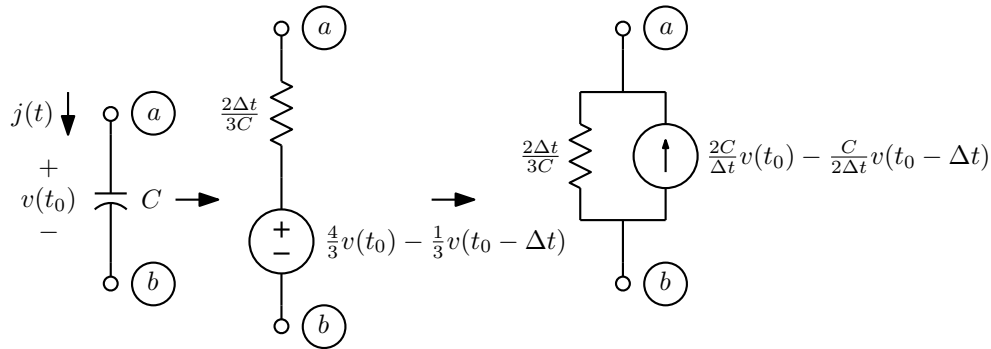


Figura 1.127: Capacitor linear invariante no tempo no método de Gear de segunda ordem.

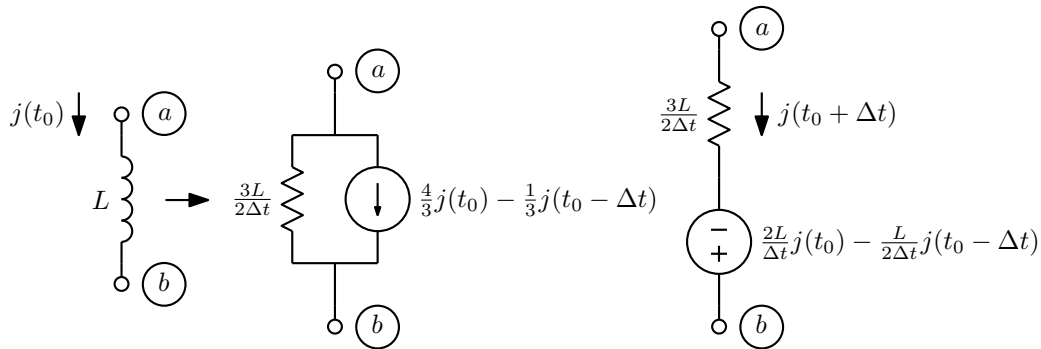


Figura 1.128: Indutor linear invariante no tempo no método de Gear de segunda ordem.

$$\begin{aligned}
 v_{ab}(t_0 + \Delta t) &\approx \frac{3}{2\Delta t} (L_1 j_{ab}(t_0 + \Delta t) + M j_{cd}(t_0 + \Delta t)) \\
 &\quad - \frac{2}{\Delta t} (L_1 j_{ab}(t_0) + M j_{cd}(t_0)) + \frac{1}{2\Delta t} (L_1 j_{ab}(t_0 - \Delta t) + M j_{cd}(t_0 - \Delta t)) \\
 v_{cd}(t_0 + \Delta t) &\approx \frac{3}{2\Delta t} (M j_{ab}(t_0 + \Delta t) + L_2 j_{cd}(t_0 + \Delta t)) \\
 &\quad - \frac{2}{\Delta t} (M j_{ab}(t_0) + L_2 j_{cd}(t_0)) + \frac{1}{2\Delta t} (M j_{ab}(t_0 - \Delta t) + L_2 j_{cd}(t_0 - \Delta t))
 \end{aligned}$$

1.15.12.6 Ordem e passo variáveis nos métodos de Gear

Os métodos de Gear podem ser aplicados com ordem variável. É possível, por exemplo, começar uma análise com o cálculo do ponto de operação, e a seguir usar o método com ordem 1, 2, 3, etc., até 6, sucessivamente. Isso é simples se o passo for fixo. Se for variável, a ordem do método pode ser voltada a 1 a cada mudança de passo, ou valores anteriores podem ser interpolados a partir das análises já feitas, o que é um tanto custoso. Para usar o método sempre com a mesma ordem, é possível assumir que valores anteriores à primeira análise sejam todos os do ponto de operação, embora isso possa gerar transientes iniciais incorretos. A estimativa do erro para ajuste do passo pode ser feita de forma similar à descrita para os métodos de Adams-Moulton, com comparação com integrações obtidas pelo método de ordem

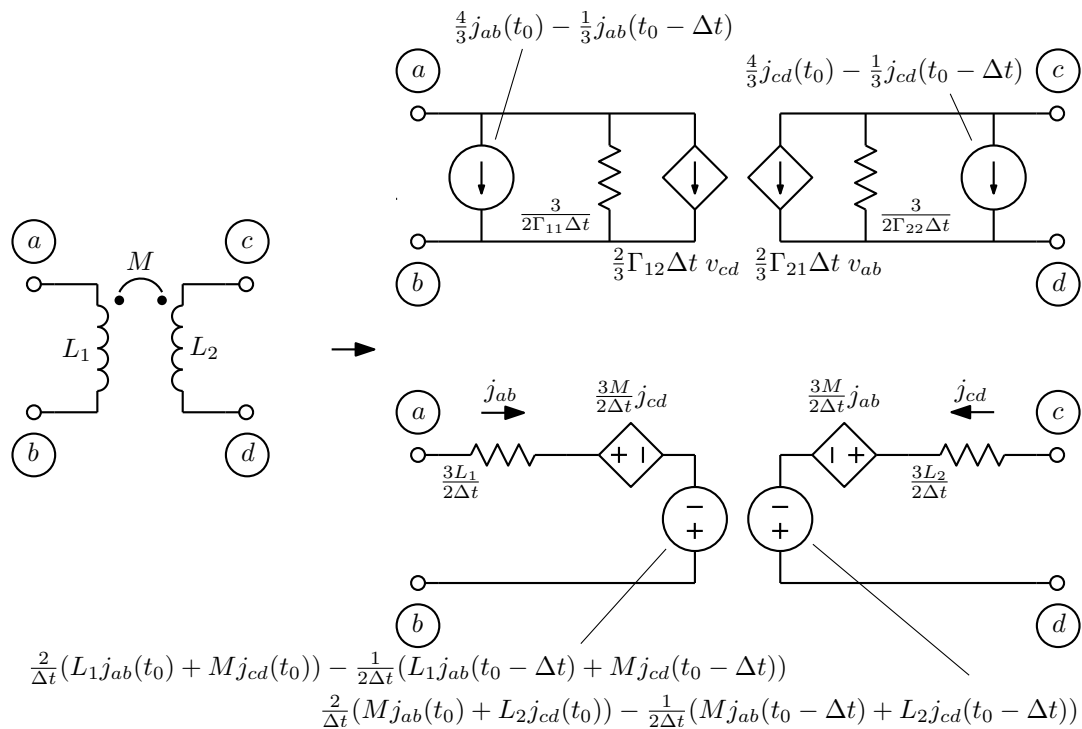


Figura 1.129: Transformador com dois enrolamentos no método de Gear de segunda ordem.

imediatamente superior.

Exemplo: Seja simular o circuito de Chua, figura 1.124 com as integrações de Gear de passo fixo, com o mesmo número de pontos (258) usado nas simulações da figura 1.125. Variando a ordem do método os resultados são mostrados na figura 1.130. O método de ordem 1 falha logo no primeiro ciclo e nem gera a oscilação caótica. O de ordem 2 é bem melhor mas falha pouco depois neste exemplo. Os demais aproximam bem a curva por bom tempo, em ordem crescente de precisão.

1.15.13 Análise no tempo de circuitos lineares variantes no tempo

Os métodos de integração numérica já descritos podem ser facilmente aplicados ao caso linear invariante no tempo, partindo-se das integrações que não tem forma diferente apenas porque o circuito varia com o tempo, como descrito a seguir.

1.15.13.1 Capacitor linear variante no tempo

A integração fundamental associada ao capacitor é de que a carga é a integral da corrente:

$$q(t_0 + \Delta t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} j(t) dt$$

E para o capacitor linear variante no tempo a capacitância $C(t)$ varia com o tempo, e tem-se:

$$q(t) = C(t)v(t)$$

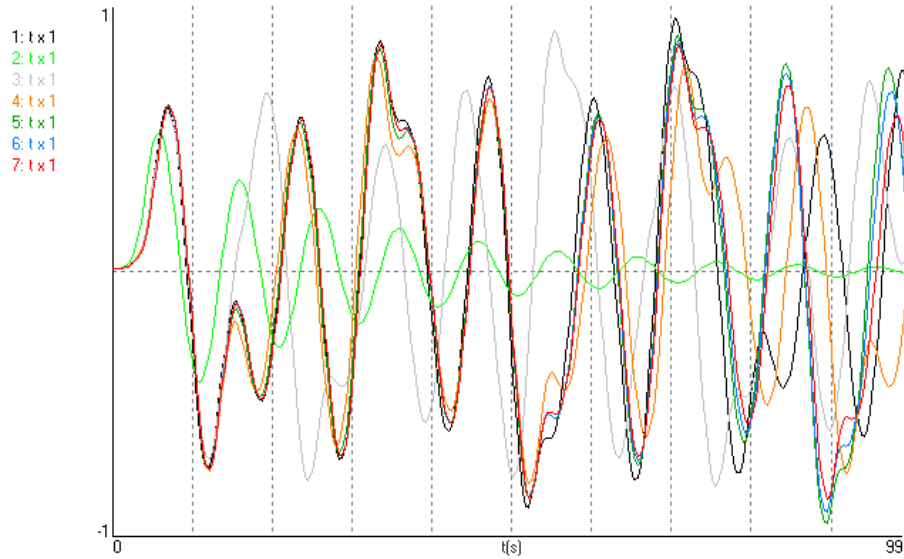


Figura 1.130: Simulações do circuito de Chua com os métodos de Gear. 1) Curva correta. 2-7) Métodos de Gear de ordens 1-6. 258 pontos.

$$C(t_0 + \Delta t)v(t_0 + \Delta t) = C(t_0)v(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} j(t)dt$$

$$v(t_0 + \Delta t) = \frac{C(t_0)}{C(t_0 + \Delta t)}v(t_0) + \frac{1}{C(t_0 + \Delta t)} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} j(t)dt$$

A relação mostra que há uma variação de tensão devida apenas à variação da capacitância, além da integral da corrente gerando uma tensão que depende apenas do valor final da capacitância. O primeiro termo pode ser usado para geração de energia elétrica a partir de movimento mecânico variando a capacitância. Supondo o capacitor com capacitância $C(t_0)$ carregado com tensão $v(t_0)$, a energia armazenada nele vale $E(t_0) = \frac{1}{2}C(t_0)v(t_0)^2$. Com o capacitor no valor final $C(t_0 + \Delta t)$, a tensão sobre ele vale $v(t_0 + \Delta t) = \frac{C(t_0)}{C(t_0 + \Delta t)}v(t_0)$, e a energia armazenada vale:

$$E(t_0 + \Delta t) = \frac{1}{2}C(t_0 + \Delta t) \left(\frac{C(t_0)}{C(t_0 + \Delta t)}v(t_0) \right)^2 = E(t_0) \frac{C(t_0)}{C(t_0 + \Delta t)}$$

A energia aumenta se a capacitância diminui. A energia extra vem da força que tem que ser feita para reduzir a capacitância de um capacitor carregado, afastando as placas de um capacitor de placas paralelas no ar, por exemplo. Esse é o princípio usado em todos os geradores eletrostáticos “de influência”, que podem sempre ser considerados como associações de capacitores variantes no tempo (ou com o movimento da máquina) e chaves. O mesmo princípio pode ser usado em motores e atuadores eletrostáticos, onde o aumento de capacitância libera energia, que pode ser usada para realizar trabalho mecânico enquanto as placas do capacitor se aproximam.

1.15.13.2 O dobrador de Bennet

A máquina eletrostática de influência⁷⁰ mais simples é o “dobrador de Bennet”, descrito por Abraham Bennet em 1787 [2]. Ele consiste em três placas condutoras isoladas A , B e C . As placas B e C tem cabos isolantes, e placas isolantes (originalmente verniz) são usadas para separar as placas quando elas formam capacitores. A placa A é a saída principal do dispositivo, mostrada na figura 1.131 ligada a um eletroscópio. Partindo de uma carga inicial nas placas A e B ((a) na figura), o ciclo de operação do dispositivo consiste em duas fases. Na primeira fase a placa central B forma um capacitor com a superior C enquanto esta é aterrada através de um toque. Isto gera na placa C uma cópia invertida da carga na placa B . Na segunda fase a placa superior C é posta em contato com a placa inferior A enquanto a placa central B , formando um capacitor com a inferior A , é aterrada através de outro toque. Isto une as cargas nas placas A e C na placa A , dobrando as cargas nas placas A e B . Estas operações idealmente dobram as cargas nas placas A e B a cada ciclo ((b) e (c) na figura). O dispositivo foi inicialmente usado para multiplicar uma pequena carga inicial, tornando-a observável em um eletroscópio. Ocorre entretanto que qualquer carga inicial é multiplicada até a saturação em poucos ciclos, tornando o dobrador inútil para multiplicações por fatores elevados. A estrutura, entretanto, serve como base para muitos geradores de eletricidade estática.

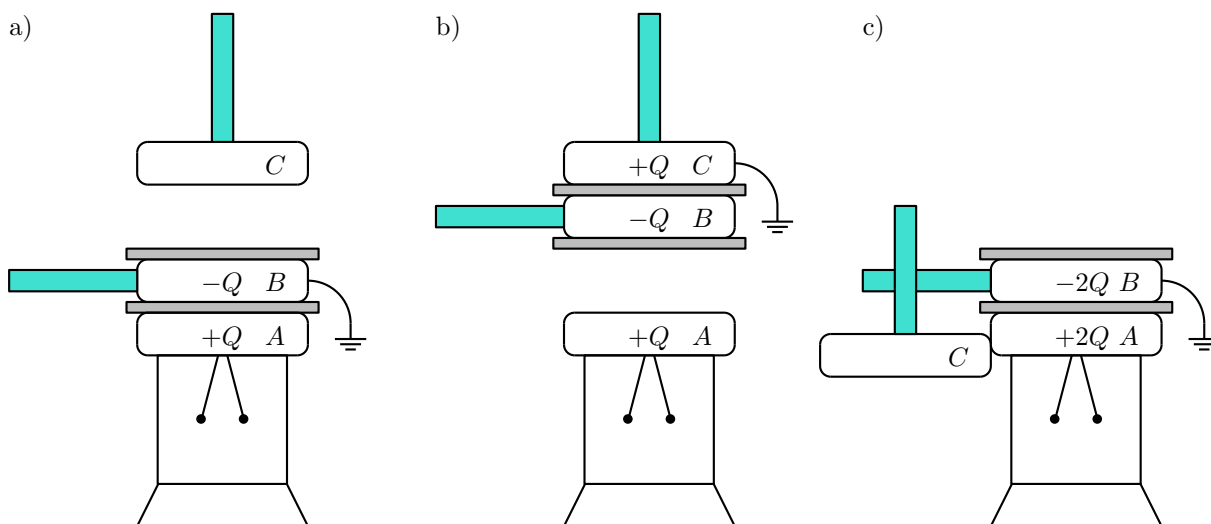


Figura 1.131: Dobrador de Bennet. a) Carga inicial. b) Cópia da carga. c) Duplicação da carga.

O dobrador pode ser considerado como um conjunto de capacitores e chaves tendo as três placas como nós de conexão, como mostrado na figura 1.132. Os capacitores variáveis são C_{ab} e C_{bc} , que variam de forma complementar. As demais capacitâncias variam também, mas menos, e sua variação pode ser ignorada. Uma análise do sistema mostra que apenas três capacitâncias, C_1 , C_{ab} e C_{bc} são essenciais à operação do sistema, com as demais prejudiciais, e que apenas C_{ab} é necessariamente variável.

Nesta forma a operação do dispositivo pode ser simulada, tendo-se capacitores variáveis com o tempo modelados. Todos tipos de máquinas eletrostáticas “de influência” podem ser modelados de forma similar. Algumas geram modelos bastante complexos. A máquina de Wimshurst⁷¹, por exemplo, que possui um par de discos com vários setores metálicos, requer o modelamento de todas as capacitâncias entre pares

⁷⁰As “máquinas de influência” são geradores eletrostáticos que operam multiplicando cargas existentes, enquanto as “máquinas de atrito” geram eletricidade por efeito triboelétrico, separação de cargas por contato, ou atrito.

⁷¹O mais conhecido dos geradores eletrostáticos de influência, desenvolvido por James Wimshurst por 1883.

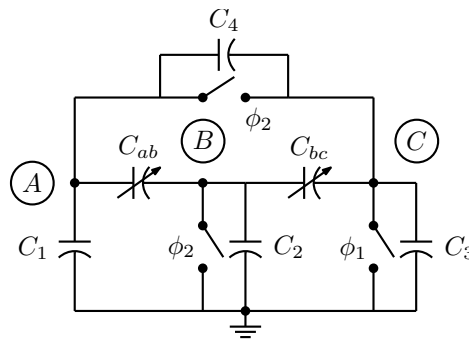


Figura 1.132: Modelo do dobrador de Bennet.

de setores, embora capacitâncias muito pequenas, entre setores distantes, possam ser ignoradas. Modelos similares, embora não usando explicitamente capacitores variáveis (a formulação é em função das posições onde os setores ficam, e não em função dos próprios setores), foram estudados nos anos 1930 por A. W. Simon [3], para a máquina de Wimshurst e várias outras. Um outro problema, não tratado aqui, é o de como obter os modelos para as capacitâncias em função das posições dos elementos da máquina. Não é difícil obter aproximações, entretanto.

Observando a operação do dobrador de Bennet, nota-se que as correntes nas chaves têm sempre as mesmas direções. Isto faz com que possam ser substituídas por diodos, como na figura 1.133, resultando essencialmente na mesma sequência de operação [52]. O gerador eletrostático eletrônico que resulta pode ser usado em sistemas de coleta de energia do ambiente [53], com os capacitores variáveis construídos em técnicas de microeletromecânica, com membranas flexíveis, etc. Muitas outras variações da estrutura são possíveis [54].

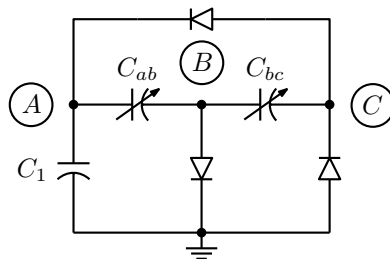


Figura 1.133: Dobrador de Bennet eletrônico.

1.15.13.3 Modelamento do capacitor linear variante no tempo

Basta aplicar a relação $q(t) = C(t)v(t)$ às equações de discretização das integrações. Os modelos resultantes tem as mesmas estruturas dos modelos para o caso linear invariante no tempo.

Método “backward” de Euler:

$$q(t_0 + \Delta t) \approx q(t_0) + \Delta t j(t_0 + \Delta t)$$

$$v(t_0 + \Delta t) \approx \frac{C(t_0)}{C(t_0 + \Delta t)}v(t_0) + \frac{\Delta t}{C(t_0 + \Delta t)}j(t_0 + \Delta t)$$

$$j(t_0 + \Delta t) \approx \frac{1}{\Delta t} (C(t_0 + \Delta t)v(t_0 + \Delta t) - C(t_0)v(t_0))$$

Método “forward” de Euler:

$$q(t_0 + \Delta t) \approx q(t_0) + \Delta t j(t_0)$$

$$v(t_0 + \Delta t) \approx \frac{C(t_0)}{C(t_0 + \Delta t)}v(t_0) + \frac{\Delta t}{C(t_0 + \Delta t)}j(t_0)$$

Método dos trapézios:

$$q(t_0 + \Delta t) \approx q(t_0) + \frac{\Delta t}{2}(j(t_0) + j(t_0 + \Delta t))$$

$$v(t_0 + \Delta t) \approx \frac{C(t_0)}{C(t_0 + \Delta t)}v(t_0) + \frac{\Delta t}{2C(t_0 + \Delta t)}(j(t_0) + j(t_0 + \Delta t))$$

$$j(t_0 + \Delta t) \approx \frac{2}{\Delta t} (C(t_0 + \Delta t)v(t_0 + \Delta t) - C(t_0)v(t_0)) - j(t_0)$$

Método de Gear de segunda ordem:

$$q(t_0 + \Delta t) \approx \frac{4}{3}q(t_0) - \frac{1}{3}q(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{3}\Delta t j(t_0 + \Delta t)$$

$$v(t_0 + \Delta t) \approx \frac{4}{3} \frac{C(t_0)}{C(t_0 + \Delta t)}v(t_0) - \frac{1}{3} \frac{C(t_0 - \Delta t)}{C(t_0 + \Delta t)}v(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{3} \frac{\Delta t}{C(t_0 + \Delta t)}j(t_0 + \Delta t)$$

$$j(t_0 + \Delta t) \approx \frac{3}{2\Delta t} \left(C(t_0 + \Delta t)v(t_0 + \Delta t) - \frac{4}{3}C(t_0)v(t_0) + \frac{1}{3}C(t_0 - \Delta t)v(t_0 - \Delta t) \right)$$

Note-se que apenas o modelamento “backward” de Euler dá resultados corretos em circuitos como máquinas eletrostáticas, onde existe chaveamento dos capacitores variantes no tempo. Os demais métodos tem o problema de “memória falsa” e geram transientes incorretos nos chaveamentos.

1.15.13.4 Indutor linear variante no tempo

A integração fundamental associada ao indutor é de que o fluxo magnético é a integral da tensão:

$$\phi(t_0 + \Delta t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} v(t) dt$$

E para o indutor linear variante no tempo a indutância $L(t)$ varia com o tempo, e tem-se:

$$\phi(t) = L(t)j(t)$$

$$L(t_0 + \Delta t)j(t_0 + \Delta t) = L(t_0)j(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} v(t) dt$$

$$j(t_0 + \Delta t) = \frac{L(t_0)}{L(t_0 + \Delta t)}j(t_0) + \frac{1}{L(t_0 + \Delta t)} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} v(t) dt$$

Ocorre algo semelhante ao que ocorre no caso do capacitor, mas com corrente, com a corrente no indutor variando se a indutância variar. Ocorre também ganho de energia quando a indutância é reduzida, num dual ao caso do capacitor:

$$E(t_0 + \Delta t) = \frac{1}{2}L(t_0 + \Delta t) \left(\frac{L(t_0)}{L(t_0 + \Delta t)} j(t_0) \right)^2 = E(t_0) \frac{L(t_0)}{L(t_0 + \Delta t)}$$

Motores eletromagnéticos, geradores e atuadores mecânicos como relés e solenoides podem ser analisados a partir deste fenômeno. Um gerador de pulso de corrente de alta intensidade pode ser construído fazendo-se passar uma alta corrente por um indutor e então “implodindo” o indutor, procurando zerar sua indutância. É possível até a construção de duais magnéticos de máquinas eletrostáticas, se se desejar, bastando seguir as regras usuais de construção de circuitos duais a partir do modelo com capacitores e chaves. A figura 1.134 mostra como obter um “dobrador indutivo” a partir da versão mínima do dobrador de Bennet. O dual de um capacitor variável é um indutor variável, e o dual de uma chave é uma chave com operação invertida. Assim as chaves que se fechavam em duas fases sem superposição no dobrador capacitivo se fecham em duas fases superpostas no dobrador indutivo. Os capacitores omitidos se transformariam em indutores em série com as chaves, desnecessários (e prejudiciais à operação).

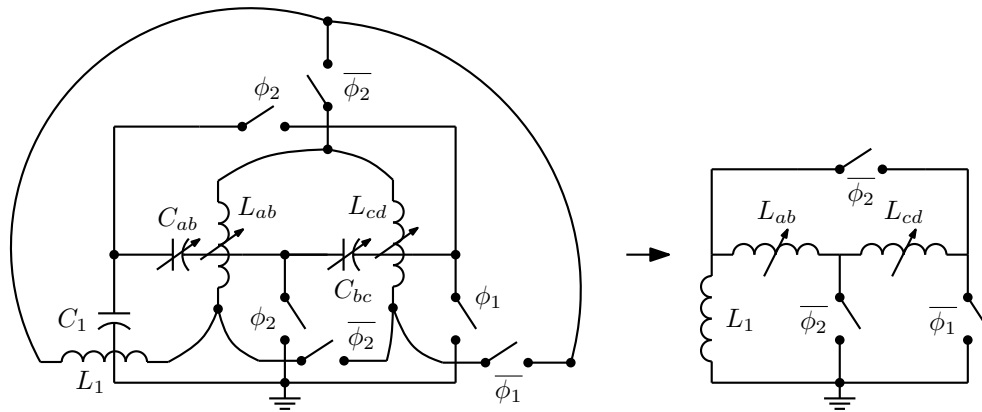


Figura 1.134: Obtenção do modelo do dual do dobrador de Bennet.

O dobrador indutivo gera correntes crescentes nos indutores, na mesma forma como são geradas tensões crescentes no dobrador elétrico. O dobrador elétrico deve ter as constantes de tempo RC grandes em relação ao período do ciclo de operação para que haja pouca perda de energia, com as resistências estando em paralelo com os elementos. Para o dobrador indutivo as constantes de tempo são tipo L/R, com as resistências em série com os elementos. Pode ser difícil mantê-las pequenas o bastante com indutores normais, mas se isto for conseguido a energia obtida pode ser muito maior que no caso do dobrador capacitivo, devido à maior densidade de energia que pode ser obtida de máquinas eletromagnéticas quando essas crescem em tamanho.

1.15.13.5 Modelamento do indutor linear variante no tempo

O tratamento é o dual do caso do capacitor. Basta aplicar a relação $\phi(t) = L(t)j(t)$ às equações de discretização das integrações. Os modelos resultantes tem as mesmas estruturas dos modelos para o caso linear invariante no tempo.

Método “backward” de Euler:

$$\phi(t_0 + \Delta t) \approx \phi(t_0) + \Delta t v(t_0 + \Delta t)$$

$$j(t_0 + \Delta t) \approx \frac{L(t_0)}{L(t_0 + \Delta t)} j(t_0) + \frac{\Delta t}{L(t_0 + \Delta t)} v(t_0 + \Delta t)$$

$$v(t_0 + \Delta t) \approx \frac{1}{\Delta t} (L(t_0 + \Delta t) j(t_0 + \Delta t) - L(t_0) j(t_0))$$

Método “forward” de Euler:

$$\phi(t_0 + \Delta t) \approx \phi(t_0) + \Delta t v(t_0)$$

$$j(t_0 + \Delta t) \approx \frac{L(t_0)}{L(t_0 + \Delta t)} j(t_0) + \frac{\Delta t}{L(t_0 + \Delta t)} v(t_0)$$

Método dos trapézios:

$$\phi(t_0 + \Delta t) \approx \phi(t_0) + \frac{\Delta t}{2} (v(t_0) + v(t_0 + \Delta t))$$

$$j(t_0 + \Delta t) \approx \frac{L(t_0)}{L(t_0 + \Delta t)} j(t_0) + \frac{\Delta t}{2L(t_0 + \Delta t)} (v(t_0) + v(t_0 + \Delta t))$$

$$v(t_0 + \Delta t) \approx \frac{2}{\Delta t} (L(t_0 + \Delta t) j(t_0 + \Delta t) - L(t_0) j(t_0)) - v(t_0)$$

Método de Gear de segunda ordem:

$$\phi(t_0 + \Delta t) \approx \frac{4}{3} \phi(t_0) - \frac{1}{3} \phi(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{3} \Delta t v(t_0 + \Delta t)$$

$$j(t_0 + \Delta t) \approx \frac{4}{3} \frac{L(t_0)}{L(t_0 + \Delta t)} j(t_0) - \frac{1}{3} \frac{L(t_0 - \Delta t)}{L(t_0 + \Delta t)} j(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{3} \frac{\Delta t}{L(t_0 + \Delta t)} v(t_0 + \Delta t)$$

$$v(t_0 + \Delta t) \approx \frac{3}{2\Delta t} \left(L(t_0 + \Delta t) j(t_0 + \Delta t) - \frac{4}{3} L(t_0) j(t_0) + \frac{1}{3} L(t_0 - \Delta t) j(t_0 - \Delta t) \right)$$

1.15.13.6 Transformador linear variante no tempo

Basta estender o caso do indutor ao caso multidimensional, como nos demais casos do transformador:

$$\vec{\phi}(t_0 + \Delta t) = \vec{\phi}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{v}(t) dt$$

Agora todas as indutâncias e indutâncias mútuas variam com o tempo, gerando a matriz $[L](t)$:

$$\vec{\phi}(t) = [L(t)] \vec{j}(t)$$

$$[L(t_0 + \Delta t)] \vec{j}(t_0 + \Delta t) = [L(t_0)] \vec{j}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{v}(t) dt$$

$$\vec{j}(t_0 + \Delta t) = [\Gamma(t_0 + \Delta t)] [L(t_0)] \vec{j}(t_0) + [\Gamma(t_0 + \Delta t)] \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{v}(t) dt$$

Um motor elétrico poderia ser modelado desta forma, pois existem indutâncias e indutâncias mútuas que variam com a posição do rotor. As tensões seriam conhecidas, e a equação obtida permite o cálculo das correntes. O caso de um gerador poderia ser tratado também. Mesmo dispositivos contendo ímãs podem ser modelados. Um ímã é uma fonte de fluxo magnético, e pode ser modelado como um indutor em série com uma fonte de corrente. Ocorre entretanto que dispositivos magnéticos usando materiais ferromagnéticos podem ser bastante não lineares, e assim o tratamento linear seria uma idealização apenas.

A discretização da integração é similar à do caso do indutor simples, e ao do caso do transformador linear invariante no tempo, e não é necessário detalhá-la aqui.

1.15.14 Análise no tempo de circuitos não lineares

O caso em que os elementos reativos são lineares, variantes ou não no tempo, gera modelos lineares para eles para a análise no instante $t = t_0 + \Delta t$. Com o circuito contendo elementos resistivos não lineares, o circuito é então um circuito resistivo não linear, e a solução pode ser encontrada pelo método de Newton-Raphson. Este tipo de análise, com elementos resistivos não lineares e elementos reativos lineares, todos invariantes no tempo, é a mais usual para análise no tempo de circuitos usuais. Ocorre entretanto que alguns elementos reativos comuns são não lineares, como as capacitâncias em semicondutores e indutâncias em indutores com núcleo de material magnético.

1.15.14.1 Inicialização e avanço da análise no tempo

Há duas formas de inicializar a análise no tempo: A análise pode partir de um cálculo de ponto de operação, pela solução do circuito não linear com capacitores em aberto e indutores em curto-circuito (ou substituídos por grandes e pequenas resistências), obtendo-se a solução em $t = 0$ como se o circuito estivesse operando há longo tempo. É também possível partir das condições iniciais dadas sobre capacitores e indutores. Neste caso a solução deveria ser completada resolvendo-se um circuito onde os capacitores são substituídos por fontes de tensão e os indutores substituídos por fontes de corrente, tendo suas condições iniciais como valores. Mas esta análise não permite a existência de ciclos fechados de capacitores e fontes de tensão, ou de cortes com indutores e fontes de corrente, e também tem uma estrutura diferente da análise normal, devido às fontes de tensão introduzidas pelos capacitores. Um recurso é realizar um passo da análise pelo método “backward” de Euler, com um passo muito pequeno, que dá quase o mesmo resultado e não tem problemas com estruturas. Fontes existentes no circuito podem ser deixadas com seus valores em $t = 0$. A solução no primeiro intervalo Δt usa a solução assim obtida como aproximação inicial no método de Newton-Raphson. Nos passos seguintes, a solução final do intervalo anterior é usada. Ou seja, o método de Newton-Raphson sempre parte da última solução obtida. Se ocorrer não convergência, os procedimentos já descritos para lidar com isto podem ser usados, ou, em uma análise com passo variável, pode-se tentar reduzir o passo e tentar novamente.

Exemplo: Seja analisar o circuito da figura 1.135, para achar a próxima aproximação da solução em $t = t_0 + \Delta t = 1.1$ s usando o método de Newton-Raphson e a aproximação “backward” de Euler, conhecidas a última solução no tempo, $\vec{e}(t_0) = \vec{e}(1)$ e a última aproximação da solução em $t_0 + \Delta t$, $\vec{e}_n(1.1)$, através de uma análise nodal modificada:

Substituindo os componentes por seus modelos, tem-se o circuito da figura 1.136, onde os elementos reativos foram substituídos por seus modelos de acordo com o método “backward” de Euler, usando a solução em $t = 1$ s, e os elementos não lineares por seus modelos de acordo com o método de Newton-Raphson, usando a última solução em $t = 1.1$ s (que na primeira iteração é a solução em $t = 1$ s):

O sistema a resolver é:

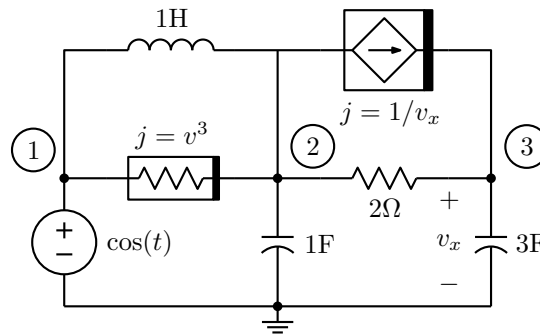


Figura 1.135: Circuito não linear com elementos reativos lineares a analisar.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} G_1 & -G_1 & \cdot & +1 & -1 \\ -G_1 & G_1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{0.1} & -\frac{1}{2} + G_2 & -1 & \cdot \\ \cdot & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3}{0.1} - G_2 & \cdot & \cdot \\ \hline -1 & 1 & \cdot & \frac{1}{0.1} & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_{1\ n+1}(1.1) \\ e_{2\ n+1}(1.1) \\ e_{3\ n+1}(1.1) \\ j_{4\ n+1}(1.1) \\ j_{5\ n+1}(1.1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_1 \\ I_1 + \frac{2}{0.1}e_2(1) - I_2 \\ \hline I_2 + \frac{3}{0.1}e_3(1) \\ \frac{1}{0.1}j_4(1) \\ -\cos(1.1) \end{bmatrix}$$

Os parâmetros dos modelos dos elementos não lineares são calculados como:

$$\begin{aligned} G_1 &= 3(e)(e_{1n}(1.1) - e_{2n}(1.1))^2 \\ I_1 &= (e_{1n}(1.1) - e_{2n}(1.1))^3 - G_1(e_{1n}(1.1) - e_{2n}(1.1)) \\ G_2 &= -\frac{1}{e_{3n}(1.1)^2} \\ I_2 &= \frac{1}{e_{3n}} - G_2 e_{3n}(1.1) \end{aligned}$$

1.15.14.2 Capacitor não linear

Capacitores não lineares continuam seguindo a equação fundamental associando carga e corrente:

$$q(t_0 + \Delta t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} j(t) dt$$

Mas agora com a relação não linear entre carga e tensão:

$$q(t) = f(v(t))$$

O uso de um método de discretização da integração resulta em um modelo que é um resistor não linear. Seja por exemplo o que acontece com o método “backward” de Euler:

$$f(v(t_0 + \Delta t)) \approx f(v(t_0)) + \Delta t j(t_0 + \Delta t)$$

Resulta um resistor não linear controlado a tensão, conveniente para a análise nodal.

$$j(t_0 + \Delta t) \approx \frac{1}{\Delta t} (f(v(t_0 + \Delta t)) - f(v(t_0)))$$

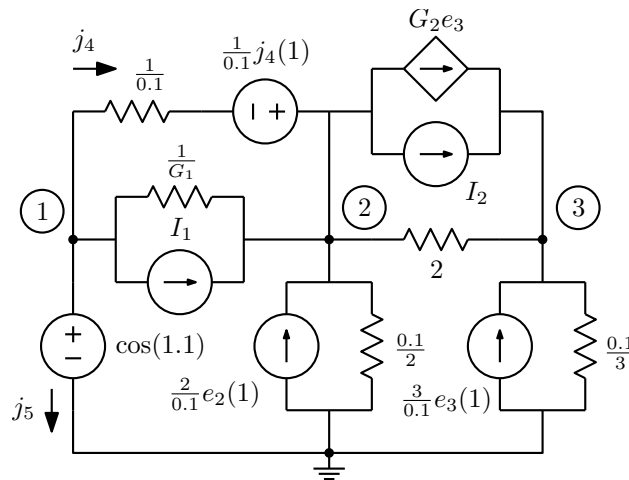


Figura 1.136: Modelo linearizado em torno da última aproximação da solução em $t = t_0 + \Delta t$.

O modelo que tem que ser montado na análise no tempo é o circuito linearizado para a análise de Newton-Raphson, que é o de um resistor não linear controlado a tensão:

$$G_0 = \frac{1}{\Delta t} f'(v_n(t_0 + \Delta t))$$

$$I_0 = \frac{1}{\Delta t} (f(v_n(t_0 + \Delta t)) - f(v(t_0)) - G_0 v_n(t_0 + \Delta t))$$

Note-se que o termo $f'(v)$ é a “capacitância incremental” do capacitor não linear. Esta é a capacitância que se considera em muitos dispositivos que tem capacitâncias não lineares, como diodos e transistores. Na obtenção do modelo de pequenos sinais a partir de uma análise de ponto de operação esta capacitância deve ser calculada a partir da tensão obtida sobre o capacitor e usada no modelo.

1.15.14.3 Capacitância de um diodo semicondutor

A capacitância de um diodo semicondutor reversamente polarizado ($v < 0$), chamada “capacitância de junção”, é do tipo:

$$C(v) = \frac{C_0}{\left(1 - \frac{v}{\phi}\right)^m}$$

em que C_0 depende das dimensões do diodo, usualmente da área e do perímetro da junção, $\phi \approx 0.6$ V para um diodo de silício, e $m \approx 0.5$ para diodos usuais. A função da carga em função da tensão é obtida integrando esta expressão:

$$q(v) = \int_0^v \frac{C_0}{\left(1 - \frac{v}{\phi}\right)^m} dv = \frac{C_0 \phi}{1 - m} \left(1 - \left(1 - \frac{v}{\phi}\right)^{1-m}\right)$$

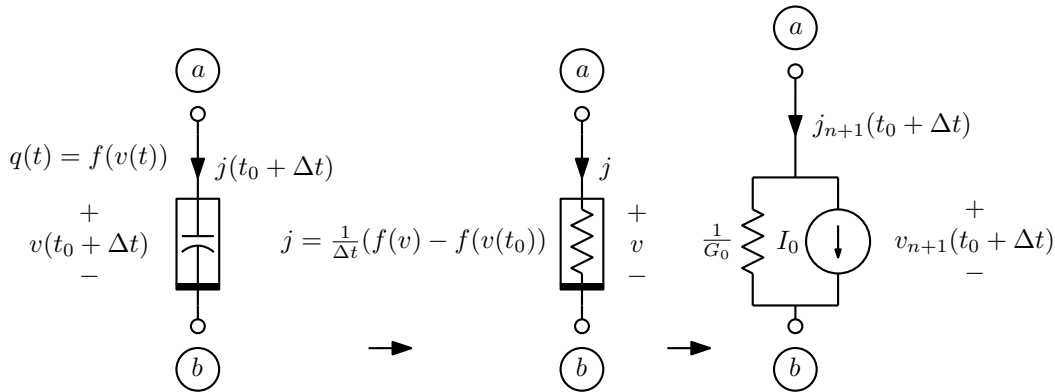


Figura 1.137: Capacitor não linear no método “backward” de Euler e modelo para o método de Newton-Raphson.

Note que esta expressão resulta em $q(0) = 0$, como deve ser. Estas expressões se tornam inválidas para $v > \phi$, que é quando o diodo começa a conduzir significativamente. A capacitância vai para infinito, e a carga não tem mais solução real. As curvas são mostradas na figura 1.138. O modelo deve ser adaptado para evitar isto. Pode-se usar a função de capacitância até, seja, $v = \phi/2$, estendendo a curva como uma reta depois. A função de carga deve ser adaptada de acordo, se tornando parabólica após este mesmo limite. A fórmula da carga dá um limite quando $m = 1$, $q(v) = -C_0\phi \ln(1 - \frac{v}{\phi})$.

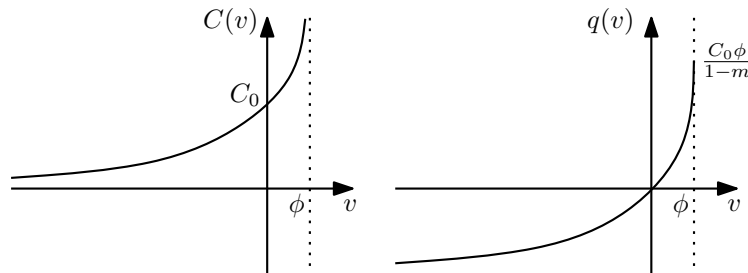


Figura 1.138: Capacitância e carga de um capacitor de diodo reversamente polarizado.

Diodos tem também uma capacitância diretamente proporcional à corrente quando conduzindo diretamente, chamada “capacitância de difusão”. Esta capacitância tem a forma, expressa em função da tensão direta⁷²:

$$C(v) = ki_D = C_1 \left(e^{\frac{v}{\eta V_T}} - 1 \right)$$

em que C_1 depende das dimensões do diodo. A função de carga é obtida como:

$$q(v) = \int_0^v C_1 \left(e^{\frac{v}{\eta V_T}} - 1 \right) = C_1 \left[\eta V_T e^{\frac{v}{\eta V_T}} - v \right]_0^v = C_1 \eta V_T \left(e^{\frac{v}{\eta V_T}} - 1 \right) - C_1 v$$

⁷²É comum também se ver a função de carga definida como $q = \tau i_D = \tau I_s \left(e^{\frac{v}{\eta V_T}} - 1 \right)$, com a capacitância sendo então $C = \frac{dq}{dv} = \frac{\tau I_s}{\eta V_T} e^{\frac{v}{\eta V_T}}$. O parâmetro τ é a constante de tempo $\tau = C/G$ formada pela capacitância incremental C e a condutância incremental do diodo $G = \frac{I_s}{\eta V_T} e^{\frac{v}{\eta V_T}}$.

*	Corte	Triodo	Saturação
C_{gs}	$C_{ox}WL_d$	$C_{ox}WL_d + \frac{1}{2}C_{ox}WL$	$C_{ox}WL_d + \frac{2}{3}C_{ox}WL$
C_{gd}	$C_{ox}WL_d$	$C_{ox}WL_d + \frac{1}{2}C_{ox}WL$	$C_{ox}WL_d$
C_{gb}	$C_{ox}WL$	0	0
C_{db}	C_{jdb}	$C_{jdb} + \frac{1}{3}C_{jcb}$	$C_{jdb} + \frac{2}{3}C_{jcb}$
C_{sb}	C_{jsb}	$C_{jdb} + \frac{1}{2}C_{jcb}$	C_{jdb}

Tabela 1.2: Capacitâncias de transistores MOS.

Esta função também dá $q(0) = 0$. É válida para $v \geq 0$, sendo desprezível para $v < 0$. O diodo tem então estas duas capacitâncias em paralelo.

1.15.14.4 Capacitâncias de transistores bipolares

Transistores bipolares modelados pelo modelo de Ebers-Moll podem incluir diretamente capacitâncias nos diodos do modelo, com valores proporcionais às áreas e perímetros das junções. As correntes que controlam as fontes controladas, entretanto, seriam as que fluem apenas pelas partes resistivas dos diodos [28].

1.15.14.5 Capacitâncias de transistores MOS

Transistores MOS possuem importantes capacitâncias entre seus terminais, com não linearidades significativas que afetam o comportamento de mesmo circuitos comuns. A figura 1.139 mostra a localização destas capacitâncias dentro da estrutura de um transistor NMOS típico, realizado em técnicas de microeletrônica. Uma forma simplificada de tratar estas capacitâncias é considerá-las como lineares, mas variando conforme a região de operação do transistor. Quando o transistor está cortado, a capacitância principal é C_{gb} , entre a porta (“gate”) e o substrato (“bulk”), igual a $C_{ox}WL$. Na região ôhmica o canal está formado, e a capacitância principal é entre a porta e o canal, o que pode ser modelado aproximadamente dividindo esta capacitância entre duas, iguais, entre a porta e os terminais dreno e fonte, C_{gs} e C_{gd} . Na região de saturação, a concentração de portadores de carga (elétrons) no canal na direção da fonte transfere a maior parte da capacitância da porta na direção daquele terminal, ficando desprezível C_{gd} . Existem sempre pequenas capacitâncias de superposição, ou laterais, entre a porta e os terminais fonte (“drain”) e fonte (“source”), com valor proporcional à largura do canal. A capacitância por unidade de área C_{ox} pode ser obtida do parâmetro de transcondutância K e da mobilidade μ , como $C_{ox} = 2K/\mu$. Completam o modelo capacitâncias de diodo entre dreno e fonte e o substrato C_{jgs} e C_{jgd} , com valores que dependem do processo e da geometria destes terminais (essencialmente das áreas). Quando o transistor está conduzindo, existe uma capacitância do canal para o substrato, também de diodo, C_{jcb} que pode ser dividida entre fonte e dreno da mesma forma que a capacitância entre porta e canal. A tabela 1.2 mostra como ficam as capacitâncias. Note-se que os terminais fonte e dreno não são sempre os mesmos, pois dependem da orientação da tensão v_{ds} , e assim os capacitores C_{gs} e C_{gd} podem mudar de posição, mudando de valor se o transistor estiver na região de saturação. Estas capacitâncias afetam o comportamento do circuito para pequenos sinais. O cálculo de ponto de operação determina as capacitâncias a serem usadas⁷³.

⁷³Estas capacitâncias são incrementais, derivadas das funções de carga elétrica entre os terminais. A análise no tempo dos capacitores de transistores MOS é bastante complexa [27], e não será tratada aqui por enquanto.

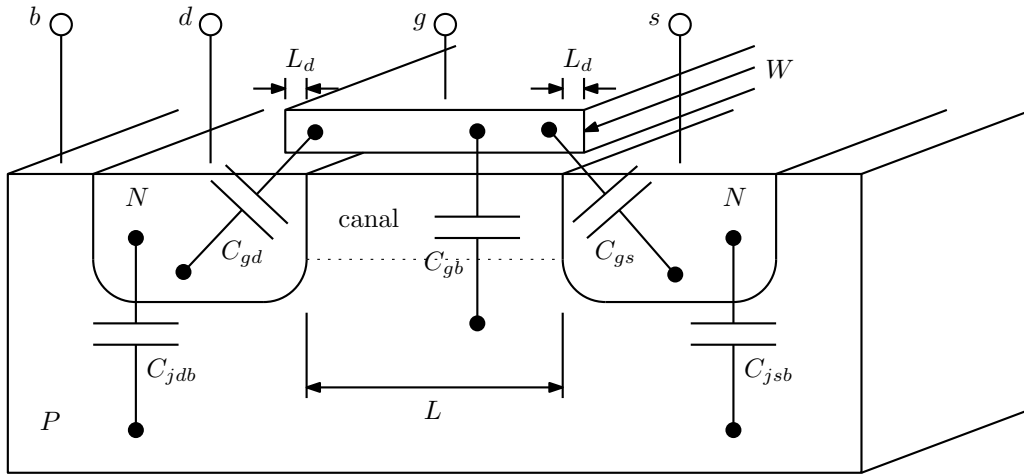


Figura 1.139: Capacitâncias de um transistor MOS canal N, em um corte da estrutura.

1.15.14.6 Capacitor controlado a tensão

Um elemento útil é um capacitor que possa ser controlado por uma fonte de sinal. Assim se pode gerar capacitores variantes no tempo bastando fazer com que sejam controlados por fontes com formas de onda correspondentes a como variam as capacitâncias no tempo. Pode-se também implementar assim capacitores não lineares, com a capacitância controlada por variáveis do circuito. Um capacitor controlado a tensão pode ser definido na forma:

$$q(t) = Cv(t)v_1(t)$$

onde $v(t)$ é a tensão sobre o capacitor, $v_1(t)$ é a tensão de controle, e C um fator de escala em farads/volts. Aplicando esta relação na equação de integração de corrente gerando carga resulta:

$$Cv(t_0 + \Delta t)v_1(t_0 + \Delta t) = Cv(t_0)v_1(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} j(t)dt$$

Aplicando um dos métodos de discretização à integral, por exemplo o método “backward” de Euler, resulta um transcondutor não linear controlado por duas tensões:

$$j(t_0 + \Delta t) \approx \frac{C}{\Delta t}(v(t_0 + \Delta t)v_1(t_0 + \Delta t) - v(t_0)v_1(t_0))$$

O modelo para o método de Newton-Raphson é obtido da forma usual:

$$G_0 = \frac{C}{\Delta t}v_{1n}(t_0 + \Delta t)$$

$$G_1 = \frac{C}{\Delta t}v_n(t_0 + \Delta t)$$

$$I_0 = \frac{C}{\Delta t}(v_n(t_0 + \Delta t)v_{1n}(t_0 + \Delta t) - v(t_0)v_1(t_0)) - G_0v_n(t_0 + \Delta t) - G_1v_{1n}(t_0 + \Delta t)$$

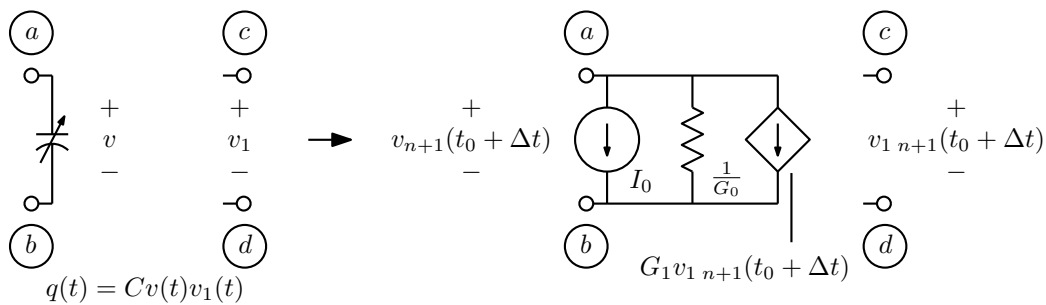


Figura 1.140: Capacitor controlado a tensão no método “backward” de Euler e modelo para o método de Newton-Raphson.

1.15.14.7 Indutor não linear

Basta repetir a mesma formulação feita para o capacitor não linear, com dualidade. O indutor não linear continua seguindo a equação fundamental associando fluxo magnético e tensão:

$$\phi(t_0 + \Delta t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} v(t) dt$$

Mas agora com a relação não linear entre fluxo e corrente, em vez da relação linear $\phi = Lj$:

$$\phi(t) = f(j(t))$$

O uso de um método de discretização da integração resulta também em um modelo que é um resistor não linear. Seja por exemplo o que acontece com o método “backward” de Euler:

$$f(j(t_0 + \Delta t)) \approx f(j(t_0)) + \Delta t v(t_0 + \Delta t)$$

Resulta um resistor não linear controlado a corrente, numa forma conveniente para a análise nodal modificada. A forma controlada a tensão poderia ser obtida também, mas com a inversão da função $f(j)$.

$$v(t_0 + \Delta t) \approx \frac{1}{\Delta t} (f(j(t_0 + \Delta t)) - f(j(t_0)))$$

O modelo que tem que ser montado na análise no tempo é o circuito linearizado para a análise de Newton-Raphson, que é o de um resistor não linear controlado a corrente:

$$R_0 = \frac{1}{\Delta t} f'(j_n(t_0 + \Delta t))$$

$$V_0 = \frac{1}{\Delta t} (f(j_n(t_0 + \Delta t)) - f(j(t_0)) - R_0 j_n(t_0 + \Delta t))$$

Aqui o termo $f'(j)$ é a “indutância incremental” do indutor não linear. Esta é a indutância que se coloca no modelo de pequenos sinais a partir de uma análise de ponto de operação, uma vez encontrada a corrente quiescente no indutor.

1.15.14.8 Histerese

Indutores com núcleo magnético apresentam frequentemente um tipo especial de não linearidade, que é a histerese. A curva $\phi = f(j)$ não é sempre a mesma, pois se a magnetização atinge alguma saturação em uma direção o núcleo fica magnetizado, e o retorno da curva se faz por outro caminho. A curva passa

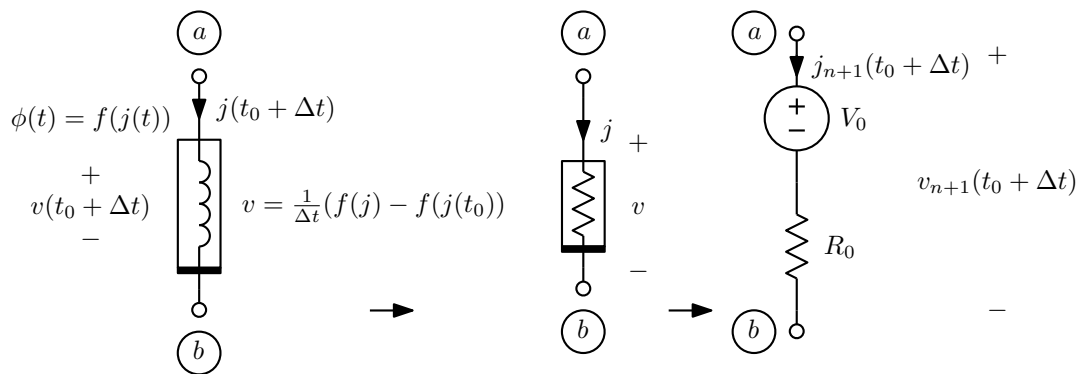


Figura 1.141: Indutor não linear no método “backward” de Euler e modelo para o método de Newton-Raphson.

por pontos onde o fluxo não é nulo quando a corrente é nula, indicando que um ímã se formou. A figura 1.142 ilustra o fenômeno. O tratamento da histerese exige a decomposição do indutor em mais de um elemento [5], para modelar a memória da história anterior que surge. Este modelamento não será tratado aqui por enquanto.

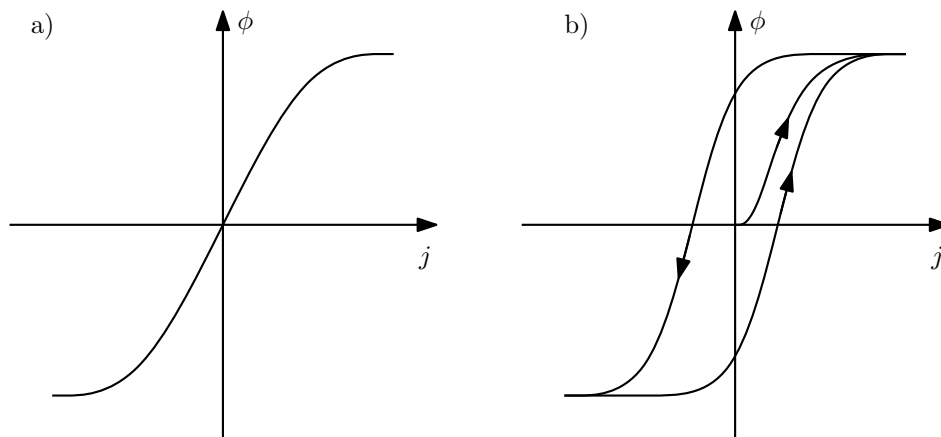


Figura 1.142: a) Indutor não linear com saturação. b) Com histerese.

1.15.14.9 Transformador não linear

Basta novamente partir da equação geral do transformador:

$$\vec{\phi}(t_0 + \Delta t) = \vec{\phi}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{v}(t) dt$$

Neste caso, o vetor de fluxos é um vetor de funções não lineares das correntes:

$$\vec{\phi}(t) = \vec{F}(\vec{j}(t))$$

$$\vec{F}(\vec{j}(t_0 + \Delta t)) = \vec{F}(\vec{j}(t_0)) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{v}(t) dt$$

A discretização da integral leva a um conjunto de equações não lineares envolvendo as correntes. Por exemplo, usando o método “backward” de Euler:

$$\vec{F}(\vec{j}(t_0 + \Delta t)) \approx \vec{F}(\vec{j}(t_0)) + \Delta t \vec{v}(t_0 + \Delta t)$$

É simples separar $\vec{v}(t_0 + \Delta t)$ e obter as funções em função de $\vec{j}(t_0 + \Delta t)$:

$$\vec{v}(t_0 + \Delta t) \approx \frac{1}{\Delta t} \left(\vec{F}(\vec{j}(t_0 + \Delta t)) - \vec{F}(\vec{j}(t_0)) \right)$$

A linearização para o método de Newton-Raphson gera uma rede de resistores, transresistores e fontes de tensão, com estrutura adequada para análise nodal modificada. A estrutura é a mesma do caso linear invariante no tempo. É possível também obter a forma controlada a tensão, mas para isso é necessário poder resolver o sistema de equações não lineares para obter $\vec{j}(t_0 + \Delta t)$ em função de $\vec{v}(t_0 + \Delta t)$.

1.15.15 Análise no tempo de circuitos não lineares variantes no tempo

Para tratar este caso basta seguir o mesmo procedimento do caso não linear, mas usando as funções não lineares com seus valores no tempo $t_0 + \Delta t$.

Seja por exemplo um capacitor não linear variante no tempo:

$$q(t) = f(v(t), t)$$

Aplicando o método “backward” de Euler vem:

$$\begin{aligned} q(t_0 + \Delta t) &\approx q(t_0) + \Delta t j(t_0 + \Delta t) \\ f(v(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t) &\approx f(v(t_0), t_0) + \Delta t j(t_0 + \Delta t) \\ j(t_0 + \Delta t) &\approx \frac{1}{\Delta t} (f(v(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t) - f(v(t_0), t_0)) \end{aligned}$$

Resultou um resistor não linear variante no tempo, similar ao que se obtém no caso não linear invariante no tempo, com a única diferença sendo que a função não linear a avaliar depende do instante onde a avaliação é feita. O mesmo ocorre com os demais métodos de integração e demais elementos reativos.

1.15.16 Modelos para elementos reativos variantes no tempo e não lineares

É possível modelar elementos reativos variantes no tempo ou não lineares usando elementos reativos lineares invariantes no tempo e elementos resistivos não lineares. Seja um capacitor linear variante no tempo, que segue a equação:

$$C(t_0 + \Delta t)v(t_0 + \Delta t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} j(t) dt$$

Para simular a equação pode-se gerar a função $C(t)$, multiplicá-la por $v(t)$, e forçar que o produto seja igual à integral da corrente $j(t)$. O modelo da figura 1.143a realiza estas operações, usando um amplificador operacional ideal para forçar a igualdade, um multiplicador de tensões nodais com saída em tensão para multiplicar e um capacitor para integrar. Analogamente, para um indutor linear variante no tempo vale a equação abaixo, que é simulada pelo modelo da figura 1.143b.

$$L(t_0 + \Delta t)j(t_0 + \Delta t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} v(t)dt$$

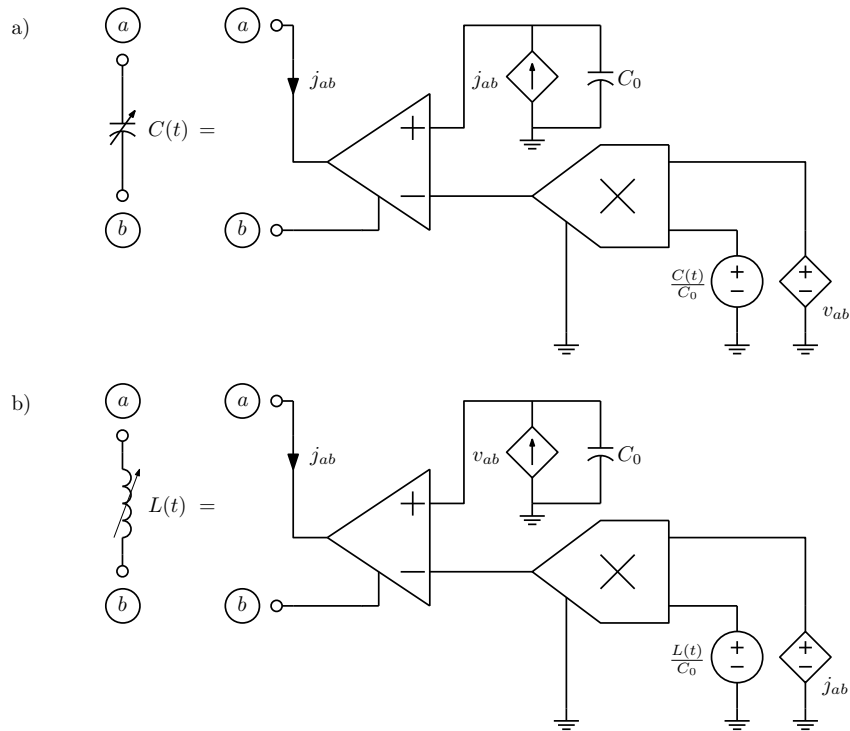


Figura 1.143: Modelos baseados em integrais para: a) Capacitor linear variante no tempo. b) Indutor linear variante no tempo.

É possível também usar as equações na forma de derivada. O capacitor e o indutor lineares variantes no tempo seguem as equações:

$$j(t) = \frac{d}{dt}(C(t)v(t))$$

$$v(t) = \frac{d}{dt}(L(t)j(t))$$

Estas equações são simuladas pelos circuitos da figura 1.144. Os dois modelos produzem exatamente os mesmos resultados, para qualquer método de integração usado.

É também possível usar um divisor em vez de um multiplicador, implementando as equações, para um capacitor e um indutor lineares variantes no tempo, que equivalem a usar os modelos da figura 1.145⁷⁴:

$$v(t) = \frac{1}{C(t)} \left(q(t_0) + \int j(t)dt \right)$$

$$j(t) = \frac{1}{L(t)} \left(\phi(t_0) + \int v(t)dt \right)$$

⁷⁴C. Basso, "SPICE analog behavioral modeling of variable passives", Power Electronics Technology, Março 2005.

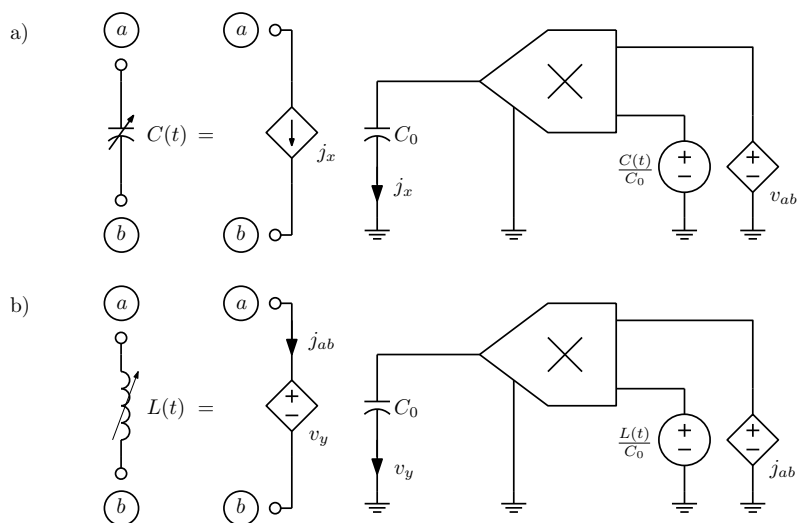


Figura 1.144: Modelos baseados em derivadas para: a) Capacitor linear variante no tempo. b) Indutor linear variante no tempo.

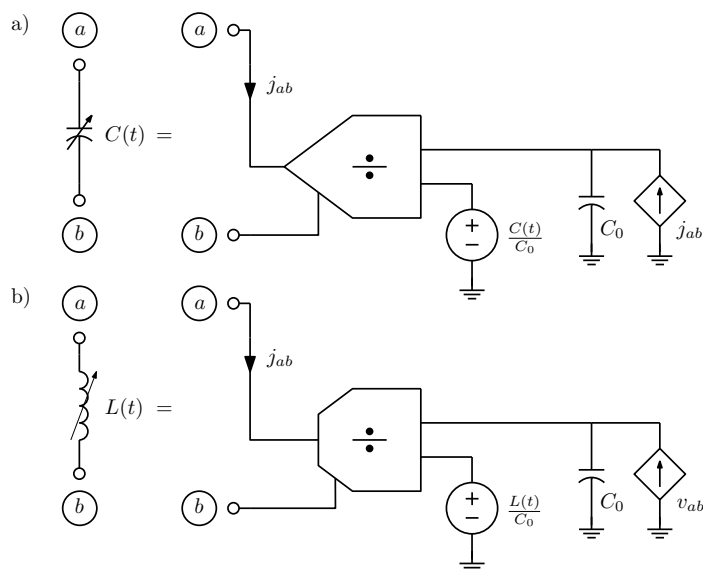


Figura 1.145: Modelos usando divisor para: a) Capacitor linear variante no tempo b) Indutor linear variante no tempo. O divisor para o modelo do indutor tem saída em corrente.

Um capacitor não linear com a função $q(t) = f(v(t))$ segue a equação:

$$f(v(t_0 + \Delta t)) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} j(t) dt$$

Esta equação pode ser simulada gerando-se a função $q(t) = f(v(t))$ e usando-se um amplificador

operacional ideal para forçar que seja igual à integral da corrente $j(t)$. Analogamente, para um indutor não linear vale a equação abaixo, que pode ser simulada gerando-se a função $\phi(t) = f(j(t))$ e usando-se um amplificador para igualá-la à integral da tensão $v(t)$. Os modelos correspondentes são os da figura 1.146.

$$f(j(t_0 + \Delta t)) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} v(t) dt$$

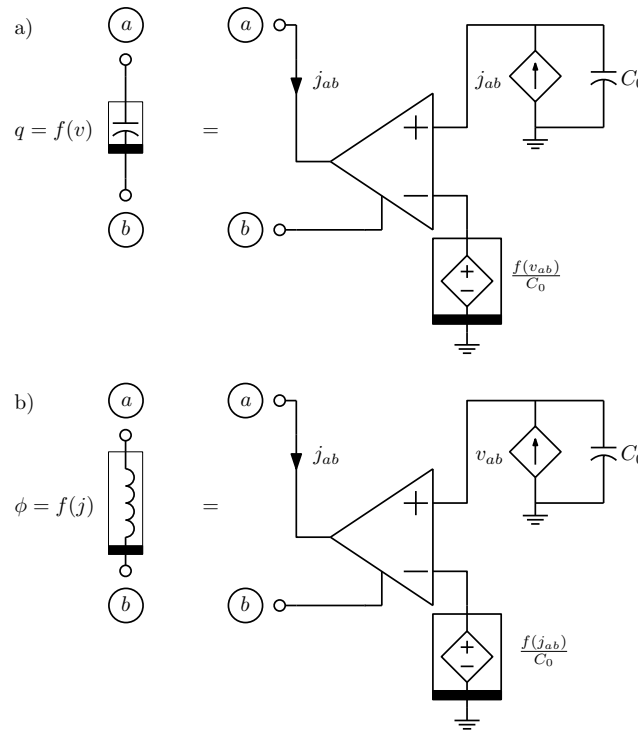


Figura 1.146: Modelos baseados em integrais para: a) Capacitor não linear. b) Indutor não linear.

Os modelos baseados em derivadas existem também neste caso, baseados nas equações abaixo e representados na figura 1.147, para um capacitor e para um indutor não lineares.

$$j(t) = \frac{d}{dt} f(v(t))$$

$$v(t) = \frac{d}{dt} f(j(t))$$

Para todos os modelos mostrados, a condição inicial, carga ou fluxo, é representada pela tensão inicial sobre o capacitor que faz a integração ou a diferenciação. O método de integração para o elemento variante no tempo ou não linear é o usado neste capacitor. Foi usada uma normalização através da capacitância C_0 , arbitrária, para manter o valor da integral ou derivada em nível similar ao das demais tensões e correntes. Notar que uma condição inicial em C_0 deve ser dividida por C_0 , pois representa a carga inicial no capacitor ou o fluxo inicial no indutor.

Modelos para transformadores podem ser obtidos de forma similar ao feito para indutores. Um transformador linear variante no tempo com dois indutores pode ser simulado como na figura 1.148. As

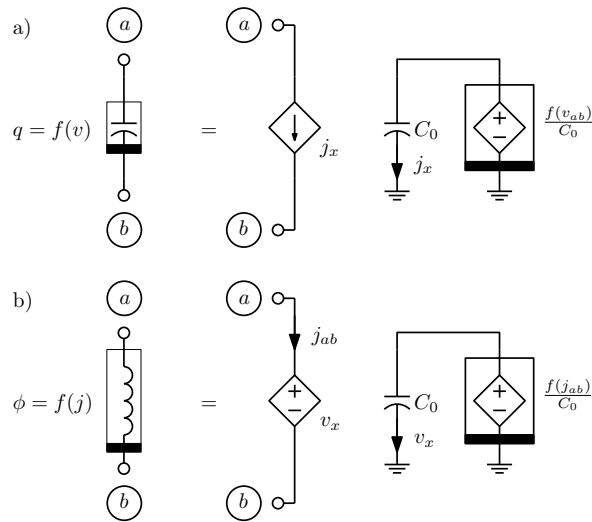


Figura 1.147: Modelos baseados em derivadas para: a) Capacitor não linear. b) Indutor não linear.

formas implementam as equações, para as formas usando integração e diferenciação:

$$[L(t_0 + \Delta t)]\vec{j}(t_0 + \Delta t) = \vec{\phi}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{v}(t) dt$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} ([L(t)]\vec{j}(t))$$

Um transformador não linear recai em um conjunto de blocos como os das figuras 1.146b ou 1.147b, um para cada indutor, como na figura 1.149, com as funções não lineares de acordo com a expressão:

$$\vec{F}(\vec{j}(t_0 + \Delta t)) = \vec{\phi}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{v}(t) dt$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \vec{F}(\vec{j}(t))$$

É evidente que os modelos para elementos não lineares podem também ser variantes no tempo, incluindo-se o tempo na geração da função não linear, o que inclui o caso linear variante no tempo como caso particular.

Exemplo: O dobrador de Bennet eletrônico (figura 1.133) pode ser simulado com os capacitores variáveis tratados de várias formas. O modelo no editor Edfil mostrado na figura 1.150 usa quatro formas de construir os modelos já discutidas, todos resultando nas mesmas formas de onda na simulação feita com o programa Mnae, mostradas na figura 1.151. Os diodos são ideais. O comportamento observado é um crescimento exponencial das tensões, com multiplicações por um fator constante $z \approx 1.353$ a cada ciclo, após um transiente inicial. Este fator pode ser previsto em função das capacitâncias mínima e máxima dos capacitores variáveis e da capacitância da carga [52], onde C_{ab} varia entre o mínimo C_{a1} e o máximo C_{a2} , enquanto C_{bc} varia entre o máximo C_{b1} e o mínimo C_{b2} , como:

$$z = \frac{C_1^2(C_{a1} + C_{b1}) + C_1(C_{a1}C_{a2} + C_{b1}(2C_{a2} + C_{b2})) + C_{a1}C_{b1}(C_{a2} + C_{b2})}{(C_1 + C_{a2} + C_{b2})(C_1(C_{a1} + C_{b1}) + C_{a1}C_{b1})}$$

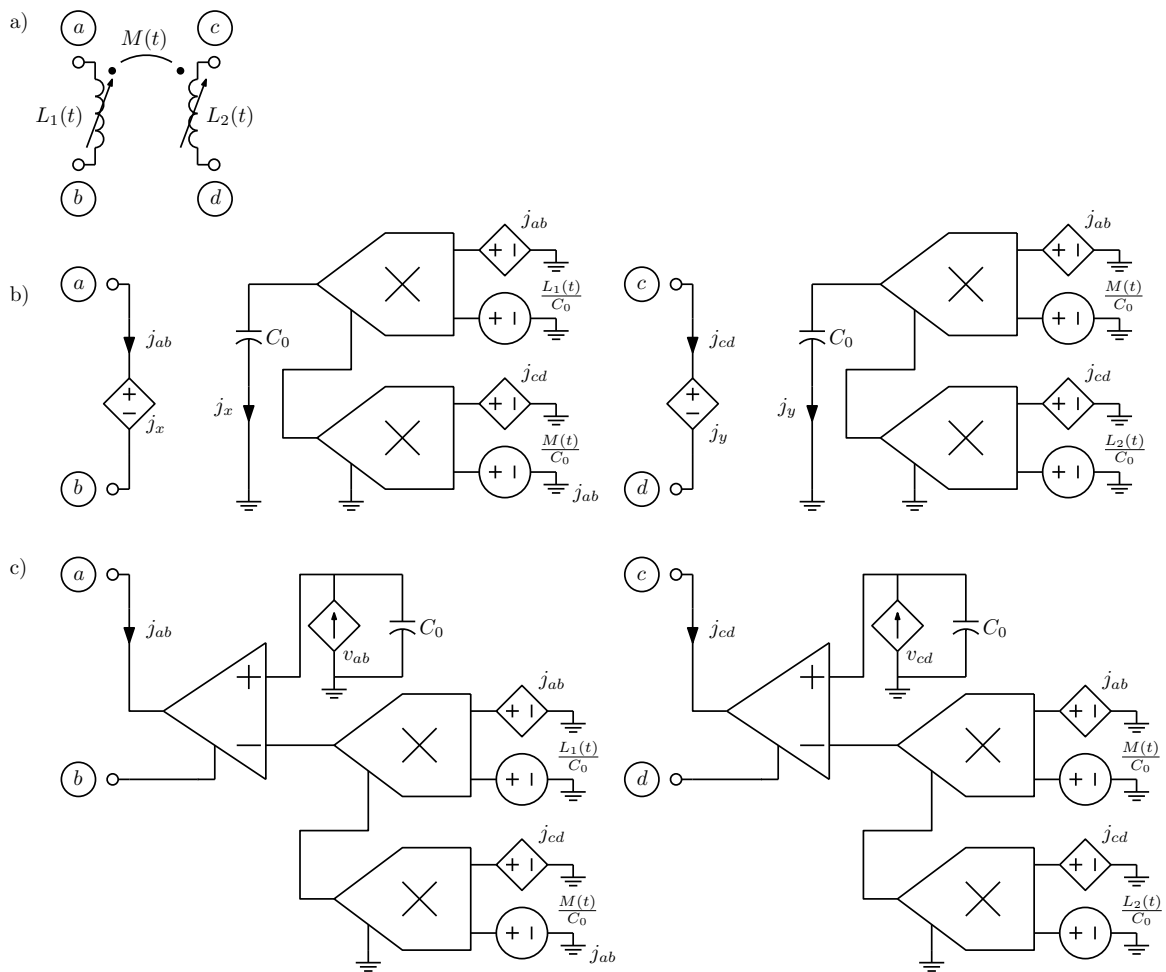


Figura 1.148: Modelos para um transformador linear variante no tempo (a). b) Modelo baseado em derivadas. c) Modelo baseado em integrais.

No caso, com valores normalizados $C_1 = 1$ F, $C_{a1} = C_{b2} = 0.1$ F e $C_{a2} = C_{b1} = 1$ F, resulta $z = \frac{341}{252} \approx 1.353$. O valor máximo de z vale 2, e para que z seja maior que 1 é necessário que as capacitâncias variáveis variem, no caso com os mesmos limites, com razão maior que 1.618:1, a “razão áurea”. É possível também deixar C_{bc} fixo, e então a mínima razão de variação de C_{ab} vale 2:1⁷⁵. O máximo valor de z continua sendo 2. A fórmula assume diodos ideais e nenhum capacitor extra. Com diodos não ideais, com queda de tensão fixa por exemplo, a análise é mais complexa e z passa a depender das tensões, tendendo ao valor ideal para altas tensões. Com capacitâncias extra, em paralelo com os diodos, uma fórmula mais completa prevê o comportamento no caso de chaves em vez de diodos [52], mas com diodos, mesmo ideais, não há mais perfeita equivalência. Exemplos de como a análise sistemática destes dispositivos, que são não lineares e variantes no tempo, pode ser feita são apresentados em [55] e trabalhos lá referenciados.

⁷⁵Também é possível, observando a fórmula mais completa para z em [52], fazer C_1 variar junto com C_{bc} , o que permite mínima razão de variação de $\sqrt{2} : 1$. Com isto a capacitância C_{ab} pode ser fixa, resultando uma mínima variação de 2:1.

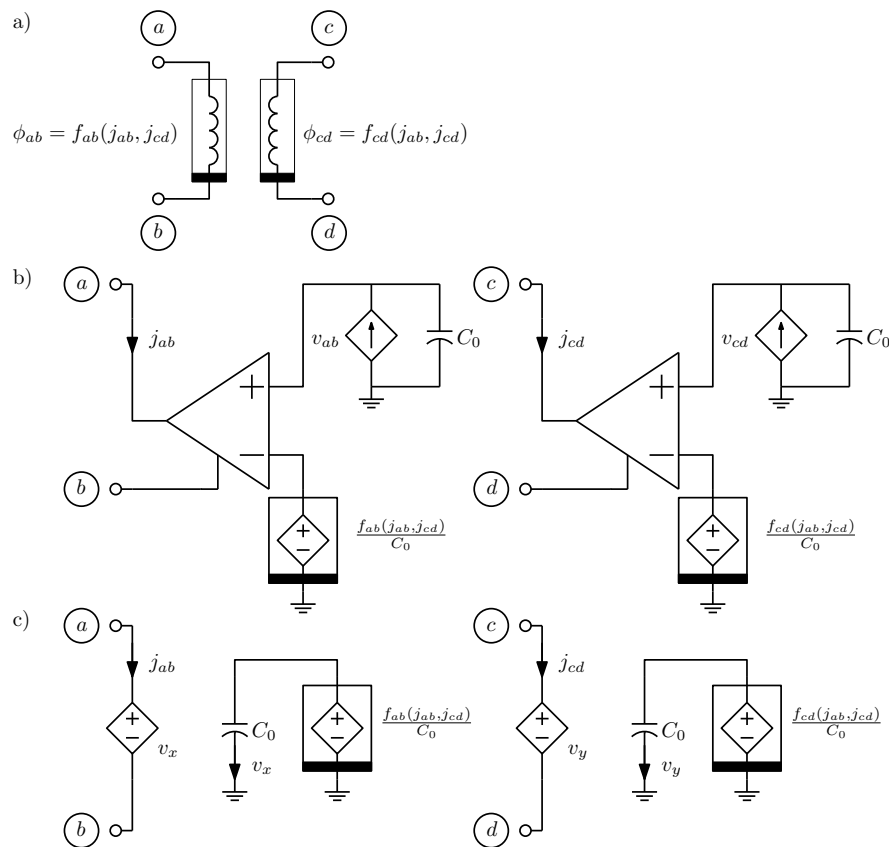


Figura 1.149: Modelos para um transformador não linear (a). b) Modelo baseado em integrais. c) Modelo baseado em derivadas.

Exemplo: É conhecido que um tanque LC oscilando em uma frequência ω_0 gera oscilações crescentes se a capacitância ou a indutância for modulada com frequência $2\omega_0$, realizando um “oscilador paramétrico”. O caso mais simples é um circuito linear variante no tempo que pode ser simulado com as técnicas discutidas. Não há problema também se existir não linearidade. Seja simular o circuito da figura 1.152, onde o capacitor é linear e o indutor é não linear e variante no tempo. A não linearidade considerada é uma saturação simples linear por partes reduzindo a indutância incremental à metade para correntes acima de 1 A, e a variância no tempo é uma modulação da amplitude da curva $\phi \times j$, com $\alpha = L_0 + \Delta L \sin 2\omega_0 t$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ rad/s.

Usando a integração por trapézios, os parâmetros para o modelo que calcula $\vec{e}_{n+1}(t_0 + \Delta t)$ valem:

$$G_C = \frac{2C_0}{\Delta t}$$

$$I_C = \frac{2C_0}{\Delta t} e_1(t_0) + j_c(t_0)$$

$$R_L = \frac{2}{\Delta t} f'(j_{2n}(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t)$$

$$V_L = \frac{2}{\Delta t} (f(j_{2n}(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t) - f(j_2(t_0), t_0)) - e_1(t_0) - R_L j_{2n}(t_0 + \Delta t))$$

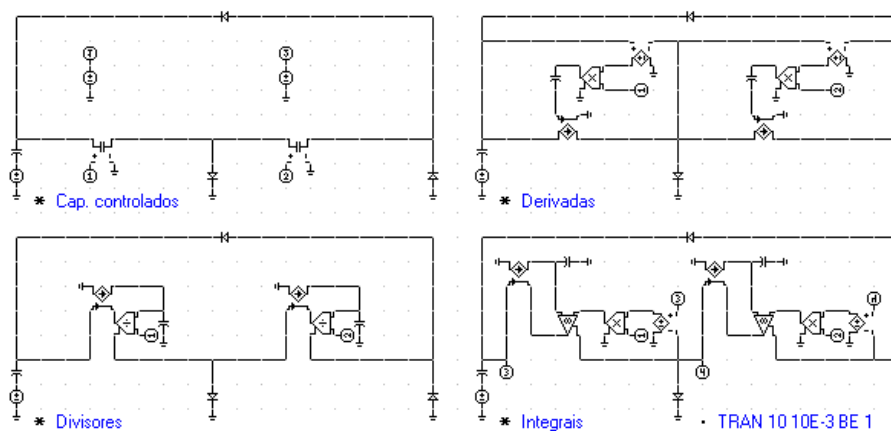


Figura 1.150: Modelos para o dobrador de Bennet eletrônico. Todos os elementos tem parâmetros unitários. As fontes de controle dos capacitores variáveis são senoidais de 1 Hz deslocadas, variando entre 0.1 e 1 V. As fontes em série com o capacitor de carga (C_1) são pulsos de 1 V, para inicializar os dobradores.

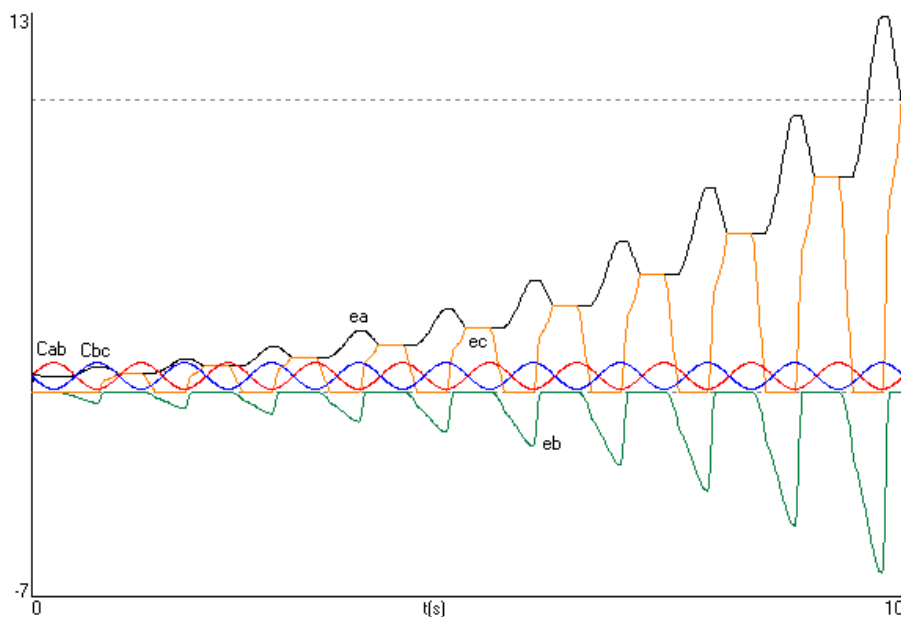


Figura 1.151: Tensões nos três nós do dobrador (figura 1.133) para os circuitos da figura 1.150.

No circuito, a corrente no capacitor é simplesmente $j_c = -j_2$. A função f e sua derivada f' valem $\alpha j_{2n}(t_0 + \Delta t)$ e α respectivamente se $|j_{2n}(t_0 + \Delta t)| < 1$, senão valem $0.5\alpha + 0.5\alpha j_{2n}(t_0 + \Delta t)$ e 0.5α . Ambas dependem da corrente j_2 e do tempo, como esperado. É simples simular este circuito sem ter o indutor não linear variante no tempo implementado no simulador usando modelos. A figura 1.153 mostra uma possível implementação no editor Edfil para simulação no programa Mnae. No modelo baseado em

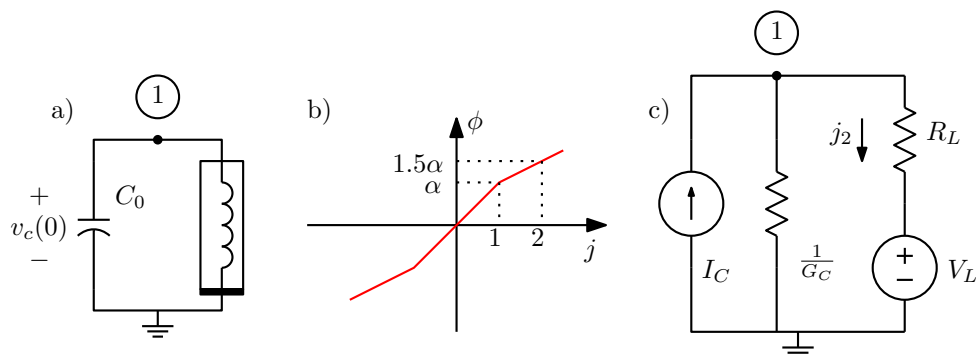


Figura 1.152: a) Tanque LC com indutor não linear variante no tempo. b) Curva $\phi_2 \times j_2$. c) Modelo.

derivada o indutor não linear é representado por um resistor não linear com função $j \times v$ igual à função $\phi \times j$ considerando $\alpha = 1^{76}$, e a modulação no tempo é realizada por um multiplicador, multiplicando a corrente no resistor por $L_0 + \Delta L \sin 2\omega_0 t$. O resultado da simulação, com $C_0 = 1$ F, $L_0 = 1$ H, $v_c(0) = 0.1$ V⁷⁷, $\omega_0 = 1$ rad/s e $\Delta L = 0.2$ H, mostra o esperado aumento exponencial da oscilação até que a saturação do indutor é atingida. Ocorre depois uma série de reduções da amplitude de oscilação temporárias, com a energia retornando à fonte mecânica que varia a indutância, com repetição posterior com período irregular. Como o circuito é quase sem perdas, a simulação é mais precisa com integração por trapézios⁷⁸.

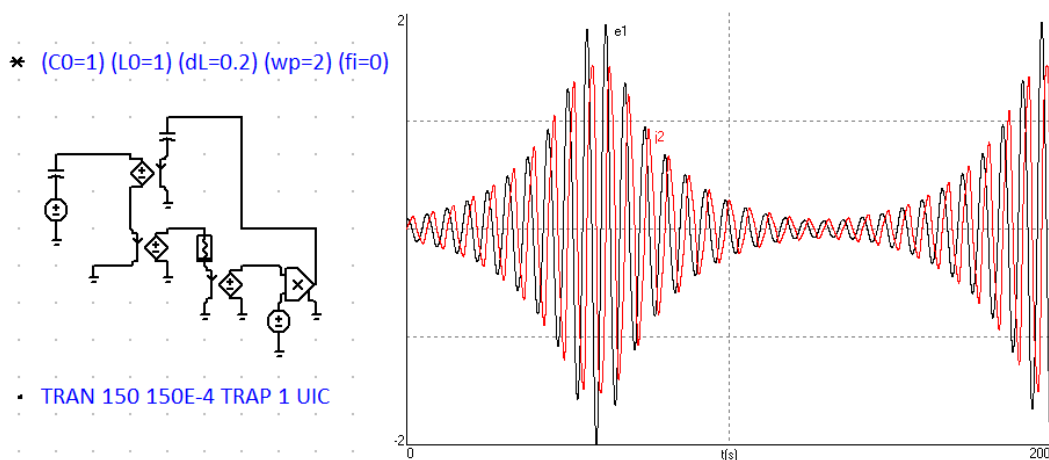


Figura 1.153: Modelo para o circuito da figura 1.152 e simulação, mostrando a tensão e_1 e a corrente j_2 .

⁷⁶Resistor linear por partes com limites $-2 - 1.5 - 1 - 1 1 1 2 1.5$.

⁷⁷No caso usando uma fonte em degrau em série com o capacitor. Poderia ser usada uma condição inicial com o mesmo resultado.

⁷⁸Ou Gear. O resultado, particularmente o período das recuperações, parece muito sensível a Δt .

1.15.17 O memristor⁷⁹

Quando se examina as relações que existem entre as variáveis de tensão, corrente, carga e fluxo, nota-se que as equações usuais geram associações diretas entre todos os pares, exceto entre carga e fluxo. O elemento “faltante” que define esta relação é o “memristor” [56], gerando a relação $\phi(t) = f(q(t))$ no caso invariante no tempo, como mostrado na figura 1.154.

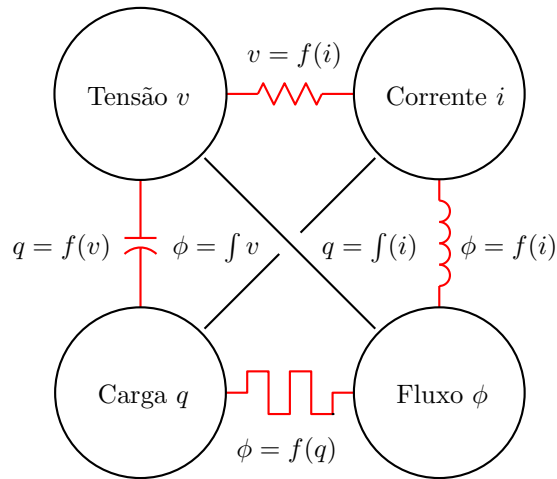


Figura 1.154: Relações entre tensão, corrente, carga e fluxo. O “memristor” provê a relação que falta entre carga e fluxo magnético.

Em uma análise no tempo o memristor gera a equação, no caso controlado a carga:

$$\phi(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} v(t)dt = f \left(q(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} i(t)dt \right)$$

No caso linear, $f(q) = Rq$, a relação se reduz à de um resistor linear de resistência R , pois as condições iniciais se cancelam devido à relação $\phi(t_0) = Rq(t_0)$ e resta apenas $v(t) = Ri(t)$ pela igualdade das integrais de $v(t)$ e de $Ri(t)$. O caso interessante é então o não linear. Um sistema assim poderia ser simulado, seja pelo método “backward” de Euler, como:

$$\begin{aligned} \phi(t_0) + \Delta t v(t_0 + \Delta t) &= f(q(t_0) + \Delta t i(t_0 + \Delta t)) \\ v(t_0 + \Delta t) &= \frac{1}{\Delta t} f(q(t_0) + \Delta t i(t_0 + \Delta t)) - \frac{\phi(t_0)}{\Delta t} \end{aligned}$$

Esta relação define um resistor não linear como usual, tratável pelo método de Newton-Raphson. As variáveis $q(t)$ e $\phi(t)$ devem ser atualizadas após a convergência:

$$q(t_0 + \Delta t) = q(t_0) + \Delta t i(t_0 + \Delta t); \quad \phi(t_0 + \Delta t) = \phi(t_0) + \Delta t v(t_0 + \Delta t)$$

É simples usar modelos para modelar o memristor. Um modelo baseado em integrais gera as integrais da tensão e da corrente no memristor, gera a função $f(q(t))$ com um operador não linear e usa um amplificador operacional ideal para forçar a igualdade $\phi(t) = f(q(t))$. Um modelo no editor Edfil é mostrado na figura 1.155. A plotagem da característica corrente \times tensão do dispositivo gera curvas

⁷⁹Material opcional.

como as mostradas, mostrando a típica curva de histerese pinçada na origem destes dispositivos. No caso a função usada foi $\phi = q^3 - q^2 + q$ ⁸⁰. A fonte de teste é uma onda triangular com 1 V de amplitude, com as curvas correspondendo a períodos de 2, 4, 8 e 16 segundos. As curvas se repetem em todos os ciclos. Frequências maiores tendem a gerar um resistor linear, e funções puramente ímpares parecem não gerar histerese.

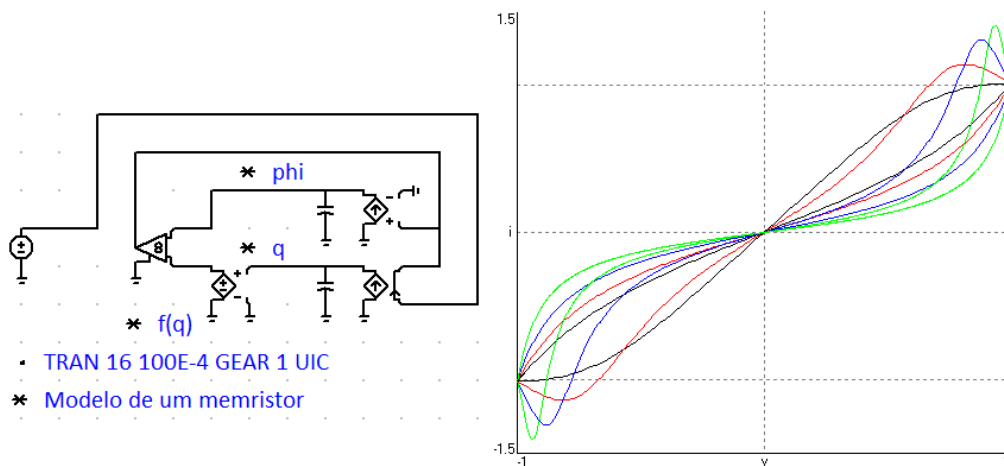


Figura 1.155: Modelo para um memristor aterrado ligado a uma fonte de tensão de teste, e curvas de corrente \times tensão obtidas.

⁸⁰Definição 0 1 -1 1 no simulador Mnae.

Capítulo 2

Outros métodos de análise

2.1 Análise das malhas

A análise das malhas¹ é comumente o primeiro método de análise de circuitos estudado, possivelmente porque ele não requer fontes de corrente, que são dispositivos “não naturais”, ao contrário das fontes de tensão, que modelam com boa aproximação as fontes de alimentação elétricas comuns, como baterias, ou a rede elétrica. O método consiste em:

1. Desenhar o circuito em forma planar, sem ramos se cruzando, de forma a identificar malhas no grafo do circuito.
2. Para cada malha, escrever uma equação: \sum quedas de tensão = 0, usando como incógnitas as “correntes de malha”.

As malhas são todos os espaços abertos no grafo (plano) do circuito. As correntes de malha são correntes fictícias que circulam apenas no interior das malhas. Se for considerada também uma malha externa, e todas as correntes de malha circulando na mesma direção nas malhas, exceto pela corrente na malha externa que circula na direção oposta, todas as correntes nos ramos são diferenças de duas correntes de malha. Note que isto é equivalente a desenhar o grafo sobre uma superfície esférica, e colocar todas as correntes de malha girando na mesma direção, como vistas olhando pelo lado da esfera mais próximo do centro da malha. Para ter uma referência para os valores das correntes de malha, considera-se que a corrente na malha externa é nula. Assim ramos que estejam nas bordas do grafo são percorridos por apenas uma corrente de malha, enquanto os ramos internos são percorridos por duas correntes de malha em sentidos opostos. Ver figura 2.1.

Exemplo: Seja o circuito da figura 2.2, que tem o mesmo grafo da figura 2.1. As equações das malhas são:

$$\begin{aligned} 1) \quad & R_4(i_1 - i_2) + R_3(i_1 - i_3) = V \\ 2) \quad & R_1 i_2 + R_4(i_2 - i_1) + R_m i_1 = 0 \\ 3) \quad & R_2 i_3 + R_3(i_3 - i_1) - R_m i_1 = 0 \end{aligned}$$

Ou, na notação matricial usual:

$$\begin{bmatrix} R_3 + R_4 & -R_4 & -R_3 \\ R_m - R_4 & R_1 + R_4 & 0 \\ -R_m - R_3 & 0 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

¹A análise das malhas aparece no livro de Maxwell “A Treatise on Electricity and Magnetism”, 1873, §347, em uma análise da Ponte de Wheatstone. O mesmo na segunda edição de 1881. É frequentemente citada como “Método de Maxwell das correntes circulantes”.

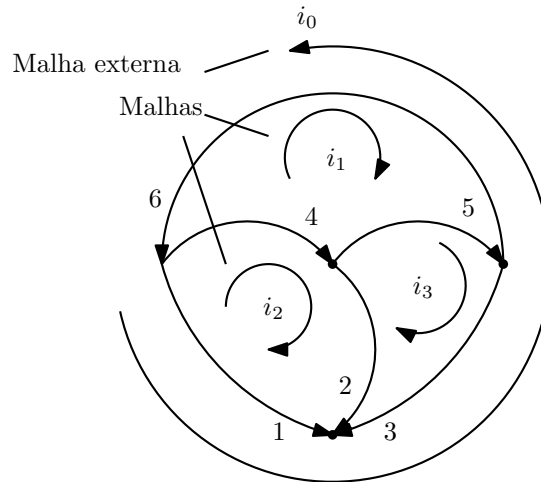


Figura 2.1: Grafo planar, malhas e correntes de malha.

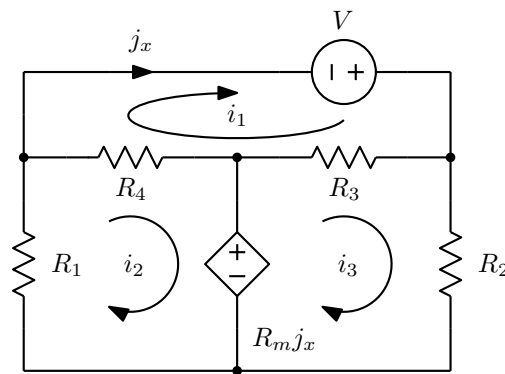


Figura 2.2: Circuito a ser analisado pelo método das malhas.

A análise das malhas pode ser formalizada de forma similar à feita para a análise nodal. Começa-se pela descrição do grafo orientado do circuito, de forma adequada para malhas, através da matriz $[M]$, de ordem número de malhas \times número de ramos, tal que:

- $M_{ik} = 1$ se o ramo k está na malha i e suas direções concordam.
- $M_{ik} = -1$ se o ramo k está na malha i e suas direções discordam.
- $M_{ik} = 0$ se o ramo k não está na malha i .

Considerando então os usuais vetores de tensões nos ramos \vec{v} e de correntes nos ramos \vec{j} , e um vetor de correntes de malha \vec{i} , as seguintes relações vem das leis de Kirchhoff:

$$\begin{aligned} \text{KVL: } [M]\vec{v} &= 0 \\ \text{KCL: } \vec{j} &= [M]^T\vec{i} \end{aligned}$$

O ramo padrão para a análise das malhas deve ser controlado a corrente, o mesmo tipo de ramo usado nas equações extra da análise nodal modificada, que tem a equação geral, considerando que cada ramo k tem, em série, um resistor R_k , vários transresistores $R_{m\ ki}$ controlados por correntes j_i em outros ramos, e uma fonte de tensão v_{sk} :

$$v_k = R_k j_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^b R_{m \ ki} j_i + v_{sk}$$

Para todos os ramos tem-se então o sistema de equações:

$$\vec{v} = [R]\vec{j} + \vec{v}_s$$

Combinando com as relações vindas das leis de Kirchoff, tem-se o sistema das malhas:

$$[M]\vec{v} = [M][R][M]^T \vec{i} + [M]\vec{v}_s$$

$$[M][R][M]^T \vec{i} = -[M]\vec{v}_s$$

$$[R_m]\vec{i} = \vec{v}_m$$

A matriz $[R_m] = [M][R][M]^T$ é a “matriz de resistência das malhas”, e o vetor $\vec{v}_m = -[M]\vec{v}_s$ é o “vetor de fontes de tensão nas malhas”.

Uma vez calculadas as correntes de malha \vec{i} , as correntes de ramo são calculadas por $\vec{j} = [M]^T \vec{i}$, e as tensões de ramo por $\vec{v} = [R]\vec{j} + \vec{v}_s$.

Exemplo: Seja o mesmo circuito da figura 2.2, agora como na figura 2.3, com os ramos numerados. As matrizes $[M]$ e $[R]$ e o vetor \vec{v}_s são obtidos como:

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 \\ R_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix}; \quad \vec{v}_s = \begin{bmatrix} -V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

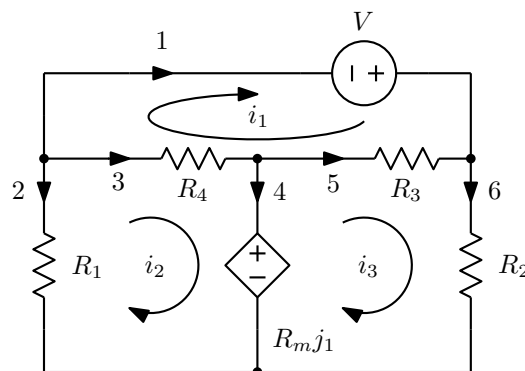


Figura 2.3: Mesmo circuito, com os ramos numerados.

A montagem do sistema com as operações matriciais resulta no mesmo sistema anteriormente montado. Como se vê pela semelhança com o que foi feito para a análise nodal, a análise das malhas é simplesmente a

análise nodal do circuito dual, onde são trocadas entre si as variáveis de tensão e corrente, os componentes são dualizados, e as malhas se tornam nós. A malha externa corresponde ao nó de terra. Um netlist para análise de malhas poderia descrever os elementos em função de em que malhas estão em vez de em função de a que nós estão ligados. A análise das malhas é então feita exatamente como na análise nodal, com os elementos dualizados.

Exemplo: O circuito dos exemplos anteriores pode ser descrito com base nas malhas onde os elementos estão, através de um “netlist” que diz em que malhas os elementos estão e em que orientação. A ordem das linhas indica a numeração dos ramos, e a sequência das malhas a orientação do ramo:

- 1) V 0 1 <valor>
- 2) R1 0 2 <valor>
- 3) R4 2 1 <valor>
- 4) Rm 2 3 1 0 <valor>
- 5) R3 3 1 <valor>
- 6) R2 3 0 <valor>

O sistema pode então ser montado por estampas, com estampas similares às da análise nodal, em versão dual. A estampa de um resistor de resistência R nas malhas a e b acrescenta R nas posições (a, a) e (b, b) e subtrai R nas posições (a, b) e (b, a) de $[R_m]$. Esta e as outras estampas são mostradas abaixo:

Estampa, que fica apenas em $[R_m]$, de um resistor de valor R nas malhas a e b :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{bmatrix} +R & -R \\ -R & +R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \end{array}$$

Estampa, que fica apenas em $[R_m]$, de um transresistor de transresistência R_m com saída nas malhas a e b e entrada nas malhas c e d :

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c & d \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & +R_m & -R_m \\ \cdot & \cdot & -R_m & +R_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \end{array}$$

Estampa, que fica apenas em \vec{v}_s , de uma fonte de tensão de valor V , nas malhas a e b :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V \\ +V \end{bmatrix} \end{array}$$

As regras para a montagem manual do sistema das malhas são também uma versão dual das regras para montagem do sistema nodal. Depois de desenhar o circuito em forma planar, começa-se por transformar o circuito deixando apenas resistores, transresistores controlados por correntes de malha e fontes de tensão. Trata-se temporariamente os transresistores como fontes independentes de tensão. Assim, o sistema fica com a matriz $[R_m]$ simétrica, com:

$$R_{m\ kk} = \sum \text{resistências na malha } k.$$

$$R_{m\ ki}, i \neq k = - \sum \text{resistências comuns às malhas } k \text{ e } i.$$

$$v_{m\ k} = \sum \pm \text{fontes de tensão na malha } k, \text{ positivas se a corrente } i_k \text{ sai pelo terminal positivo.}$$

A seguir retornam-se para a matriz $[R_m]$ os termos controlados no vetor \vec{v}_m .

A análise de malhas aceita diretamente apenas resistores, transresistores e fontes de tensão. Para inclusão de outros elementos, o problema é também o dual do que ocorre na análise nodal. Os elementos controlados a tensão podem ser deslocados, ou podem ser modelados com os elementos permitidos, o que equivale a uma “análise de malhas modificada”, em que são incluídas como incógnitas as tensões sobre fontes de corrente e circuitos abertos controladores e acrescentadas as equações dos ramos que os contém.

2.1.1 Deslocamento de fontes de corrente

Ramos contendo fontes de corrente ou circuitos abertos (para controle de fontes) podem ser tratados diretamente se estiverem em paralelo com ramos contendo resistores ou fontes de tensão, incluindo transresistores e curto-circuitos. Para uma fonte basta realizar um equivalente Thévenin ou a ignorar se estiver em paralelo com fonte de tensão (fig. 2.4). Para um circuito aberto, basta exprimir sua tensão em função da corrente sobre um resistor em paralelo, ou como a tensão sobre ele diretamente, se estiver em paralelo com fonte de tensão. No caso de não haver nada em paralelo, fontes de corrente e circuitos abertos podem ser deslocados conforme ilustrado na figura 2.5. A fonte somente tem que retirar corrente de um nó e a injetar em outro, de forma a que não importa se cópias dela colocam e retiram corrente em uma cadeia de nós entre as extremidades originais. O deslocamento de circuitos abertos é similar, deslocando-se até que seja possível exprimir a tensão sobre o circuito aberto como uma série de tensões sobre ramos que a análise de malhas permite. Deslocamentos de fontes de corrente não afetam as tensões nos ramos que restam.

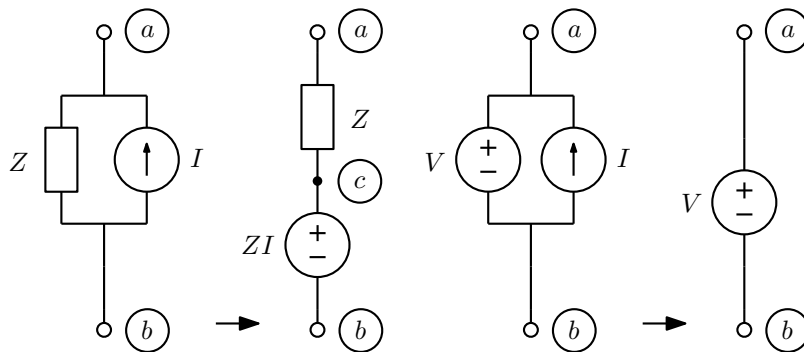


Figura 2.4: Equivalente Thévenin e eliminação de fonte de corrente.

Exemplo: Seja analisar o circuito da figura 2.6. Duas fontes de corrente devem ser deslocadas. A fonte independente foi deslocada para ficar em paralelo com a fonte de tensão e com R_1 . O transcondutor foi deslocado pela malha externa. A tensão de controle v_y não foi alterada, e vale $v_y = R_2 i'_1$. A corrente j_x vale $j_x = i'_1 + I$. A equação que resta é:

$$[R_1 + R_2 - R_m] i'_1 = [-R_1 I + R_m I]$$

Notar que a corrente i'_1 não é a corrente i_1 da malha superior do circuito original, devido ao transcondutor deslocado pela malha externa. Deslocar ramos pela malha externa é similar ao equivalente dual na análise nodal de deslocar ramos para o nó de terra, o que acrescenta a tensão no ramo deslocado a todas as tensões nodais. No caso da análise de malhas, a corrente no ramo deslocado para a malha externa é acrescentada a todas as correntes de malha. As variáveis sobre os ramos, como j_x e v_y , são as mesmas, e permitem completar a solução do circuito original. Note-se que G_m não aparece nos denominadores, pois a tensão sobre o transcondutor está forçada pela fonte de tensão e pelo transcondutor:

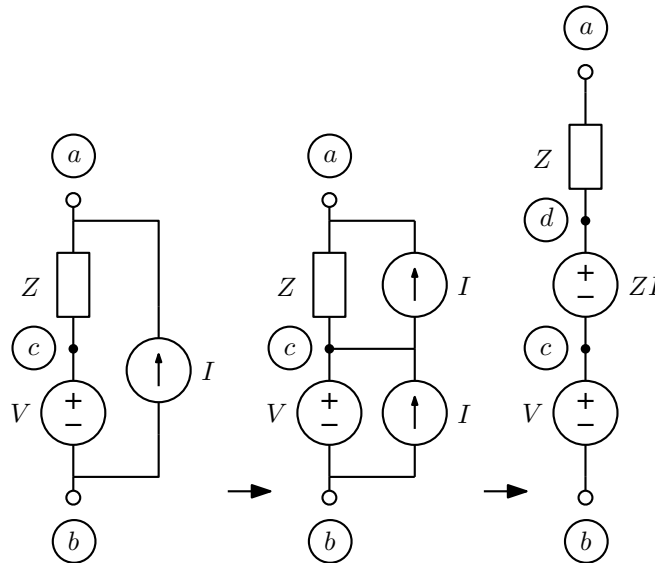


Figura 2.5: Deslocamento de fonte de corrente.

$$\begin{aligned}
 i'_1 &= \frac{-R_1 I + R_m I}{R_1 + R_2 - R_m} \\
 v_y &= R_2 i'_1 = \frac{-R_2 I (R_1 - R_m)}{R_1 + R_2 - R_m} \\
 j_x &= i'_1 + I = \frac{R_2 I}{R_1 + R_2 - R_m} \\
 i_1 &= i'_1 - G_m v_y = \frac{I (R_1 - R_m) (G_m R_2 - 1)}{R_1 + R_2 - R_m} \\
 i_2 &= i_1 - j_x = \frac{I (G_m R_2 (R_1 - R_m) - R_1 - R_2 + R_m)}{R_1 + R_2 - R_m} \\
 i_3 &= -G_m v_y = \frac{G_m R_2 I (R_1 - R_m)}{R_1 + R_2 - R_m}
 \end{aligned}$$

2.1.2 Análise das malhas modificada

Ramos contendo fontes de corrente ou circuitos abertos podem ser tratados incluindo-se as tensões sobre estes ramos como novas incógnitas e as equações destes ramos na forma controlada a tensão como novas equações, em um dual da análise nodal modificada.

Exemplo: Seja analisar o mesmo circuito do exemplo anterior usando análise de malhas modificada. As tensões sobre a fonte de corrente e o transcondutor são acrescentadas como incógnitas, e também as equações destes elementos. A tensão v_y foi acrescentada como a incógnita v_6 também, por ser tensão controladora de fonte. Como fica sobre R_2 , este foi então tratado como um resistor que pode ser um circuito aberto, com sua equação acrescentada. Os elementos não ficam completamente independentes com essa formulação, mas tratar a tensão v_y separadamente exigiria introduzir outro ramo, um circuito aberto, só para ela e outra malha. O modelo é o da figura 2.7. O sistema de equações é:

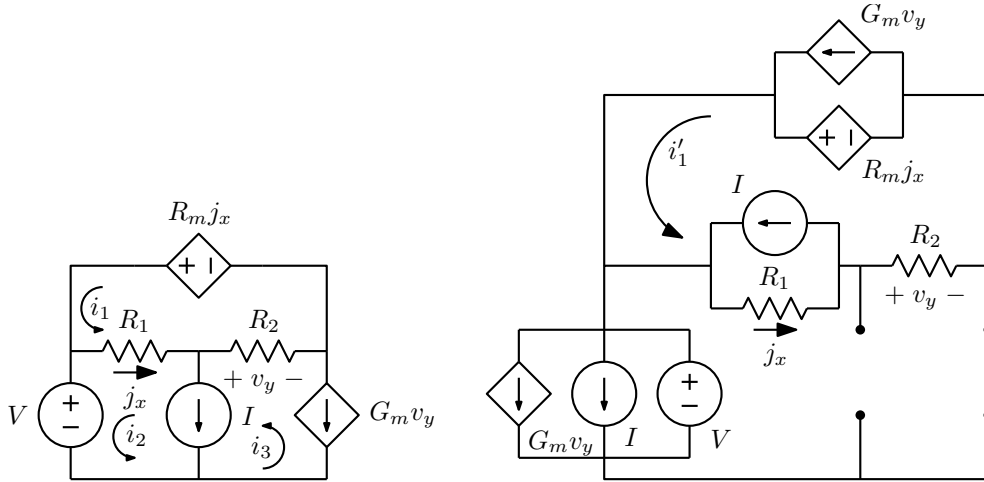


Figura 2.6: Deslocamento de fonte de corrente e transcondutor.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} R_1 - R_m & -R_1 + R_m & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -R_1 & R_1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & G_m \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{R_2} \end{array} \right] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -V \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução é a mesma do sistema anterior, com as correntes calculadas diretamente.

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{I(R_1 - R_m)(G_m R_2 - 1)}{R_1 + R_2 - R_m} \\ i_2 &= \frac{I(G_m R_2(R_1 - R_m) - R_1 - R_2 + R_m)}{R_1 + R_2 - R_m} \\ i_3 &= \frac{G_m R_2 I(R_1 - R_m)}{R_1 + R_2 - R_m} \\ v_4 &= \frac{R_2 I(R_2 - R_m)}{R_1 + R_2 - R_m} - R_2 I + V \\ v_5 &= V - \frac{R_2 R_m I}{R_1 + R_2 - R_m} \\ v_6 &= \frac{-R_2 I(R_1 - R_m)}{R_1 + R_2 - R_m} \end{aligned}$$

É possível também modelar estes ramos usando os elementos permitidos pela análise de malhas, também em um dual do que foi feito para a análise nodal². Uma fonte de corrente pode ser simulada por uma fonte de tensão ligada ao circuito por um girador, com o girador construído com dois transresistores. Os modelos para as três fontes controladas que a análise de malhas não permite seguem a mesma ideia (figura 2.8).

²Uma forma um tanto excessivamente complicada de analisar circuitos.

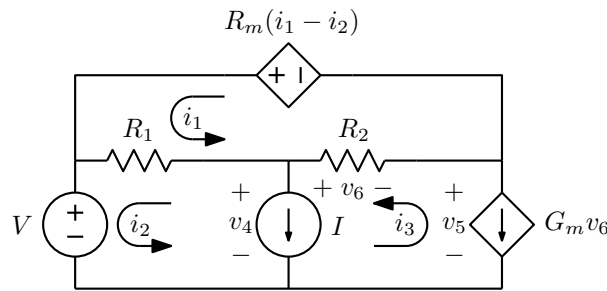


Figura 2.7: Circuito para análise de malhas modificada.

As estampas que correspondem a estes modelos são exatamente as duais das estampas da análise nodal modificada:

$$\text{Fonte de corrente: } \begin{matrix} a \\ b \\ x \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \hline -1 & +1 & \cdot & \cdot \end{array} \right] \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ -I \end{bmatrix}$$

$$\text{Amp. de corrente: } \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ x \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline -1 & +1 & +B & -B & \cdot \end{array} \right] \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \\ v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$\text{Amp. de tensão: } \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ x \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +A \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -A \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \hline \cdot & \cdot & -1 & +1 & \cdot \end{array} \right] \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \\ v_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$\text{Transcondutor: } \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ x \\ y \end{matrix} \left[\begin{array}{cccc|cc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & -1 & +1 & \cdot & \cdot \\ -1 & +1 & \cdot & \cdot & +G_m & \cdot \end{array} \right] \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Exemplo:

Seja analisar o circuito da figura 2.9a. Um ramo em circuito aberto é acrescentado para a tensão de controle v_x , já que ela não está sobre nenhum ramo existente, e para tornar os elementos independentes. Isto acrescenta também uma malha. O transcondutor é substituído por seu modelo da figura 2.8. O modelo resultante é o da figura 2.9b, com i_4 correspondendo a v_x e i_5 à tensão sobre o transcondutor. O sistema de equações das malhas é:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} R_1 + R_2 & -R_2 & -R_1 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & -R_3 & 0 & 1 \\ -R_1 & -R_3 & R_1 + R_3 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & G_m & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

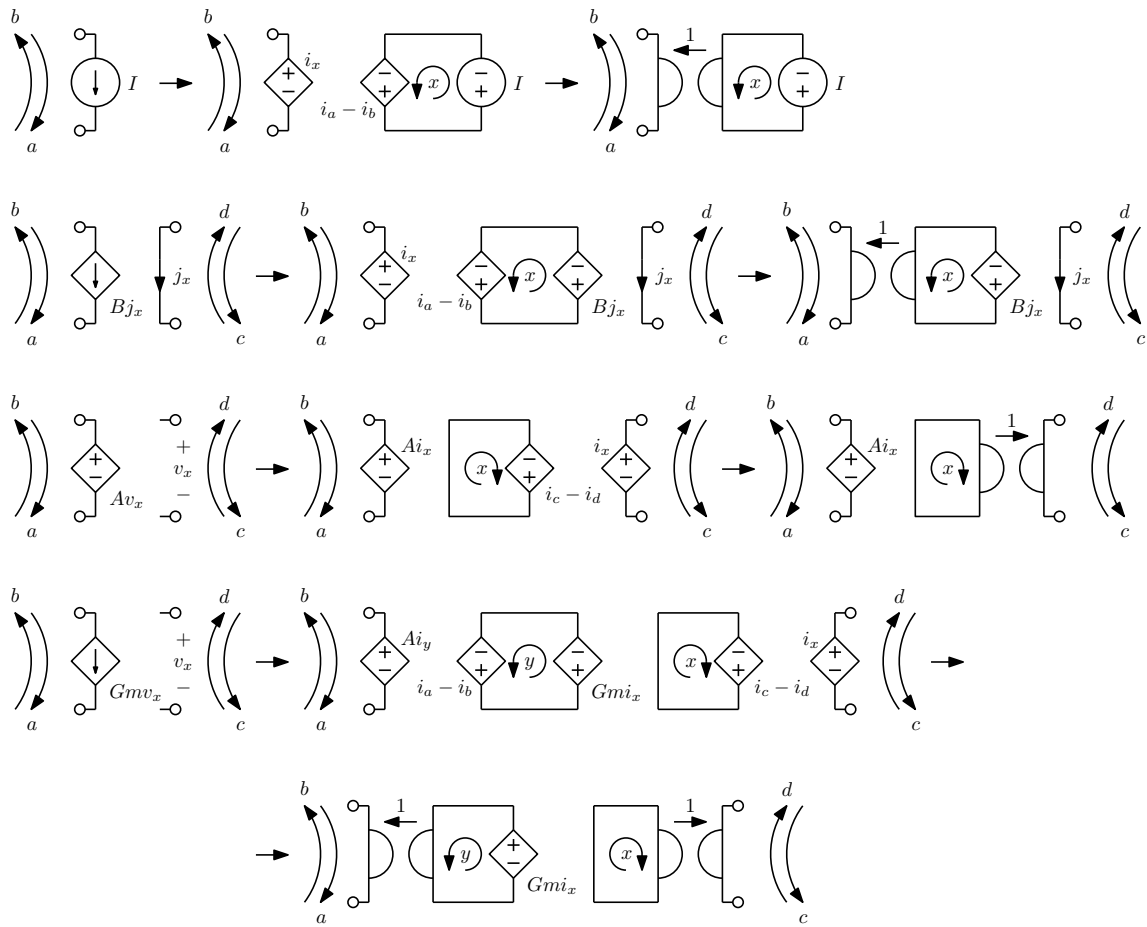


Figura 2.8: Modelos correspondendo à “análise de malhas modificada”. Algumas malhas foram invertidas para deixar clara a existência dos giradores. Para voltar à convenção de todas as malhas no mesmo sentido basta inverter aquelas seções.

É interessante verificar a dualidade com a análise nodal modificada. A figura 2.10 mostra a obtenção do circuito dual do exemplo. A polaridade dos ramos é obtida com um giro no sentido oposto ao das malhas onde os ramos duais cruzam os originais³. O sistema nodal modificado correspondente é idêntico ao obtido acima, apenas com diferentes incógnitas:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} R_1 + R_2 & -R_2 & -R_1 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & -R_3 & 0 & 1 \\ -R_1 & -R_3 & R_1 + R_3 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & G_m & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

³Para voltar ao circuito original o mesmo deve ser feito com giro no sentido oposto, igual ao das malhas.

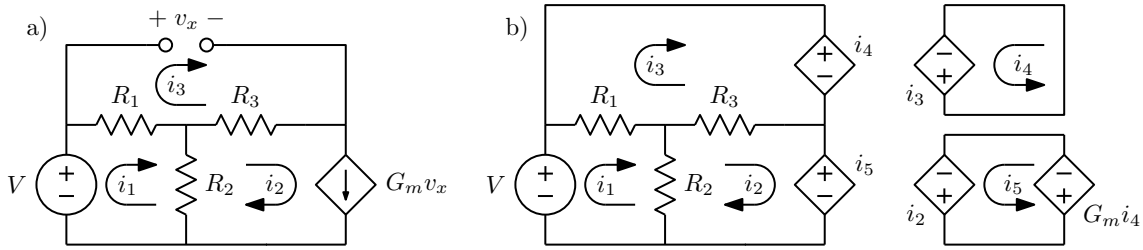


Figura 2.9: Análise de malhas usando modelamento para um transcondutor.

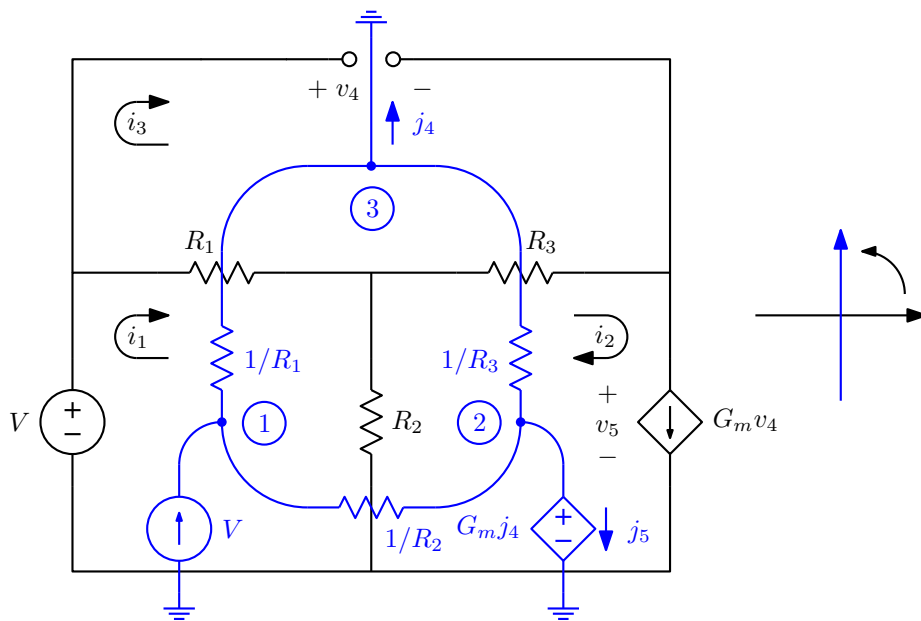


Figura 2.10: Obtenção do circuito dual ao do exemplo.

2.1.3 Amplificador operacional na análise de malhas

O amplificador operacional ideal, modelado como um par “nullator-norator”, tem dois ramos separados, correspondendo aos ramos de entrada e saída do amplificador (figura 2.11). Para incluí-lo na análise de malhas modificada basta acrescentar a tensão de saída como incógnita e uma equação dizendo que as duas correntes de malha passando pelo ramo de entrada são iguais, para que a corrente de entrada seja nula.

É possível também reduzir o tamanho do sistema, de forma análoga ao feito com a análise nodal. Basta observar que a tensão de saída aparece com sinais opostos nas duas equações das malhas contendo o ramo de saída, e que as duas correntes de malha passando pelo ramo de entrada são iguais. A redução é então similar à do caso nodal:

Somar as equações das malhas que contém o ramo de saída.

Somar as colunas da matriz do sistema correspondentes às malhas que contém o ramo de entrada.

Se uma das malhas passando pelo ramo de saída for a externa, basta eliminar a outra equação. Se

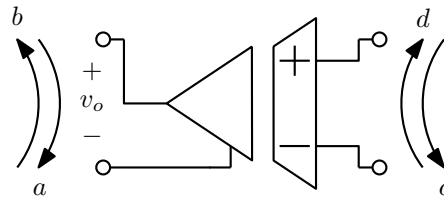


Figura 2.11: Amplificador operacional ideal na análise de malhas.

uma das malhas passando pelo ramo de entrada for a externa, basta eliminar outra coluna da matriz do sistema e a variável correspondente, que é nula.

Exemplo: Seja o circuito da figura 2.12, a ser analisado em transformada de Laplace. O circuito já está desenhado com o amplificador operacional com os ramos de entrada e saída separados. O ramo com circuito paralelo RC pode ser tratado como uma única impedância $Z(s) = R_1/(sR_1C_1 + 1)$ em série com uma fonte de tensão $V(s) = v_1(0)R_1C_1/(sR_1C_1 + 1)$, através de um equivalente Thévenin.

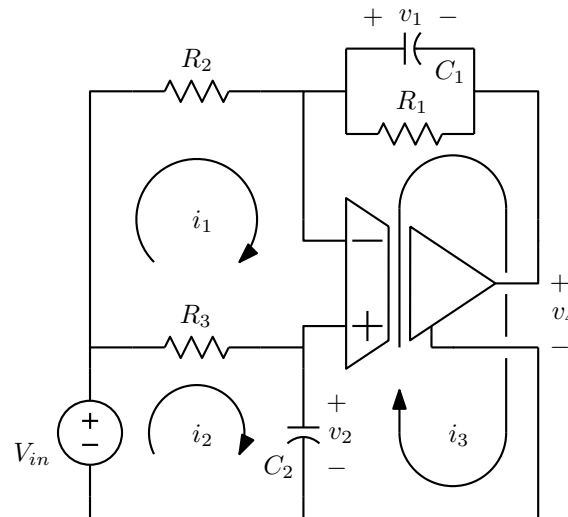


Figura 2.12: Análise de malhas com amplificador operacional.

Analisando o circuito por um método de malhas modificado, a tensão sobre a saída do amplificador é adicionada como incógnita, e é acrescentada a equação dizendo que a soma das correntes de malha passando pelo ramo de entrada é nula.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} R_2 + R_3 & -R_3 & 0 & 0 \\ -R_3 & R_3 + \frac{1}{sC_2} & -\frac{1}{sC_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{sC_2} & \frac{1}{sC_2} + Z(s) & +1 \\ \hline -1 & 0 & +1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \\ V_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_{in}(s) - \frac{v_2(0)}{s} \\ \frac{v_2(0)}{s} - V(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Usando a redução, primeiramente se escreve o sistema considerando os ramos de entrada e saída do amp. op. em curto-circuito, que é a parte de malhas do sistema anterior:

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_3 & -R_3 & 0 \\ -R_3 & R_3 + \frac{1}{sC_2} & -\frac{1}{sC_2} \\ 0 & -\frac{1}{sC_2} & \frac{1}{sC_2} + Z(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_{in}(s) - \frac{v_2(0)}{s} \\ \frac{v_2(0)}{s} - V(s) \end{bmatrix}$$

O sistema é reduzido com a eliminação da terceira equação, pois o ramo de saída está entre a malha 3 e a malha externa, e a soma das colunas 1 e 3:

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 - \frac{1}{sC_2} & R_3 + \frac{1}{sC_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1,3}(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_{in}(s) - \frac{v_2(0)}{s} \end{bmatrix}$$

Pode-se notar que estas reduções são o que ocorre quando se elimina a última equação do primeiro sistema, e se reserva a terceira equação para calcular $V_4(s)$ a partir das correntes, já que ela não é necessária para calculá-las.

2.1.4 Modelamento com amplificadores operacionais ideais na análise de malhas

É possível modelar ramos controlados a tensão usando modelos baseados em amplificadores operacionais, de forma similar, dual, à feita para a análise nodal⁴. Também neste caso se obtém um sistema que não tem mais equações que o número de malhas, e pode até ficar com menos equações se o circuito tiver transdutores com transcondutância não nula (caso dual do transresistor, que causa redução na análise nodal se for usado o modelo mais simples). Os dois ramos necessários são o que modela uma fonte de corrente, independente ou controlada, e o que modela um circuito aberto, calculando a tensão no ramo como uma corrente. As estruturas são mostradas na figura 2.13, e são os exatos duais das mostradas para a análise nodal. O primeiro circuito força $j_{ab} = I$, e o segundo calcula $i_y = v_{cd}$. Note-se que não há problema em curto-circuitar a saída de um amplificador operacional, se sua corrente de saída é usada para controle de alguma fonte dependente realimentando o amplificador.

Exemplo: Seja analisar o circuito da figura 2.14a, que tem uma fonte de corrente independente e um transcondutor, em transformada de Laplace. Começa-se desenhando o modelo da figura 2.14b, que gera o sistema, com os ramos de entrada e saída dos amplificadores em curto-circuito:

$$\begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{sC} & -\frac{1}{sC} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{sC} & R_2 + \frac{1}{sC} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & G_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \\ I_4(s) \\ I_5(s) \\ I_6(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{v(0)}{s} \\ \frac{v(0)}{s} \\ 0 \\ -I(s) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O transcondutor foi tratado da forma mais complicada. Poderia ser modelado com apenas um amplificador operacional, com uma adaptação do medidor de tensão da figura 2.13, com a saída do amplificador usada como saída do transcondutor e o transresistor com transresistência $1/G_m$. Aplicando-se as reduções causadas pelos amplificadores, que somam as equações 1, 2 e 3, eliminam a equação 6, e eliminam as colunas 3, 4 e 5, resulta o sistema abaixo, simples de verificar que está correto. O capacitor não aparece pois não afeta as correntes de malha.

⁴Outra forma excessivamente complicada de analisar circuitos, colocada aqui para completar as analogias de dualidade com a análise nodal. Ao menos esta forma gera sistemas compactos.

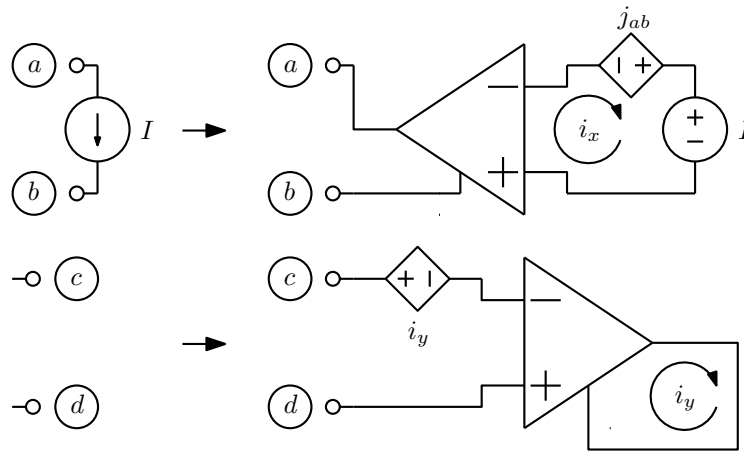


Figura 2.13: Modelos para análise de malhas de uma fonte de corrente e de um circuito aberto, usando amplificadores operacionais.

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & G_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_6(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -I(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.1.5 Planaridade

Como a análise das malhas parte de um circuito planar, ela não pode ser aplicada diretamente a circuitos não planares. E pode se tornar um problema complexo desenhar um circuito complexo em forma planar. Os grafos não planares mais simples são mostrados na figura 2.15. O Teorema de Kuratowski diz que se um grafo contiver um destes dois grafos como um subgrafo, mesmo com alguns ramos tendo nós no caminho, ele é não planar. A figura 2.16 mostra um grafo (que parece ser mínimo, mas não é) que recai neste caso. Circuitos com grafo não planar também não possuem circuito dual.

A análise de malhas realiza todas as análises estudadas com a análise nodal, com a única restrição de exigir grafo planar. Embora seja possível usar a análise de malhas para análise de circuitos genéricos em computador, o que como já foi visto recai em exatamente os mesmos algoritmos usados para a análise nodal, bastando alterar a forma como o circuito a analisar é passado ao algoritmo (com um “netlist” baseado nas malhas onde estão os elementos), seu uso prático fica usualmente restrito à análise de circuitos simples ou específicos, quando a estrutura torna o sistema das malhas mais simples que o sistema nodal.

2.2 Análises dos ciclos e dos cortes

A análise de malhas pode ser generalizada para circuitos com qualquer topologia, não necessariamente planares, da seguinte forma:

- Desenha-se sobre o grafo do circuito uma “árvore”, que é um conjunto de ramos que toca todos os nós e não forma circuitos fechados. Isto pode ser feito de muitas formas. Os ramos que fazem parte da árvore são então os “ramos da árvore”. É fácil ver que o número de ramos da árvore é o número de nós menos um.

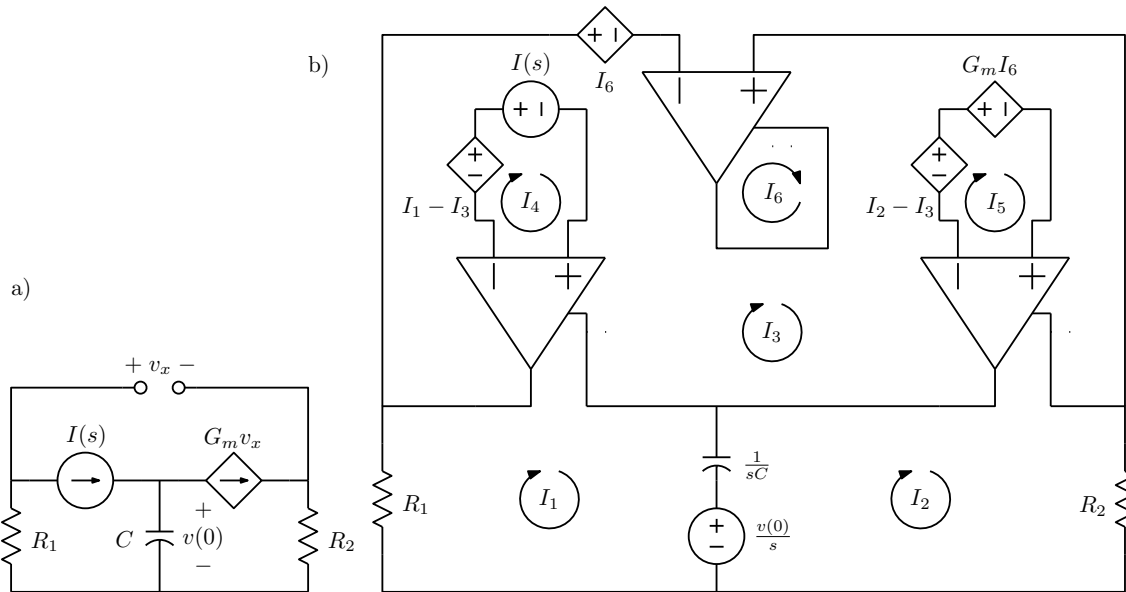


Figura 2.14: Circuito a analisar (a) e modelo usando amplificadores operacionais ideais (b).

- Os ramos não incluídos na árvore são os “elos da árvore”. Cada elo fecha um caminho único através de ramos da árvore, contendo como ramos o elo e vários ramos da árvore, que define um “ciclo fundamental”. É fácil ver que, para um grafo planar, o número de elos é igual ao número de malhas, embora os ciclos não sejam necessariamente malhas.
- Para cada ciclo fundamental, escreve-se uma equação similar a uma equação de malha, usando como incógnitas as “correntes de ciclo”, que são as correntes nos elos da árvore.

O sistema assim montado é o “sistema dos ciclos”, que é do mesmo tamanho do sistema de malhas, no caso planar, e calcula diretamente as correntes nos elos da árvore \vec{j}_l .

A partir da árvore pode-se também fazer uma outra análise que é uma versão mais geral da análise nodal:

- Desenha-se a árvore, como no sistema dos ciclos.
- Cada ramo da árvore, se cortado junto com um conjunto de elos, separa o grafo em duas partes. Este conjunto de ramos, associado com um único ramo da árvore, define um “corte fundamental”.
- Para cada corte fundamental, escreve-se uma equação \sum correntes cruzando o corte = 0, usando como incógnitas as “tensões de corte”, que são as tensões sobre os ramos da árvore.

O sistema assim montado é o “sistema dos cortes”, que é do mesmo tamanho do sistema nodal, e calcula diretamente as tensões sobre os ramos da árvore \vec{v}_c .

A geração sistemática destes sistemas parte da definição da árvore, que pode ser feita com base em ciclos ou com base em cortes. A descrição com base em ciclos define a matriz $[B]$, com dimensão número de ciclos \times número de ramos, da forma:

- $B_{ik} = 1$ se o ramo k está no ciclo i e suas direções concordam.
- $B_{ik} = -1$ se o ramo k está no ciclo i e suas direções discordam.
- $B_{ik} = 0$ se o ramo k não está no ciclo i .

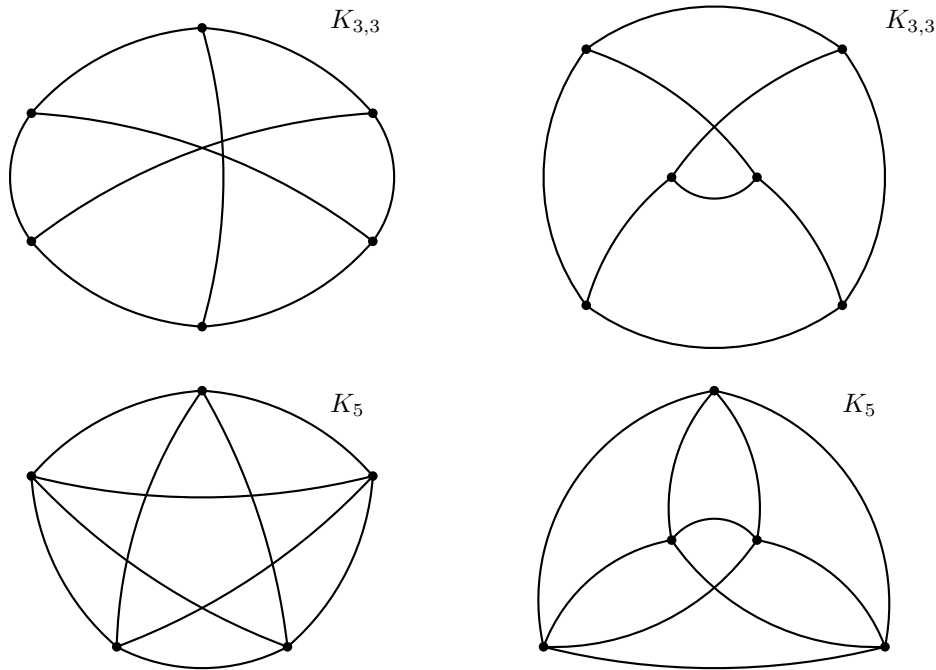


Figura 2.15: Grafos não planares mais simples, chamados $K_{3,3}$ e K_5 na teoria dos grafos.

As leis de Kirchhoff dizem então que:

$$\begin{aligned} \text{KVL: } [B]\vec{v} &= 0 \\ \text{KCL: } \vec{j} &= [B]^T \vec{j}_l \end{aligned}$$

Partindo das mesmas equações dos ramos definidas para a análise das malhas, o sistema dos ciclos é obtido por operações similares às usadas para o sistema das malhas:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= [R]\vec{j} + \vec{v}_s \\ [B]\vec{v} &= [B][R][B]^T \vec{j}_l + [B]\vec{v}_s \\ [B][R][B]^T \vec{j}_l &= -[B]\vec{v}_s \\ [R_l]\vec{j}_l &= \vec{v}_l \end{aligned}$$

A matriz $[R_l] = [B][R][B]^T$ é a “matriz de resistência dos ciclos”, e o vetor $\vec{v}_l = -[B]\vec{v}_s$ é o “vetor de fontes de tensão nos ciclos”.

Uma vez calculadas as correntes de ciclo \vec{j}_l , as correntes de ramo são calculadas por $\vec{j} = [B]^T \vec{j}_l$, e as tensões de ramo por $\vec{v} = [R]\vec{j} + \vec{v}_s$.

Para o sistema dos cortes, a formalização é similar. A árvore é descrita com base em cortes pela matriz $[Q]$, de dimensão número de cortes \times número de ramos:

- $Q_{ik} = 1$ se o ramo k está no corte i e suas direções concordam.
- $Q_{ik} = -1$ se o ramo k está no corte i e suas direções discordam.
- $Q_{ik} = 0$ se o ramo k não está no corte i .

As leis de Kirchhoff dizem então que:

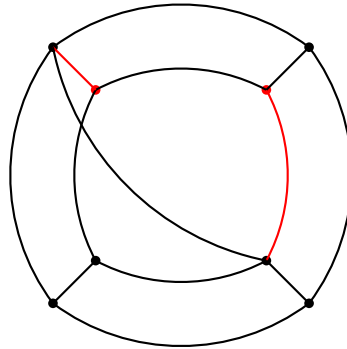


Figura 2.16: Grafo não planar correspondendo a um cubo com diagonal central. Os ramos e os nós em vermelho podem ser eliminados, restando um grafo $K_{3,3}$.

$$\begin{aligned} \text{KCL: } [Q]\vec{j} &= 0 \\ \text{KVL: } \vec{v} &= [Q]^T \vec{v}_c \end{aligned}$$

Partindo das mesmas equações dos ramos definidas para a análise nodal, o sistema dos cortes é obtido por operações similares às usadas para o sistema nodal:

$$\begin{aligned} \vec{j} &= [G]\vec{v} + \vec{i}_s \\ [Q]\vec{j} &= [Q][G][Q]^T \vec{v}_c + [Q]\vec{i}_s \\ [Q][G][Q]^T \vec{v}_c &= -[Q]\vec{i}_s \\ [G_c]\vec{v}_c &= \vec{i}_c \end{aligned}$$

A matriz $[G_c] = [Q][G][Q]^T$ é a “matriz de condutância dos cortes”, e o vetor $\vec{i}_c = -[Q]\vec{i}_s$ é o “vetor de fontes de corrente nos cortes”. Uma vez calculadas as tensões de corte \vec{v}_c , as correntes de ramo são calculadas por $\vec{v} = [Q]^T \vec{v}_c$, e as correntes de ramo por $\vec{j} = [G]\vec{v} + \vec{i}_s$.

É conveniente, para as análises de ciclos e cortes, numerar os ramos da árvore começando pelos elos da árvore. Assim a matriz $[B]$ fica na forma:

$$[B] = [[I_l]||[F]]$$

onde $[I_l]$ é uma matriz identidade de dimensão $n_l \times n_l$, sendo n_l o número de ciclos. Ocorre então que a matriz $[Q]$ fica na forma:

$$[Q] = [[E]||[I_c]]$$

onde $[I_c]$ é uma matriz identidade de dimensão $n_c \times n_c$, sendo n_c o número de cortes. É possível mostrar que há uma relação simples entre as matrizes $[B]$ e $[Q]$ observando como são geradas, com a numeração nesta forma:

$$[B] = [[I_l]||[F]] \Rightarrow [Q] = [-[F]^T||[I_c]]$$

Existem também as relações $[B][Q]^T = [0]$ e $[Q][B]^T = [0]$. Os sistemas de ciclos e cortes não são práticos de serem montados por estampas, pois um ramo pode aparecer em qualquer número de ciclos ou de cortes, e ter ciclos ou cortes passando por ele em quaisquer direções, tornando os tamanhos das estampas variáveis e os sinais dos termos a adicionar ao sistema também variáveis. É simples entretanto montar os sistemas sistematicamente usando as formalizações acima. O mais difícil é obter a árvore e uma das matrizes, $[B]$ ou $[Q]$, pois uma pode ser obtida da outra. É possível fazer isto a partir de um netlist nodal

com algoritmos de busca. O que tem que ser encontrado é, no caso dos ciclos, qual o caminho através da árvore entre as extremidades de cada elo. No caso dos cortes também, pois os cortes que cruzam um elo são gerados pelos ramos da árvore do caminho pela árvore entre suas extremidades.

Os sistemas podem ser montados manualmente, de forma similar aos de nós e malhas. Seja a análise dos cortes. Começa-se por transformar o circuito deixando apenas resistores, transcondutores controlados por somas ou subtrações de tensões de corte e fontes de corrente. Trata-se temporariamente os transcondutores como fontes independentes de corrente. O sistema fica então com a matriz $[G_c]$ simétrica, com:

$$G_{c\ kk} = \sum \text{condutâncias no corte } k.$$

$G_{c\ ki}, i \neq k = \sum \pm \text{condutâncias comuns aos cortes } k \text{ e } i$, positivas se as direções dos cortes concordam, negativas se discordam.

$i_{c\ k} = \sum \pm \text{fontes de corrente no corte } k$, positivas se as correntes discordam da direção do corte, negativas se concordam.

A seguir são retornadas à matriz $[G_c]$ termos controlados em \vec{i}_c .

Para o caso da análise dos ciclos, o procedimento é similar ao da análise das malhas. Começa-se por transformar o circuito deixando apenas resistores, transresistores controlados por somas e subtrações de correntes de ciclo e fontes de tensão. Trata-se temporariamente os transresistores como fontes independentes de tensão. Assim, o sistema fica com a matriz $[R_l]$ simétrica, com:

$$R_{l\ kk} = \sum \text{resistências no ciclo } k.$$

$$R_{l\ ki}, i \neq k = - \sum \text{resistências comuns aos ciclos } k \text{ e } i.$$

$$v_{l\ k} = \sum \pm \text{fontes de tensão no ciclo } k, \text{ positivas se a corrente } i_k \text{ sai pelo terminal positivo.}$$

A seguir retornam-se para a matriz $[R_l]$ os termos controlados no vetor \vec{v}_l .

Exemplo: Seja analisar o circuito da figura 2.17 por ciclos e por cortes e transformada de Laplace. O capacitor tem tensão inicial v_c e o indutor corrente inicial j_L .

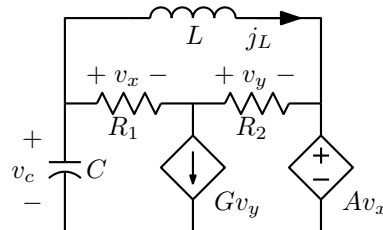


Figura 2.17: Circuito a ser analisado por ciclos e por cortes.

Para a análise de cortes, o transresistor deve ser deslocado, e as condições iniciais no capacitor e no indutor representadas por fontes de corrente. Realizando estas operações resulta o circuito da figura 2.18. A tensão de controle $V_y(s)$ passa a valer $V_y(s) = V_2(s) - AV_1(s)$. No circuito original, $V_1(s)$ é a tensão sobre R_1 e $V_2(s)$ a tensão sobre o transcondutor. O sistema dos cortes, montado pelo processo manual, primeiramente com as fontes controladas tratadas como independentes, representadas entre parêntesis, e depois na forma final é então:

$$\begin{bmatrix} sC + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} & sC + \frac{1}{sL} \\ sC + \frac{1}{sL} & sC + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cv_c - \frac{jL}{s} \\ Cv_c - \frac{jL}{s} \end{bmatrix} \left(-GV_2 + GAV_1 + \frac{A}{R_2}V_1 - \frac{A}{sL}V_1 \right)$$

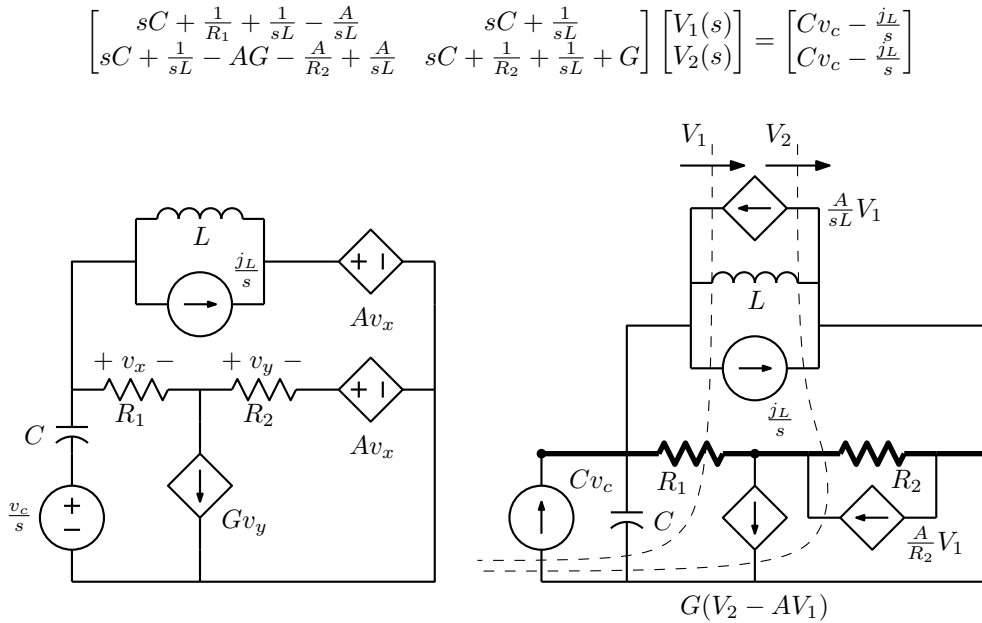


Figura 2.18: Transformações para análise por cortes. Deslocamentos e modelo final.

O sistema dos ciclos requer o deslocamento do transcondutor e as condições iniciais representadas como fontes de tensão, como na figura 2.19. Algumas transformações são requeridas nos controles das fontes: $V_y(s) = R_2 J_1(s)$, $V_x(s) = R_1 J_1(s) + G V_2(s) R_1 = (1 + G R_2) R_1 J_1(s)$. No circuito original, $J_1(s)$ é a corrente no transresistor e $J_2(s)$ a corrente no indutor. O sistema de equações, também primeiramente com as fontes controladas tratadas como independentes e depois na forma final, é:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{sC} + R_1 + R_2 & \frac{1}{sC} \\ \frac{1}{sC} & \frac{1}{sC} + sL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_c}{s} \\ \frac{v_c}{s} + LjL \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{GR_2}{sC} J_1 - A(1 + GR_2) R_1 J_1 - GR_1 R_2 J_1 \\ -\frac{GR_2}{sC} J_1 - A(1 + GR_2) R_1 J_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{sC} + R_1 + R_2 + \frac{GR_2}{sC} + A(1 + GR_2) R_1 + GR_1 R_2 & \frac{1}{sC} \\ \frac{1}{sC} + \frac{GR_2}{sC} + A(1 + GR_2) R_1 & \frac{1}{sC} + sL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_c}{s} \\ \frac{v_c}{s} + LjL \end{bmatrix}$$

Os sistemas de ciclos e cortes permitem todas as análises estudadas para os sistemas de nós e malhas, sem restrições de estrutura. Existem também sistemas modificados para as duas análises, similares aos sistemas modificados de malhas e nós, respectivamente.

Exemplo: Seja analisar em transformada de Laplace o circuito da figura 2.20 por ciclos e por cortes. Para obter análises modificadas, na análise de ciclos são acrescentadas como incógnitas as tensões na fonte de corrente e no capacitor, e na análise de cortes as correntes na fonte de tensão e no indutor. Usando a mesma árvore nas duas análises resultam os modelos da figura 2.21, também idênticos pois não é necessária nenhuma transformação. Apenas as variáveis calculadas pelos sistemas são diferentes. Para ciclos, o sistema é:

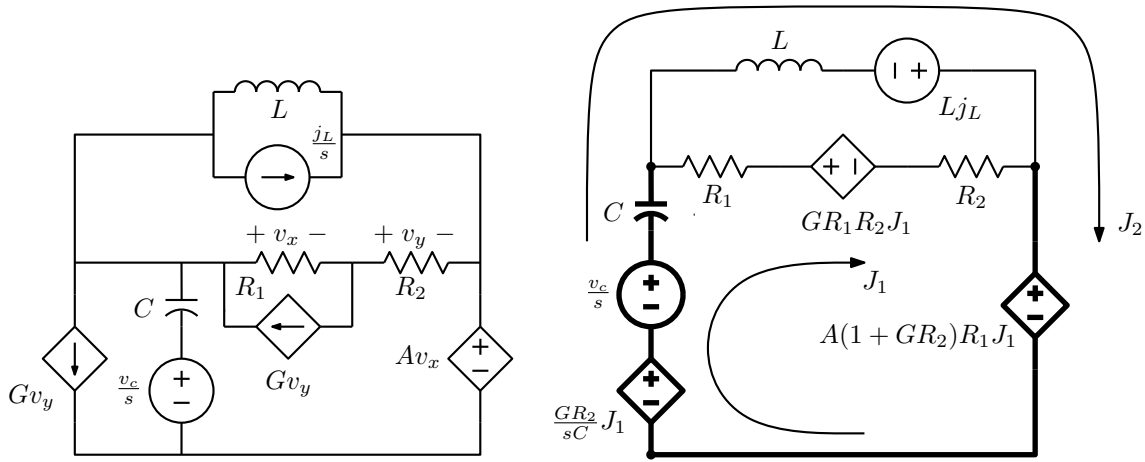


Figura 2.19: Transformações para análise por ciclos. Deslocamentos e modelo final.

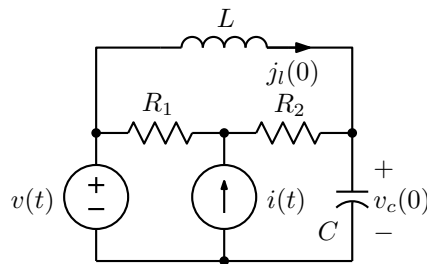


Figura 2.20: Circuito a analisar com análises modificadas de ciclos e cortes.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} R_1 + R_2 + sL & -R_1 & -R_1 - R_2 & 0 & 0 \\ -R_1 & R_1 & R_1 & -1 & 0 \\ -R_1 - R_2 & R_1 & R_1 + R_2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & sC \end{array} \right] \begin{bmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \\ J_3(s) \\ V_4(s) \\ V_5(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Lj_i(0) \\ V \\ V \\ -I \\ Cv_c(0) \end{bmatrix}$$

e para ciclos, resulta:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} sC & sC & sC & 1 & 0 \\ sC & sC + 1/R_1 & sC & 0 & -1 \\ sC & sC & sC + 1/R_2 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & sL \end{array} \right] \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \\ J_4(s) \\ J_5(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I - Cv_c(0) \\ -I - Cv_c(0) \\ -Cv_c(0) \\ -V \\ Lj_i(0) \end{bmatrix}$$

Para as polaridades das equações acrescentadas foi seguido o critério de manter positivos termos na

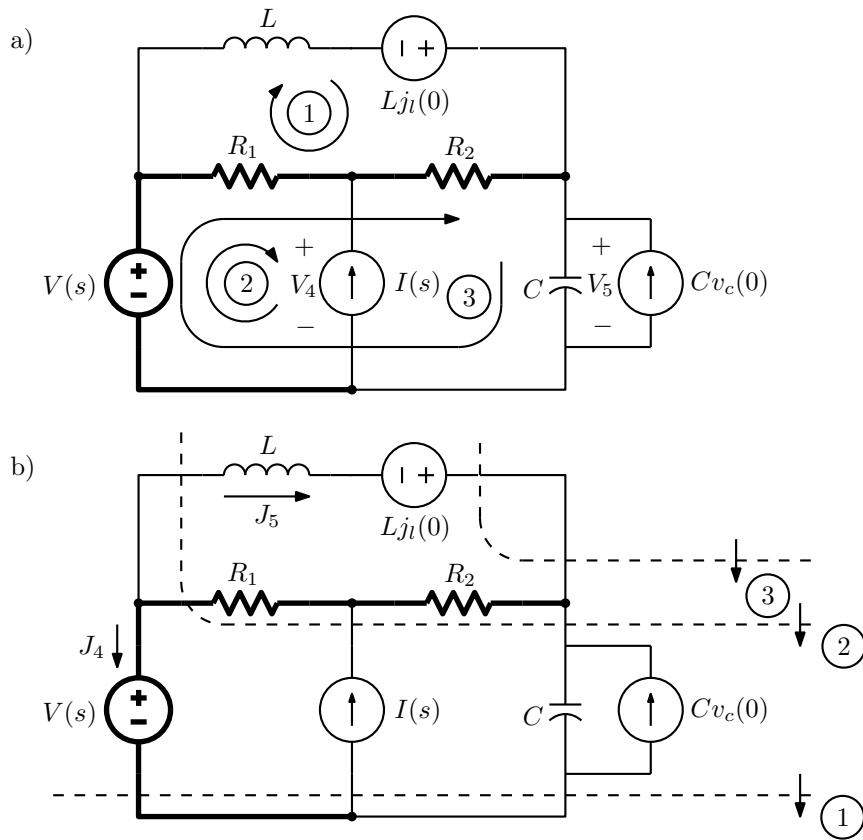


Figura 2.21: Modelos para análises modificadas de ciclos (a) e de cortes (b).

diagonal no quadrante inferior direito da matriz do sistema. Uma forma sistemática de construir os sistemas modificados de ciclos e cortes, já que montá-los por estampas não é prático, seria modelar os ramos com elementos diferentes dos aceitos diretamente pelos sistemas, com os mesmos modelos vistos para os sistemas de malhas e de nós, e então procurar a árvore e escrever os sistemas normais, não modificados. O resultado final é idêntico.

2.2.1 Amplificador operacional nas análises de ciclos e cortes

É também possível reduzir os sistemas modificados de ciclos e cortes quando os circuitos contêm amplificadores operacionais ideais, e usar modelos baseados em amplificadores operacionais para os elementos que os métodos não tratam diretamente, com reduções similares às obtidas para os sistemas de malhas e nós. Há uma importante diferença, entretanto. Nas análises nodal e de malhas os ramos de entrada e saída dos amplificadores estavam entre dois nós (um talvez o de terra) ou eram atravessados por duas correntes de malha (uma talvez a externa), e assim as reduções a fazer se reduziam a somar ou eliminar equações ou colunas da matriz do sistema. No caso de ciclos e cortes, os mesmos ramos são atravessados por várias correntes de ciclo ou cruzados por vários cortes, e as reduções podem exigir operações mais complexas. O tratamento fica simples, entretanto, se na análise dos ciclos os ramos de entrada e de saída forem elos da árvore, e se na análise dos cortes forem ramos da árvore. As reduções então se resumem a eliminar a equação da variável de saída e a coluna do sistema correspondente à variável de entrada.

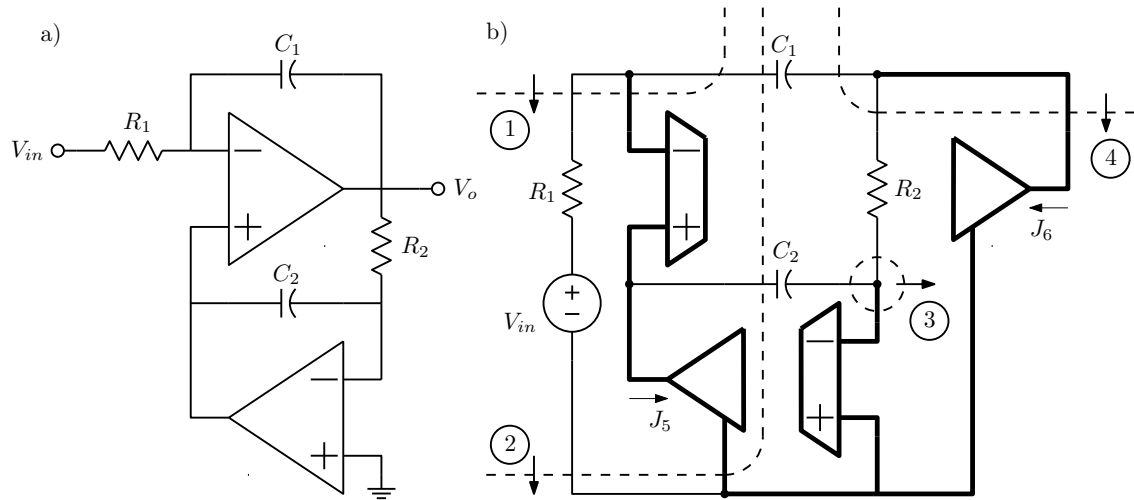


Figura 2.22: Circuito com amplificadores operacionais a analisar por cortes (a), e seu modelo com árvore e cortes indicados (b).

Exemplo: Seja resolver o circuito da figura 2.22a. O modelo para a análise por cortes é o da figura 2.22b, onde os amplificadores foram partidos em ramos de entrada e de saída, e a árvore foi escolhida de forma a passar por todos estes ramos. Um equivalente Norton pode ser usado para a fonte V_{in} . As equações dos cortes, sem o efeito dos amplificadores, são:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + sC_1 & \frac{1}{R_1} + sC_1 & 0 & -sC_1 \\ \frac{1}{R_1} + sC_1 & \frac{1}{R_1} + sC_1 + sC_2 & -sC_2 & -sC_1 \\ 0 & -sC_2 & \frac{1}{R_2} + sC_2 & -\frac{1}{R_2} \\ -sC_1 & -sC_1 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + sC_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \\ V_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_{in}(s)}{R_1} \\ \frac{V_{in}(s)}{R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As restrições impostas pelos dois amplificadores eliminam as colunas 1 e 3, pois $V_1(s)$ e $V_3(s)$ são nulas, e as equações 2 e 4, que são dos ramos de saída dos amplificadores. O sistema restante, obtido do anterior apenas por eliminação de termos, é:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + sC_1 & -sC_1 \\ -sC_2 & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2(s) \\ V_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{V_{in}(s)}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução então vale, para as duas tensões restantes, usando o método de Cramer:

$$\frac{V_2(s)}{V_{in}(s)} = \frac{-\frac{1}{R_1 R_2}}{-\frac{1}{R_1 R_2} - \frac{sC_1}{R_2} - s^2 C_1 C_2} = \frac{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + \frac{1}{R_2 C_2} s + \frac{1}{R_1 R_2 C_2 C_2}}$$

$$\frac{V_4(s)}{V_{in}(s)} = \frac{\frac{sC_2}{R_1}}{-\frac{1}{R_1 R_2} - \frac{sC_1}{R_2} - s^2 C_1 C_2} = \frac{-\frac{1}{R_1 C_1} s}{s^2 + \frac{1}{R_2 C_2} s + \frac{1}{R_1 R_2 C_2 C_2}}$$

A saída V_2 é a de um filtro passa-baixas de segunda ordem, e a saída V_4 a de um filtro passa-faixa de segunda ordem inversor. Desejando-se calcular as correntes a partir do método dos cortes, basta retomar as equações eliminadas 2 e 4 acrescentando as correntes de saída dos amplificadores nas somas das correntes cruzando os cortes. Cada equação dá diretamente uma das correntes em função das tensões

já calculadas e da entrada, já que cada equação só inclui uma das correntes se as saídas dos amplificadores estão nos ramos da árvore.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + sC_1 + sC_2\right) V_2(s) - sC_1 V_4(s) + J_5(s) &= \frac{V_{in}(s)}{R_1} \\ -sC_1 V_2(s) + \left(\frac{1}{R_2} + sC_1\right) V_4(s) + J_6(s) &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo:

$$\begin{aligned} \frac{J_5(s)}{V_{in}(s)} &= \frac{-\frac{1}{R_1 R_2 C_1} s}{s^2 + \frac{1}{R_2 C_2} s + \frac{1}{R_1 R_2 C_2 C_2}} \\ \frac{J_6(s)}{V_{in}(s)} &= \frac{\frac{1}{R_1} s^2 + \frac{C_1 + C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2} s}{s^2 + \frac{1}{R_2 C_2} s + \frac{1}{R_1 R_2 C_2 C_2}} \end{aligned}$$

A análise por ciclos usa a árvore passando pelos resistores e capacitores e pela fonte V_{in} , como na figura 2.23 e calcula diretamente as correntes de saída nos dois amplificadores.

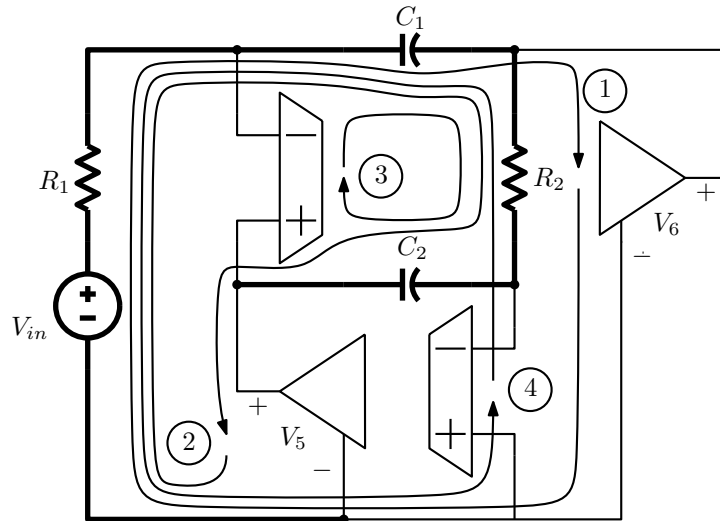


Figura 2.23: Modelo para análise por ciclos do circuito da figura 2.22.

Ignorando os amplificadores, com entradas e saídas tratadas como curto-circuitos, resulta o sistema dos ciclos:

$$\begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{sC_1} & R_1 + \frac{1}{sC_1} & \frac{1}{sC_1} & -R_1 - \frac{1}{sC_1} \\ R_1 + \frac{1}{sC_1} & R_1 + r_2 + \frac{1}{sC_1} + \frac{1}{sC_2} & R_2 + \frac{1}{sC_1} + \frac{1}{sC_2} & -R_1 - R_2 - \frac{1}{sC_1} \\ \frac{1}{sC_1} & R_2 + \frac{1}{sC_1} + \frac{1}{sC_2} & R_2 + \frac{1}{sC_1} + \frac{1}{sC_2} & -R_2 - \frac{1}{sC_1} \\ -R_1 - \frac{1}{sC_1} & -R_1 - R_2 - \frac{1}{sC_1} & -R_2 - \frac{1}{sC_1} & \frac{1}{R_2} + sC_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \\ J_3(s) \\ J_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{in}(s) \\ V_{in}(s) \\ 0 \\ -V_{in}(s) \end{bmatrix}$$

Os amplificadores eliminam as linhas 1 e 2 e as colunas 3 e 4. Restam apenas o canto inferior esquerdo do sistema⁵:

⁵Nem era necessário escrever os demais termos.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{sC_1} & R_2 + \frac{1}{sC_1} + \frac{1}{sC_2} \\ -R_1 - \frac{1}{sC_1} & -R_1 - R_2 - \frac{1}{sC_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1(s) \\ J_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -V_{in}(s) \end{bmatrix}$$

A solução é a mesma já encontrada por cortes, com $J_1(s) = J_6(s)$ e $J_2(s) = J_5(s)$. Para achar as duas tensões de saída dos amplificadores, usa-se as equações abandonadas 1 e 2, com as tensões reconsideradas:

$$\begin{aligned} \left(R_1 + \frac{1}{sC_1}\right) J_1(s) + \left(R_1 + \frac{1}{sC_1}\right) J_2(s) + V_6(s) &= V_{in}(s) \\ \left(R_1 + \frac{1}{sC_1}\right) J_1(s) + \left(R_1 + R_2 + \frac{1}{sC_1} + \frac{1}{sC_2}\right) J_2(s) + V_5(s) &= V_{in}(s) \end{aligned}$$

A solução é a mesma já encontrada por cortes, com $V_5(s) = V_2(s)$ e $V_6(s) = V_4(s)$. Estes métodos podem parecer complicados, mas a eliminação simples de equações e de colunas, com o restante do sistema nem precisando ser escrito se apenas as variáveis do sistema forem desejadas, é uma interessante vantagem em relação aos métodos dos nós e das malhas.

2.3 Equações de estado

O sistema de equações de estado [25] é um sistema de equações diferenciais em que em cada equação aparece apenas a primeira derivada de uma só variável, de forma que no caso geral, não linear variante no tempo, possa-se escrever um sistema na forma:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}(t), t, \vec{u}(t))$$

onde $\vec{x}(t)$ é o vetor de “variáveis de estado” e $\vec{u}(t)$ é um vetor de entradas. Esse sistema pode ser resolvido numericamente com relativa facilidade, o que é uma vantagem do método. Usando o método “forward” de Euler a solução é particularmente simples⁶:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t_0 + \Delta t) &= \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{F}(\vec{x}(t), t, \vec{u}(t)) dt \\ \vec{x}(t_0 + \Delta t) &\approx \vec{x}(t_0) + \Delta t \vec{F}(\vec{x}(t_0), t_0, \vec{u}(t_0))\end{aligned}$$

Também é possível usar outros métodos. Usando o método “backward” de Euler:

$$\vec{x}(t_0 + \Delta t) \approx \vec{x}(t_0) + \Delta t \vec{F}(\vec{x}(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t, \vec{u}(t_0 + \Delta t))$$

Este é um sistema de equações não lineares para achar $\vec{x}(t_0 + \Delta t)$, que pode ser resolvido pelo método de Newton-Raphson multidimensional. Usando o método dos trapézios:

$$\vec{x}(t_0 + \Delta t) \approx \vec{x}(t_0) + \frac{\Delta t}{2} (\vec{F}(\vec{x}(t_0), t_0, \vec{u}(t_0)) + \vec{F}(\vec{x}(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t, \vec{u}(t_0 + \Delta t)))$$

Também um sistema não linear, o que também resulta dos métodos implícitos de Adams-Moulton e de Gear, como o de Gear de segunda ordem⁷:

$$\vec{x}(t_0 + \Delta t) \approx \frac{4}{3}\vec{x}(t_0) - \frac{1}{3}\vec{x}(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{3}\Delta t \vec{F}(\vec{x}(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t, \vec{u}(t_0 + \Delta t))$$

No caso linear invariante no tempo o sistema toma a forma:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = [A]\vec{x}(t) + [B]\vec{u}(t)$$

E aí os métodos numéricos resultam em sistemas lineares. O método “forward” de Euler continua o mais simples:

$$\vec{x}(t_0 + \Delta t) \approx \vec{x}(t_0) + \Delta t ([A]\vec{x}(t_0) + [B]\vec{u}(t_0))$$

O método “backward” de Euler resulta em um sistema de equações lineares, mas se o intervalo Δt for fixo, a matriz do sistema é constante, e pode ser invertida apenas uma vez:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t_0 + \Delta t) &\approx \vec{x}(t_0) + \Delta t ([A]\vec{x}(t_0 + \Delta t) + [B]\vec{u}(t_0 + \Delta t)) \\ \vec{x}(t_0 + \Delta t) &\approx ([I] - \Delta t[A])^{-1} (\vec{x}(t_0) + \Delta t[B]\vec{u}(t_0 + \Delta t))\end{aligned}$$

⁶Igualmente com os métodos explícitos de Adams-Bashforth, usando \vec{F} em tempos anteriores.

⁷Uma possibilidade é transformar estes métodos implícitos em explícitos, calculando $\vec{F}(\vec{x}(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t, \vec{u}(t_0 + \Delta t))$ usando um método explícito, nos métodos “preditores-corretores”. Por exemplo, pode-se usar o método “forward” de Euler para calcular uma predição $\vec{x}_p(t_0 + \Delta t) = \vec{x}(t_0) + \Delta t \vec{F}(\vec{x}(t_0), t_0, \vec{u}(t_0))$, e então calcular uma versão corrigida pelo método dos trapézios, $\vec{x}(t_0 + \Delta t) = \vec{x}(t_0) + \frac{\Delta t}{2} (\vec{F}(\vec{x}(t_0), t_0, \vec{u}(t_0)) + \vec{F}(\vec{x}_p(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t, \vec{u}(t_0 + \Delta t)))$, no que é conhecido como “método de Heun” (Karl Heun, 1900). É possível melhorar o preditor usando os métodos de Adams-Bashforth de ordem maior, e usar com o corretores os os métodos de Adams-Moulton e de Gear.

Algo similar acontece com o método dos trapézios, e analogamente com os de Adams-Moulton de ordens maiores:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t_0 + \Delta t) &\approx \vec{x}(t_0) + \frac{\Delta t}{2} ([A]\vec{x}(t_0) + [B]\vec{u}(t_0) + [A]\vec{x}(t_0 + \Delta t) + [B]\vec{u}(t_0 + \Delta t)) \\ \vec{x}(t_0 + \Delta t) &\approx \left([I] - \frac{\Delta t}{2}[A] \right)^{-1} \left(\vec{x}(t_0) + \frac{\Delta t}{2} ([A]\vec{x}(t_0) + [B](\vec{u}(t_0) + \vec{u}(t_0 + \Delta t))) \right)\end{aligned}$$

E também com os métodos de Gear, como o de segunda ordem:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t_0 + \Delta t) &\approx \frac{4}{3}\vec{x}(t_0) - \frac{1}{3}\vec{x}(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{3}\Delta t([A]\vec{x}(t_0 + \Delta t) + [B]\vec{u}(t_0 + \Delta t)) \\ \vec{x}(t_0 + \Delta t) &\approx \left([I] - \frac{2}{3}\Delta t[A] \right)^{-1} \left(\frac{4}{3}\vec{x}(t_0) - \frac{1}{3}\vec{x}(t_0 - \Delta t) + \frac{2}{3}\Delta t[B]\vec{u}(t_0 + \Delta t) \right)\end{aligned}$$

Os dois últimos métodos acima, trapézios e Gear de segunda ordem, são especialmente úteis em simulações de sistemas lineares.

2.3.1 Como escrever equações de estado

Primeiramente de forma não muito formal: Dado um circuito, deve-se escolher como variáveis de estado as tensões sobre os capacitores \vec{v}_C e as correntes nos indutores \vec{j}_L , e escrever, para esses elementos:

$$\begin{aligned}\text{Capacitores: Corrente no capacitor} &= f_C(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t)) \\ \text{Indutores: Tensão sobre o indutor} &= f_L(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t))\end{aligned}$$

O vetor $\vec{v}_C(t)$ inclui tensões em capacitores v_k e o vetor $\vec{j}_L(t)$ inclui as correntes em indutores j_k . Em um sistema linear invariante no tempo, resultam equações lineares, facilmente rearranjadas na forma padrão:

$$\begin{aligned}\frac{dv_k}{dt} &= \frac{1}{C_k} f_{C_k}(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t)) \\ \frac{dj_k}{dt} &= \frac{1}{L_k} f_{L_k}(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t))\end{aligned}$$

Se o sistema for linear variante no tempo, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{dq_k}{dt} &= \frac{d}{dt}(C_k v_k) = C_k(t) \frac{dv_k}{dt} + v_k(t) \frac{dC_k}{dt} = f_{C_k}(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t)) \\ \frac{d\phi_k}{dt} &= \frac{d}{dt}(L_k j_k) = L_k(t) \frac{dj_k}{dt} + j_k(t) \frac{dL_k}{dt} = f_{L_k}(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t))\end{aligned}$$

Há então duas possibilidades. Pode-se usar como variáveis de estado as tensões nos capacitores e as correntes nos indutores, colocando os termos envolvendo as derivadas de $C_k(t)$ e $L_k(t)$ na matriz $[A]$:

$$\begin{aligned}\frac{dv_k}{dt} &= \frac{1}{C_k(t)} \left(f_{C_k}(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t)) - v_k(t) \frac{dC_k}{dt} \right) \\ \frac{dj_k}{dt} &= \frac{1}{L_k(t)} \left(f_{L_k}(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t)) - j_k(t) \frac{dL_k}{dt} \right)\end{aligned}$$

ou então usar como variáveis as cargas nos capacitores e os fluxos nos indutores, dividindo as tensões e correntes $v_k(t)$ e $j_k(t)$ no lado direito pelas funções $C_k(t)$ e $L_k(t)$ para obter cargas e fluxos. Essa forma é usualmente mais prática. Naturalmente, pode-se usar cargas e fluxos também no caso invariante no tempo.

$$\begin{aligned} \frac{dq_k}{dt} &= f_{C_k} \left(\frac{q_1(t)}{C_1(t)}, \frac{q_2(t)}{C_2(t)}, \dots, \frac{\phi_1(t)}{L_1(t)}, \frac{\phi_2(t)}{L_2(t)}, \dots \right) \\ \frac{d\phi_k}{dt} &= f_{L_k} \left(\frac{q_1(t)}{C_1(t)}, \frac{q_2(t)}{C_2(t)}, \dots, \frac{\phi_1(t)}{L_1(t)}, \frac{\phi_2(t)}{L_2(t)}, \dots \right) \end{aligned}$$

No caso não linear, tem-se:

$$\begin{aligned} q_k(t) &= f_{q_k}(v_k(t)) \\ \phi_k(t) &= f_{\phi_k}(j_k(t)) \\ \frac{dq_k}{dt} &= \frac{d}{dt} f_{q_k}(v_k(t)) = \frac{d}{dv_k} f_{q_k}(v_k(t)) \frac{dv_k}{dt} = f_{C_k}(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t)) \\ \frac{d\phi_k}{dt} &= \frac{d}{dt} f_{\phi_k}(j_k(t)) = \frac{d}{dj_k} f_{\phi_k}(j_k(t)) \frac{dj_k}{dt} = f_{L_k}(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t)) \end{aligned}$$

Há também duas possibilidades: Usando tensões e correntes, usando a regra da cadeia da derivação para separar as derivadas das funções não lineares:

$$\begin{aligned} \frac{dv_k}{dt} &= \frac{1}{\frac{d}{dv_k} f_{q_k}(v_k(t))} f_{C_k}(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t)) \\ \frac{dj_k}{dt} &= \frac{1}{\frac{d}{dj_k} f_{\phi_k}(j_k(t))} f_{L_k}(\vec{v}_C(t), \vec{j}_L(t)) \end{aligned}$$

Ou então, usando cargas e fluxos, é necessário inverter as funções:

$$\begin{aligned} v_k(t) &= f_{q_k}^{-1}(q_k(t)) \\ j_k(t) &= f_{\phi_k}^{-1}(\phi_k(t)) \\ \frac{dq_k}{dt} &= f_{C_k}(f_{q_1}^{-1}(q_1(t)), f_{q_2}^{-1}(q_2(t)), \dots, f_{\phi_1}^{-1}(\phi_1(t)), f_{\phi_2}^{-1}(\phi_2(t)), \dots) \\ \frac{d\phi_k}{dt} &= f_{L_k}(f_{q_1}^{-1}(q_1(t)), f_{q_2}^{-1}(q_2(t)), \dots, f_{\phi_1}^{-1}(\phi_1(t)), f_{\phi_2}^{-1}(\phi_2(t)), \dots) \end{aligned}$$

Notar que a formulação não admite capacitâncias ou indutâncias nulas. No caso não linear estas aparecem na forma incremental quando são usadas tensões e correntes, $\frac{d}{dv_k} f_{q_k}(v_k(t))$ e $\frac{d}{dj_k} f_{\phi_k}(j_k(t))$ também dividindo as equações. No caso com cargas e fluxos, as funções inversas de funções com derivada nula não são unívocas.

Exemplo:

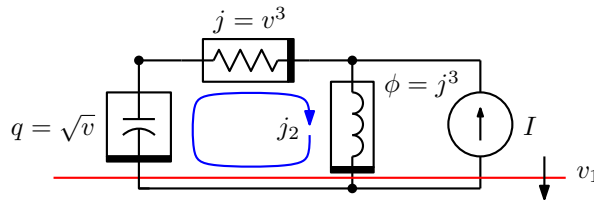


Figura 2.24: Circuito não linear para análise por equações de estado

Seja o circuito não linear da figura 2.24. Ele gera duas equações de estado, a partir da equação do corte passando pelo capacitor e do ciclo passando pelo indutor:

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} + j_2 - I &= 0 \\ \frac{d\phi}{dt} - v_1 + \sqrt[3]{j_2 - I} &= 0\end{aligned}$$

Usando apenas a carga q e o fluxo ϕ como variáveis de estado, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= -\sqrt[3]{\phi} + I \\ \frac{d\phi}{dt} &= q^2 - \sqrt[3]{\sqrt[3]{\phi} - I}\end{aligned}$$

E usando apenas a tensão v_1 e a corrente j_2 tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{dv_1}{dt} &= 2\sqrt{v_1}(-j_2 + I) \\ \frac{dj_2}{dt} &= \frac{1}{3j_2^2} \left(v_1 - \sqrt[3]{j_2 - I} \right)\end{aligned}$$

Em geral é simples separar as derivadas das variáveis de estado nas equações não lineares, mas a eliminação de variáveis auxiliares pode resultar em um sistema de equações não lineares requerendo solução numérica.

O caso não linear variante no tempo pode ser tratado da mesma forma, apenas utilizando-se as funções não lineares com seus valores nos instantes considerados. Note-se que o caso linear variante no tempo é apenas um caso particular do tratamento do caso não linear variante no tempo.

Exemplo: Um capacitor que siga a função:

$$q(t) = Ktv(t)^3$$

gera a equação de estado:

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= \sum \text{correntes} \\ K \left(t3v(t)^2 \frac{dv}{dt} + v(t)^3 \right) &= \sum \text{correntes} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{3Ktv(t)^2} \left(\sum \text{correntes} - Kv(t)^3 \right)\end{aligned}$$

Se a função fosse $q(t) = C(t)v(t)$, caso linear variante no tempo, a equação de estado seria gerada de forma similar como:

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= \sum \text{correntes} \\ C(t) \frac{dv}{dt} + v(t) \frac{dC}{dt} &= \sum \text{correntes} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{C(t)} \left(\sum \text{correntes} - \frac{dC}{dt} v(t) \right)\end{aligned}$$

2.3.1.1 Montagem sistemática do sistema de equações de estado

Para obter o sistema de forma sistemática uma ideia é:

Obtém-se uma “árvore normal” sobre o grafo do sistema. Esta árvore inclui os ramos em uma ordem de prioridade:

1. Todas as fontes de tensão, independentes ou controladas.
2. Todos os capacitores.
3. Resistores como necessário.
4. Nenhum indutor.
5. Nenhuma fonte de corrente, independente ou controlada.

Se for possível obter uma árvore assim, definidos os ciclos e cortes fundamentais, define-se como incógnitas as tensões sobre o ramo da árvore e as correntes nos elos da árvore. Algumas das tensões são tensões sobre capacitores e algumas correntes são correntes em indutores. As equações geradas por estes elementos, de cortes para capacitores e de ciclos para indutores, serão as equações de estado, na forma, para o caso linear invariante no tempo:

$$C_i \frac{dv_{C_i}}{dt} = f_i(\vec{v}_c, \vec{j}_l)$$

$$L_i \frac{dj_{L_i}}{dt} = f_i(\vec{v}_c, \vec{j}_l)$$

As demais equações de ciclos e cortes permitem eliminar as demais variáveis. Note-se que as equações geradas por fontes de tensão são de cortes, e então devem ser “equações modificadas”, simplesmente definindo diretamente as tensões naqueles ramos. Analogamente, as equações geradas por fontes de corrente são de ciclos, “modificadas” também, definindo diretamente as correntes naqueles ramos. Os casos variante no tempo e não linear podem ser tratados conforme a discussão anterior.

Exemplo:

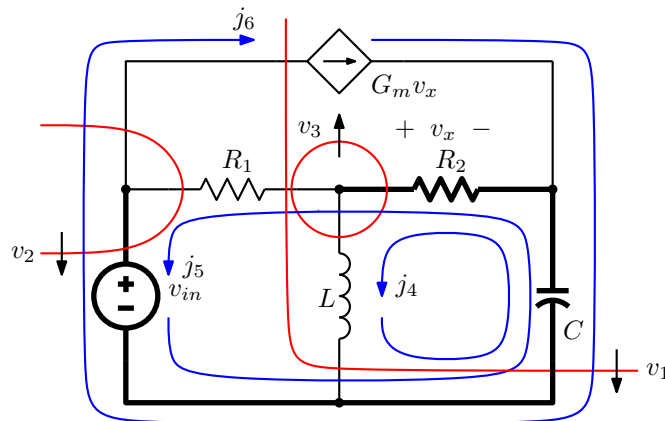


Figura 2.25: Circuito com equações de estado não triviais

Seja o circuito da figura 2.25. Com a árvore normal mostrada, existem 6 variáveis, sendo 3 tensões de corte e 3 correntes de ramo. As 6 equações são:

$$\begin{aligned}
1) & C \frac{dv_1}{dt} + j_4 + j_5 - j_6 = 0 \\
2) & v_2 = v_{in} \\
3) & \frac{v_3}{R_2} + j_4 + j_5 = 0 \\
4) & L \frac{dj_4}{dt} - v_1 - v_3 = 0 \\
5) & R_1 j_5 + v_2 - v_1 - v_3 = 0 \\
6) & j_6 = G_m v_3
\end{aligned}$$

Para obter as equações de estado, todas as variáveis exceto v_1 e j_4 devem ser eliminadas. v_3 e j_5 vem da solução de um sistema de duas equações:

$$\begin{aligned}
\frac{v_3}{R_2} + j_4 + j_5 &= 0 \\
R_1 j_5 + v_{in} - v_1 - v_3 &= 0
\end{aligned}$$

Calculando v_3 e j_5 :

$$\begin{aligned}
j_5 &= -\frac{v_3}{R_2} - j_4 \\
R_1 \left(-\frac{v_3}{R_2} - j_4 \right) + v_{in} - v_1 - v_3 &= 0 \\
v_3 &= \frac{-R_1 j_4 + v_{in} - v_1}{\frac{R_1}{R_2} + 1} & j_5 &= \frac{R_1 j_4 - v_{in} + v_1}{R_1 + R_2} - j_4 = \frac{-R_2 j_4 - v_{in} + v_1}{R_1 + R_2}
\end{aligned}$$

Montando as equações de estado:

$$\begin{aligned}
\frac{dv_1}{dt} &= \frac{-j_4 - j_5 + G_m v_3}{C} \\
\frac{dj_4}{dt} &= \frac{v_1 + v_3}{L} \\
\frac{dv_1}{dt} &= \frac{-j_4 - \frac{-R_2 j_4 - v_{in} + v_1}{R_1 + R_2} + G_m \frac{-R_1 j_4 + v_{in} - v_1}{\frac{R_1}{R_2} + 1}}{C} \\
\frac{dj_4}{dt} &= \frac{v_1 + \frac{-R_1 j_4 + v_{in} - v_1}{\frac{R_1}{R_2} + 1}}{L}
\end{aligned}$$

Colocando na forma padrão matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_1 \\ j_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} - \frac{G_m R_2}{(R_1 + R_2)C} & -\frac{1}{C} + \frac{R_2}{(R_1 + R_2)C} - \frac{G_m R_1 R_2}{(R_1 + R_2)C} \\ \frac{1}{L} - \frac{R_2}{(R_1 + R_2)L} & -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ j_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{(R_1 + R_2)C} + \frac{G_m R_2}{(R_1 + R_2)C} \\ \frac{R_2}{(R_1 + R_2)L} \end{bmatrix} v_{in}$$

Exemplo:

O procedimento para circuitos não lineares e/ou variantes no tempo é o mesmo. Seja o circuito da figura 2.26, que contém um indutor não linear e um capacitor variante no tempo. As equações dos três cortes e dos três ciclos são:

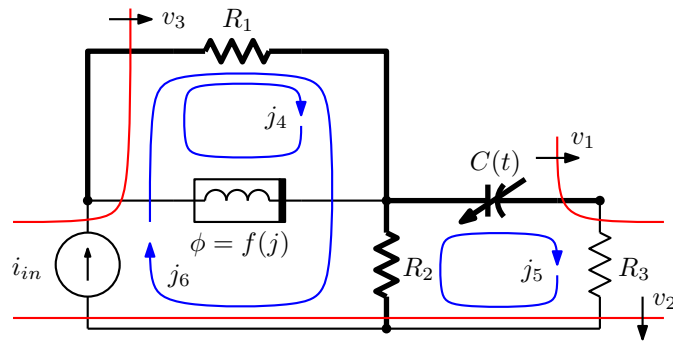


Figura 2.26: Circuito não linear variante no tempo, ciclos e cortes.

$$\begin{aligned}
 1) \quad & C \frac{dv_1}{dt} + v_1 \frac{dC}{dt} - j_5 = 0 \\
 2) \quad & \frac{v_2}{R_2} + j_5 - j_6 = 0 \\
 3) \quad & \frac{df}{dj}(j_4) \frac{dj_4}{dt} - v_3 = 0 \\
 4) \quad & \frac{v_3}{R_1} + j_4 - j_6 = 0 \\
 5) \quad & R_3 j_5 + v_1 - v_2 = 0 \\
 6) \quad & j_6 = i_{in}
 \end{aligned}$$

As equações 2 e 5 permitem calcular v_2 e j_5 (apenas j_5 é necessária), e a equação 3 dá v_3 .

$$\begin{aligned}
 v_2 &= R_2 i_{in} - R_2 j_5 \\
 R_3 j_5 + v_1 - R_2 i_{in} + R_2 j_5 &= 0 \\
 j_5 &= \frac{R_2 i_{in} - v_1}{R_2 + R_3} \\
 v_3 &= R_1 i_{in} - R_1 j_4
 \end{aligned}$$

O sistema de equações de estado vem da substituição destas variáveis nas equações 1 e 4:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_1 \\ j_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \left(\frac{R_2 i_{in} - v_1}{R_2 + R_3} - \frac{dC}{dt} v_1 \right) \\ \frac{1}{\frac{df}{dj}(j_4)} (R_1 i_{in} - R_1 j_4) \end{bmatrix}$$

No caso foi possível separar as variáveis e a entrada, o que não ocorre no caso geral. Mesmo o sistema de equações envolvendo as variáveis auxiliares v_2 , v_3 e j_5 poderia ter sido não linear, tendo apenas solução numérica.

Exemplo: Para ilustrar que pode ocorrer um impasse em casos não lineares, seja o circuito da figura 2.27. As equações dos ciclos e dos cortes geram as equações:

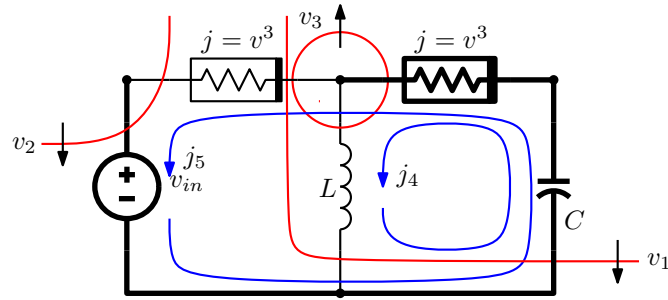


Figura 2.27: Circuito não linear em que escrever as equações de estado requer resolver um sistema não linear de equações.

- 1) $C \frac{dv_1}{dt} + j_4 + j_5 = 0$
- 2) $v_2 = v_{in}$
- 3) $v_3^3 + j_4 + j_5 = 0$
- 4) $L \frac{dj_4}{dt} - v_1 - v_3 = 0$
- 5) $-\sqrt[3]{j_5} + v_2 - v_1 - v_3 = 0$

Para ter as equações de estado, obtidas das equações 1 e 4, é necessário eliminar v_3 e j_5 , o que neste caso gera um sistema de equações não lineares:

$$\begin{aligned} v_3^3 + j_4 + j_5 &= 0 \\ -\sqrt[3]{j_5} + v_{in} - v_1 - v_3 &= 0 \end{aligned}$$

A solução deve ser numérica.

No caso geral, tem-se as variáveis de estado \vec{x} , as variáveis auxiliares \vec{y} e as entradas \vec{u} , nas equações:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}(t), \vec{y}(t), \vec{u}(t)); \quad \vec{G}(\vec{x}(t), \vec{y}(t), \vec{u}(t)) = 0$$

No método “forward” de Euler, e similarmente em outros métodos explícitos, basta resolver as equações auxiliares \vec{G} para $\vec{y}(t_0)$:

$$\vec{G}(\vec{x}(t_0), \vec{y}(t_0), \vec{u}(t_0)) = 0; \quad \vec{x}(t_0 + \Delta t) = \vec{x}(t_0) + \Delta t \vec{F}(\vec{x}(t_0), \vec{y}(t_0), \vec{u}(t_0))$$

No método “backward” de Euler, e similarmente em outros métodos implícitos, pode-se usar um preditor como o “forward” acima para $\vec{x}(t_0 + \Delta t)$ e resolver \vec{G} para $\vec{y}(t_0 + \Delta t)$, usando o sistema de equações de estado como corretor⁸:

$$\begin{aligned} \vec{G}(\vec{x}(t_0 + \Delta t), \vec{y}(t_0 + \Delta t), \vec{u}(t_0 + \Delta t)) &= 0 \\ \vec{x}(t_0 + \Delta t) &= \vec{x}(t_0) + \Delta t \vec{F}(\vec{x}(t_0 + \Delta t), \vec{y}(t_0 + \Delta t), \vec{u}(t_0 + \Delta t)) \end{aligned}$$

ou então, o que parece melhor, resolver simultaneamente um sistema não linear envolvendo as equações auxiliares e as da integração:

⁸Métodos preditores-corretores só são usualmente considerados a partir do método dos trapézios como corretor.

$$\begin{cases} \vec{G}(\vec{x}(t_0 + \Delta t), \vec{y}(t_0 + \Delta t), \vec{u}(t_0 + \Delta t)) = 0 \\ \vec{x}(t_0 + \Delta t) = \vec{x}(t_0) + \Delta t \vec{F}(\vec{x}(t_0 + \Delta t), \vec{y}(t_0 + \Delta t), \vec{u}(t_0 + \Delta t)) \end{cases}$$

2.3.1.2 Casos em que a árvore não é normal

É muito comum que não seja possível incluir todos os capacitores na árvore, ou que seja necessário incluir alguns indutores nela. Neste caso a árvore não é mais “normal”, mas o sistema usualmente ainda pode ser escrito. Equações de cortes contendo capacitores nos elos incluem termos com derivadas de somas ou subtrações de tensões de corte nos termos gerados por estes capacitores. Analogamente, equações de ciclos contendo indutores nos ramos da árvore incluem termos com derivadas de somas e subtrações de correntes de ciclo. O sistema, no caso linear invariante no tempo, toma a forma:

$$[K] \frac{d\vec{x}}{dt} = [A]\vec{x}(t) + [B]\vec{u}(t)$$

onde a matriz $[K]$, que normalmente seria uma identidade, não é mais. Se $[K]$ for inversível, basta multiplicar a equação pela inversa de $[K]$ para obter um sistema de equações de estado.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = [K]^{-1}[A]\vec{x}(t) + [K]^{-1}[B]\vec{u}(t)$$

Em sistemas modelados realisticamente $[K]$ é sempre inversível. Circuitos contendo ciclos de capacitores e fontes de tensão e circuitos contendo cortes com indutores e fontes de corrente sempre recaem neste caso. Circuitos contendo transformadores geram um problema similar, pois aparecem derivadas das correntes em todos os indutores acoplados nas equações. A solução é idêntica, mas neste caso todas as correntes nos indutores são variáveis de estado. Circuitos com transformadores com acoplamento cerrado geram $[K]$ não inversível, e então não é possível gerar diretamente o sistema. Pode-se resolver este caso modelando o transformador com um modelo usando indutores e transformadores ideais, que tem um indutor a menos que o total.

Quando os ciclos capacitivos ou os cortes indutivos incluem fontes de tensão ou de corrente, respectivamente, as derivadas dos valores dessas fontes aparecem como entradas, geradas por termos exprimindo correntes em capacitores nos elos da árvore ou termos exprimindo tensões em indutores nos ramos da árvore. Essas derivadas podem ser tratadas como outras entradas no sistema.

Equações auxiliares de cortes definidos por indutores ou de ciclos definidos por capacitores são modificadas, tipo, no caso linear invariante no tempo, $L \frac{dj_k}{dt} = v_i$ e $C \frac{dv_k}{dt} = j_i$, com j_k e v_k sendo somas (\pm) de correntes de ciclo e de tensões de corte. Estes elementos são portanto tratados como impedâncias e admitâncias, se as equações forem escritas diretamente em transformada de Laplace.

Exemplo:

Seja o circuito da figura 2.28, que tem um transformador e um ciclo contendo a fonte de tensão e dois capacitores. Uma árvore nele não é normal, devido ao ciclo. Usando como variáveis de estado a tensão v_1 e as correntes j_1 e j_2 , o sistema pode ser escrito diretamente, na forma, em transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} 1) \quad & s2V_1 = V_{in} - V_1 + s(V_{in} - V_1) - J_1 - J_2 \\ 2) \quad & s2J_1 + sJ_2 = V_1 \\ 3) \quad & sJ_1 + sJ_2 = V_1 - 2J_2 \end{aligned}$$

A primeira equação gera uma nova entrada, a derivada de V_{in} :

$$s3V_1 = -V_1 - J_1 - J_2 + V_{in} + sV_{in}$$

As duas outras geram um sistema de equações:

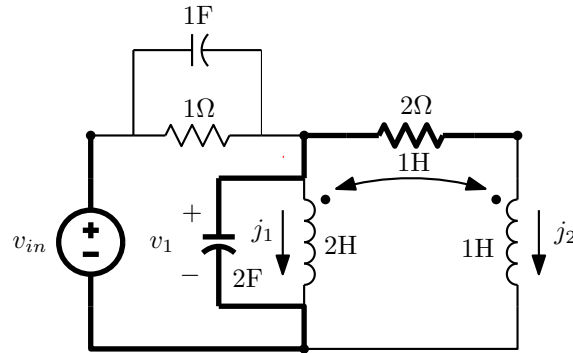


Figura 2.28: Circuito com ciclo de capacitores e fonte de tensão e transformador.

$$s \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_1 - 2J_2 \end{bmatrix}$$

Invertendo a matriz $[L]$ tem-se as equações:

$$s \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_1 - 2J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2J_2 \\ V_1 - 4J_2 \end{bmatrix}$$

Combinando as 3 equações tem-se o sistema desejado:

$$s \begin{bmatrix} V_1 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{in} \\ sV_{in} \end{bmatrix}$$

2.3.2 Solução do caso linear invariante no tempo

Uma importante propriedade das equações de estado é que o caso linear invariante no tempo admite uma solução exata relativamente simples. Sejam as equações:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = [A]\vec{x}(t) + [B]\vec{u}(t)$$

Aplicando transformadas de Laplace:

$$s\vec{X}(s) - \vec{x}(0) = [A]\vec{X}(s) + [B]\vec{U}(s)$$

$$\vec{X}(s) = (s[I] - [A])^{-1}\vec{x}(0) + (s[I] - [A])^{-1}[B]\vec{U}(s)$$

Voltando para o domínio do tempo:

$$\vec{x}(t) = e^{[A]t}\vec{x}(0) + \int_0^t e^{[A](t-\tau)}[B]\vec{u}(t-\tau)d\tau$$

onde a transformada inversa de Laplace de $(s[I] - [A])^{-1}$ é identificada com a função exponencial de matriz $e^{[A]t}$. A primeira parte é a resposta à entrada zero do sistema, e a segunda parte, uma convolução da resposta impulsional com as entradas, é a resposta ao estado zero. A função $e^{[A]t}$ pode ser obtida através da transformada de Laplace, através de autovalores e autovetores (o que é essencialmente o mesmo cálculo), ou através da série de Taylor de e^x , que também é válida nesse caso:

$$e^{[A]t} = [I] + [A]t + \frac{1}{2}[A]^2t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}[A]^nt^n$$

Numericamente, a resposta em um tempo qualquer pode ser obtida da expressão geral, ou, de forma mais simples, pode-se calcular a solução a intervalos Δt :

$$\vec{x}(t_0 + \Delta t) = e^{[A]\Delta t}\vec{x}(t_0) + \int_0^{\Delta t} e^{[A]\tau}[B]\vec{u}(t_0 + \Delta t - \tau)d\tau$$

A integral de convolução pode ser aproximada de várias formas, por exemplo assumindo as entradas como constantes dentro do intervalo:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t_0 + \Delta t) &= e^{[A]\Delta t}\vec{x}(t_0) + \int_0^{\Delta t} e^{[A]\tau}[B]\vec{u}(t_0)d\tau = \\ &= e^{[A]\Delta t}\vec{x}(t_0) + \left[[A]^{-1}e^{[A]t}[B]\vec{u}(t_0) \right]_0^{\Delta t} = \\ &= e^{[A]\Delta t}\vec{x}(t_0) + [A]^{-1} \left(e^{[A]\Delta t} - [I] \right) [B]\vec{u}(t_0) \end{aligned}$$

Pode-se também aproximar a entrada por trapézios, com $\vec{u}(t) = \vec{a}t + \vec{b}$ dentro de cada intervalo de tempo:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t_0 + \Delta t) &= e^{[A]\Delta t}\vec{x}(t_0) + \int_0^{\Delta t} e^{[A]\tau}[B] \left(\vec{a}(t_0 + \Delta t - \tau) + \vec{b} \right) d\tau = \\ &= e^{[A]\Delta t}\vec{x}(t_0) + \left[[A]^{-2} \left(e^{[A]\tau}[B]\vec{a} + [A]e^{[A]\tau}[B] \left(\vec{a}(t_0 + \Delta t - \tau) + \vec{b} \right) \right) \right]_0^{\Delta t} = \\ &= e^{[A]\Delta t}\vec{x}(t_0) + [A]^{-2} \left(e^{[A]\Delta t}[B]\vec{a} + [A]e^{[A]\Delta t}[B] \left(\vec{a}t_0 + \vec{b} \right) - [I][B]\vec{a} - [A][I][B] \left(\vec{a}(t_0 + \Delta t) + \vec{b} \right) \right) = \\ &= e^{[A]\Delta t}\vec{x}(t_0) + [A]^{-2} \left(e^{[A]\Delta t} - [I] \right) [B]\vec{a} + [A]^{-1} \left(e^{[A]\Delta t}[B] \left(\vec{a}t_0 + \vec{b} \right) - [B] \left(\vec{a}(t_0 + \Delta t) + \vec{b} \right) \right) \end{aligned}$$

Colocando a expressão apenas em termos de $\vec{u}(t_0)$ e $\vec{u}(t_0 + \Delta t)$ e procurando simplificar:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t_0 + \Delta t) &= e^{[A]\Delta t}\vec{x}(t_0) + [G]\vec{u}(t_0) + [H]\vec{u}(t_0 + \Delta t) \\ [G] &= \left([A]^2\Delta t^2 \right)^{-1} \left(e^{[A]\Delta t}(-[I] + [A]\Delta t) + [I] \right) [B]\Delta t \\ [H] &= \left([A]^2\Delta t^2 \right)^{-1} \left(e^{[A]\Delta t} - [I] + [A]\Delta t \right) [B]\Delta t \end{aligned}$$

Nos dois casos, há um conjunto fixo de matrizes a calcular, apenas uma vez se Δt for fixo.

É ainda possível aproximar a integral, sem tentar resolvê-la como acima. Usando a aproximação “backward” de Euler:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t_0 + \Delta t) &= e^{[A]\Delta t}\vec{x}(t_0) + \int_0^{\Delta t} e^{[A]\tau}[B]\vec{u}(t_0 + \Delta t - \tau)d\tau \approx \\ &\approx e^{[A]\Delta t}\vec{x}(t_0) + \Delta t e^{[A]\Delta t}[B]\vec{u}(t_0) \end{aligned}$$

Ou, usando o método dos trapézios:

$$\vec{x}(t_0 + \Delta t) \approx e^{[A]\Delta t}\vec{x}(t_0) + \frac{\Delta t}{2} \left(e^{[A]\Delta t}[B]\vec{u}(t_0) + [I][B]\vec{u}(t_0 + \Delta t) \right)$$

Exemplos:

Seja o sistema de equações de estado:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

onde:

$$\begin{bmatrix} \frac{x_1(0)}{dt} \\ \frac{x_2(0)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A solução explícita é, usando a integral na forma $\int_0^t e^{[A]\tau} [B] u(t - \tau) d\tau$:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t e^{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \tau} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau$$

Para calcular $e^{[A]t}$ começa-se por calcular os autovalores de $[A]$:

$$\det(s[I] - [A]) = \begin{vmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{vmatrix} = s^2 + 3s + 2 \therefore \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -2 \end{cases}$$

A seguir os autovetores correspondentes aos autovalores são calculados:

$$s_i \vec{u}_i = [A] \vec{u}_i$$

Para $s_1 = -1$:

$$-1 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \therefore \begin{cases} -a = -a \\ -b = a - 2b \end{cases} \therefore a = b \Rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para $s_2 = -2$:

$$-2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \therefore \begin{cases} -2a = -a \\ -2b = a - 2b \end{cases} \therefore a = 0 \Rightarrow u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calcula-se então a função da matriz na base dos autovetores, onde a matriz $[A]'$ tem os autovalores de $[A]$ na diagonal principal:

$$[A]' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \therefore [e^{[A]t}]' = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Então volta-se o resultado para a base original:

$$e^{[A]t} = [P][e^{[A]t}]'[P]^{-1}$$

onde $[P]$ é uma matriz montada com os autovetores encontrados:

$$[P] = [\vec{u}_1 \vec{u}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$e^{[A]t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

A solução então é:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ e^{-\tau} - e^{-2\tau} & e^{-2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ e^{-\tau} - e^{-2\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e^{-\tau} \\ -e^{-\tau} + \frac{1}{2}e^{-2\tau} \end{bmatrix}_0^t = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ -e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A solução pode ser obtida também por transformada de Laplace, onde as operações são essencialmente as mesmas:

$$\begin{aligned} (s[I] - [A]) &= \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} \therefore (s[I] - [A])^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \mathcal{L}(e^{[A]t}) \end{aligned}$$

Tendo a transformada da exponencial da matriz $[A]t$, basta montar a solução:

$$\begin{aligned} \vec{X}(s) &= (s[I] - [A])^{-1} \vec{x}(0) + (s[I] - [A])^{-1} [B]\vec{U}(s) \\ \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \frac{1}{s} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} + \frac{\frac{1}{s+1}}{s+2} + \frac{1}{s+2} \\ \frac{-1}{s+1} + \frac{\frac{1}{s}}{s+2} + \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

E então a mesma solução é encontrada, formalmente para $t > 0$:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} u(t)$$

2.3.3 Eliminação da integral de convolução

A inconveniente integral de convolução pode ser eliminada se as entradas forem substituídas por circuitos que as gerem, a partir de condições iniciais. Assim passa-se a não ter mais entradas no circuito, mas apenas o estado inicial evoluindo. Fontes em degrau podem ser geradas com capacitores carregados conectados ao circuito por fontes controladas a tensão. Fontes senoidais podem ser geradas com tanques LC conectados de forma similar. Ver a figura 2.29. Outros tipos comuns, como rampas e exponenciais, são também de fácil implementação. O valor da fonte pode ser alterado ao longo da análise com a mudança das variáveis de estado correspondentes, gerando fontes em séries de degraus, segmentos de senóides, etc., sempre com solução exata.

Exemplo: Seja simular um circuito similar a uma bobina de Tesla, mas usando a resposta ao estado zero do sistema como excitação. Pode ser mostrado que estes sistemas podem ser projetados [16] de forma a gerar acúmulos de energia no capacitor de saída, de forma similar ao que acontece na bobina de Tesla convencional, que usa a resposta à entrada zero do sistema. A estrutura é mostrada na figura 2.30⁹. Uma fonte senoidal em série com o capacitor C_1 provê a excitação. Ela é acionada repentinamente, e gera

⁹Esta estrutura é também conhecida como “double resonance solid-state Tesla coil”, DRSSTC, devido ao circuito de acionamento, usualmente feito com transistores de potência. O processo de síntese destes circuitos é descrito mais adiante.

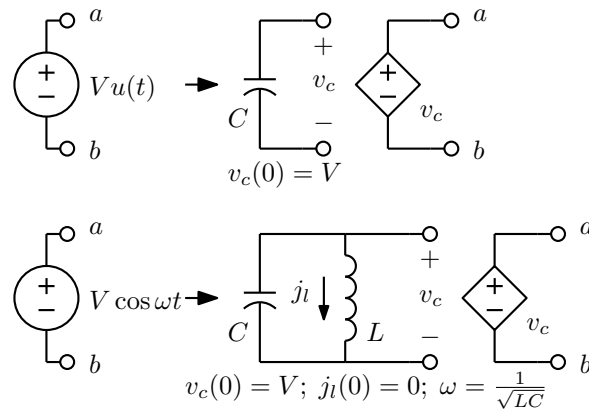


Figura 2.29: Substituição de fontes por variáveis de estado.

um transiente perpétuo envolvendo três frequências, ω_0 e as frequências naturais de oscilação da rede. A eliminação da fonte senoidal é feita com o tanque L_0C_0 , tal que $j_0(0) = A\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}$, para que quando toda a energia estiver em C_0 a tensão sobre o tanque seja de $\pm A$ V, e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}$. Pode-se arbitrar L_0 , e calcular $C_0 = \frac{1}{\omega^2L_0}$ e $j_0(0) = \frac{A}{\omega_0L_0}$. As outras condições iniciais são nulas.

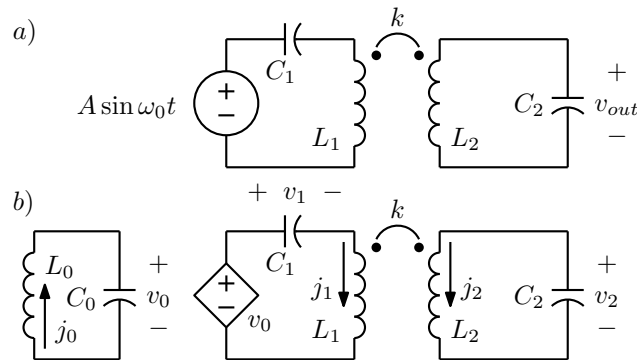


Figura 2.30: a) Circuito de múltipla ressonância de segunda ordem com excitação senoidal. b) Modelo para a geração de equações de estado.

Escrevendo as equações de estado:

$$\begin{aligned}
 C_0 \frac{dv_0}{dt} &= j_0 \\
 L_0 \frac{dj_0}{dt} &= -v_0 \\
 C_1 \frac{dv_1}{dt} &= j_1 \\
 C_2 \frac{dv_2}{dt} &= -j_2 \\
 L_1 \frac{dj_1}{dt} + M \frac{dj_2}{dt} &= Av_0 - v_1 \\
 M \frac{dj_1}{dt} + L_2 \frac{dj_2}{dt} &= v_2
 \end{aligned}$$

As equações envolvendo o transformador devem ser rearranjadas para isolar as derivadas das correntes, com a inversão da matriz de indutância:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Av_0 - v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}(Av_0 - v_1) - \Gamma_{12}v_2 \\ \Gamma_{21}(Av_0 - v_1) - \Gamma_{22}v_2 \end{bmatrix}$$

Colocando tudo na forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_0 \\ j_0 \\ v_1 \\ j_1 \\ v_2 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ \Gamma_{11}A & 0 & -\Gamma_{11} & 0 & \Gamma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} \\ \Gamma_{21}A & 0 & -\Gamma_{21} & 0 & \Gamma_{22} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ j_0 \\ v_1 \\ j_1 \\ v_2 \\ j_2 \end{bmatrix}$$

As equações estão na forma $\frac{d\vec{x}}{dt} = [A]\vec{x}$, e então a solução é simplesmente $\vec{x}(t_0 + \Delta t) = e^{[A]\Delta t}\vec{x}(t_0)$, exatamente. A exponencial de matriz pode ser obtida facilmente por série de Taylor, e é sempre a mesma se Δt for fixo. Como exemplo do comportamento deste circuito, seja uma forma normalizada em que as três frequências estejam na razão 1:3:5¹⁰. Três dos elementos podem ser arbitrados, no caso C_1 , C_2 e L_2 e os outros parâmetros calculados como em [16]. Os parâmetros do oscilador senoidal ficam como mostrado:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 1 \text{ F}; \quad L_1 = 4.2 \text{ H}; \quad C_2 = 0.01 \text{ F}; \quad L_2 = 100 \text{ H} \\
 \omega_0 &= 1.341641 \text{ rad/s} \quad k = 0.872871 \\
 L_0 &= 1 \text{ H}; \quad C_0 = 0.555556 \text{ F}; \quad j_0(0) = 0.745356 \text{ A}
 \end{aligned}$$

A matriz $e^{[A]\Delta t}$, para $\Delta t = 0.1$ s, obtida somando-se 16 termos da série de Taylor, $\sum_{n=0}^{15} \frac{[A]^n \Delta t^n}{n!}$, resulta como:

$$e^{[A]\Delta t} = \begin{bmatrix} 0.99101 & 0.17946 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.099700 & 0.99101 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0049750 & 0.00029910 & 0.99501 & 0.099833 & -0.00089055 & 0.0029736 \\ 0.099002 & 0.0089550 & -0.099301 & 0.99501 & -0.017733 & 0.089055 \\ 0.088921 & 0.0053478 & -0.089055 & -0.0029736 & 0.97908 & -9.9301 \\ -0.017680 & -0.0016005 & 0.017733 & 0.00089055 & 0.0041653 & 0.97908 \end{bmatrix}$$

¹⁰A frequência de excitação é a central. Esta é a forma com mais rápida acumulação de energia. A forma regular seguinte seria com razão 3:5:7.

A figura 2.31 mostra as formas de onda de tensão calculadas na entrada e sobre os dois capacitores¹¹. A 75% do ciclo da entrada toda a energia se acumula em C_2 , sendo depois retornada à fonte. A seguir o mesmo transiente se repete, invertido. Diferentemente da bobina de Tesla clássica, a relação entre a tensão de entrada e a máxima tensão de saída depende do número de ciclos usados para a transferência de energia, já que a energia é entregue ao circuito gradualmente pela fonte de excitação, em vez de ser constante no circuito o tempo todo. No caso, o ganho de tensão é de 11.18.

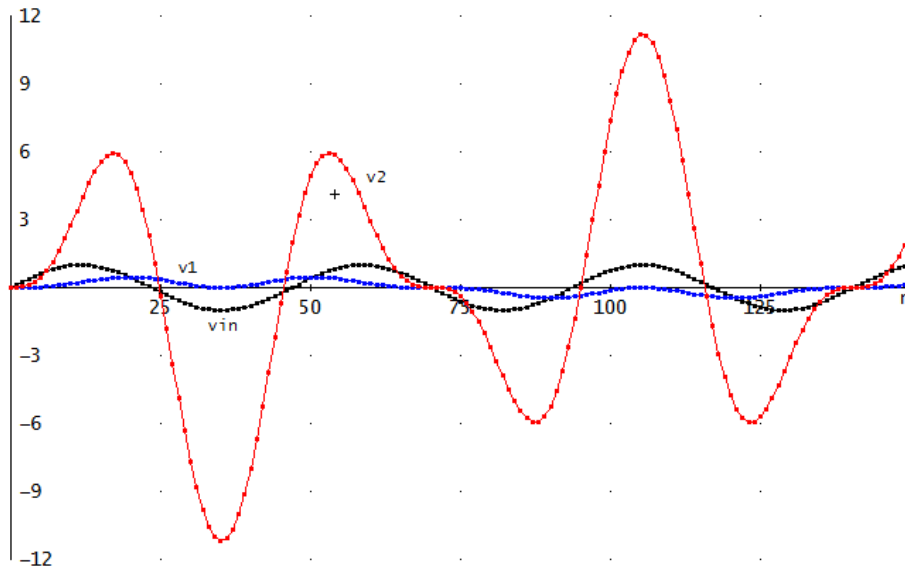


Figura 2.31: Tensões simuladas no circuito da figura 2.30 para entrada de amplitude unitária, para 150 intervalos de $\Delta t = 0.1$ s.

2.3.4 Uso de equações de estado em simulação de redes passivas com redes ativas

Uma importante aplicação do sistema de equações de estado é quando se deseja construir um circuito que realize a mesma função de uma rede passiva, usualmente um filtro¹², mas sem usar indutores e com uma estrutura suscetível de ser realizada em um circuito miniaturizado ou mesmo integrado. Uma simulação usando equações de estado preserva não só a função do protótipo mas também, usualmente, suas características de sensibilidade à variação dos valores dos componentes.

Exemplo: Seja o circuito protótipo da figura 2.32, um filtro passa-baixas de quarta ordem. As equações de estado para ele podem ser escritas como integrações:

¹¹Cálculo feito com um programa de cálculo algébrico, calculando $(e^{[A]\Delta t})^n \vec{x}(0)$, o que dá o estado nos tempos $n\Delta t$.

¹²A síntese de filtros passivos, usados como protótipos, é discutida na parte seguinte, mas este material está aqui por ser aplicação direta de equações de estado.

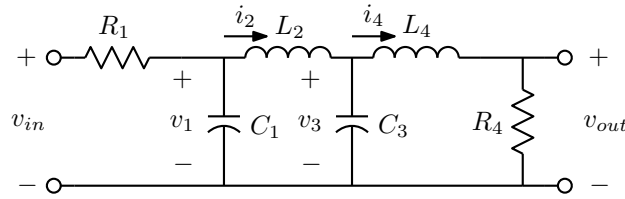


Figura 2.32: Filtro protótipo a simular.

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{1}{C_1} \int \left(\frac{v_{in}}{R_1} - \frac{v_1}{R_1} - i_2 \right) dt \\
 i_2 &= \frac{1}{L_2} \int (v_1 - v_3) dt \\
 v_3 &= \frac{1}{C_3} \int (i_2 - i_4) dt \\
 i_4 &= \frac{1}{L_4} \int (v_3 - R_4 i_4) dt
 \end{aligned}$$

Os sinais das integrações podem ser organizados de forma a minimizar o número de inversões necessárias. Começa-se com um integrador somador inversor para gerar $-v_1$, e daí por diante procura-se aproveitar os sinais das variáveis. O resultado é uma série de integrações com sinais alternados, simulando as variáveis de tensão e de corrente do protótipo em escada. Uma outra versão pode ser obtida começando-se com uma integração não inversora.

$$\begin{aligned}
 -v_1 &= -\frac{1}{C_1} \int \left(\frac{v_{in}}{R_1} - \frac{v_1}{R_1} - i_2 \right) dt \\
 -i_2 &= +\frac{1}{L_2} \int (-v_1 + v_3) dt \\
 +v_3 &= -\frac{1}{C_3} \int (-i_2 + i_4) dt \\
 +i_4 &= +\frac{1}{L_4} \int (v_3 - R_4 i_4) dt
 \end{aligned}$$

Estas equações são implementadas pelo circuito da figura 2.33, que é com conjunto de quatro integradores somadores com polaridades alternadas e conexões conforme as equações. Inversores são usados para gerar as integrações não inversoras¹³. A saída do filtro seria a variável $R_4 i_4$, que se for usado um protótipo normalizado, com $R_4 = 1\Omega$, é diretamente disponível onde indicado. Note-se que o circuito está normalizado, e deve ser obtido a partir de um protótipo também normalizado. Assim todos os valores dos componentes ficam próximos de 1. Desnormalizações em frequência e impedância sobre os resistores e capacitores geram o circuito real.

O circuito pode ser modificado de várias formas, mantendo a função do filtro. Pode-se mudar os níveis de sinal na saída dos integradores, para equalizar a faixa dinâmica dos sinais dentro do filtro, com o procedimento, seja para dividir a tensão de saída de um amplificador por M :

- Multiplicar as resistências de todos os resistores entrando no integrador por M .

¹³Este tipo de realização é conhecido na literatura como realização “leapfrog”, devido à forma como os ciclos de integradores se interconectam.

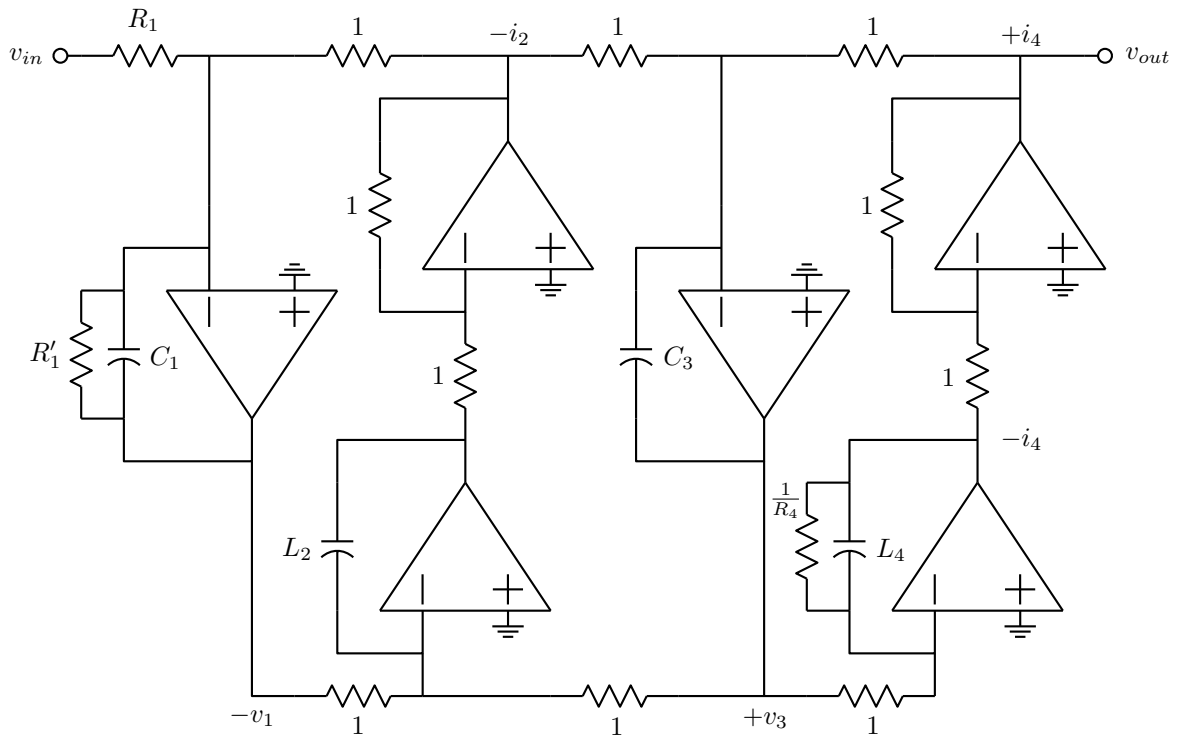


Figura 2.33: Simulação normalizada do protótipo baseada em equações de estado.

- Dividir as resistências de todos os resistores saindo do integrador por M .

Resistores realimentando os integradores não são afetados. Se os valores dos vários M forem escolhidos como os máximos níveis de sinal para uma entrada unitária (senoidal, usualmente) dentro da banda passante do filtro, esta operação aplicada a todos os integradores vai gerar máximos níveis de sinal iguais ao nível do sinal da entrada em todos os integradores.

Pode-se também igualar os valores dos capacitores, alterando os níveis de impedância de todos os integradores. Seja tornar todos os capacitores iguais a C_0 . Para cada integrador:

- Multiplicar as resistências de todos os resistores entrando no integrador por C/C_0 .
- Multiplicar a capacitância do capacitor realimentando o integrador por C_0/C , o que a torna C_0 .

Se existirem capacitores entrando ou saindo dos integradores, estes devem ser modificados na forma inversa, já que suas impedâncias são proporcionais aos inversos das capacitâncias. Capacitores assim aparecem em simulações de estruturas contendo ciclos de capacitores ou cortes de indutores.

Exemplo: Seja simular o filtro da figura 2.34, um filtro passa-baixas com zeros finitos de transmissão. Devido ao ciclo de capacitores, as equações de estado na forma integral ficam na forma abaixo, onde a corrente no capacitor C_2 vale $C_2 \frac{d}{dt}(v_1 - v_3)$, com C_2 sendo tratado como uma impedância, e não são feitas as operações para gerar um verdadeiro sistema de equações de estado.

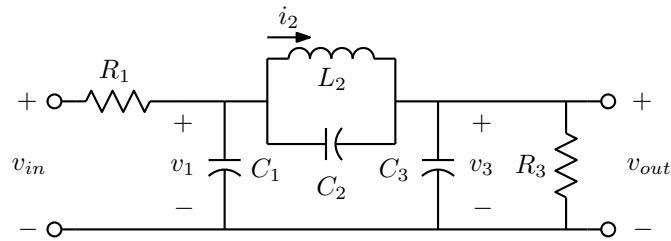


Figura 2.34: Filtro de ordem 3 com ciclo capacitivo.

$$v_1 = \frac{1}{C_1} \int \left(\frac{v_{in}}{R_1} - \frac{v_1}{R_1} - i_2 - C_2 \frac{d}{dt}(v_1 - v_3) \right) dt$$

$$i_2 = \frac{1}{L_2} \int (v_1 - v_3) dt$$

$$v_3 = \frac{1}{C_3} \int \left(i_2 - \frac{v_3}{R_3} + C_2 \frac{d}{dt}(v_1 - v_3) \right) dt$$

Reorganizando os sinais como no exemplo anterior vem:

$$-v_1 = -\frac{1}{C_1} \int \left(\frac{v_{in}}{R_1} - \frac{v_1}{R_1} - i_2 + C_2 \frac{d}{dt}(-v_1 + v_3) \right) dt$$

$$-i_2 = +\frac{1}{L_2} \int (-v_1 + v_3) dt$$

$$+v_3 = -\frac{1}{C_3} \int \left(-i_2 + \frac{v_3}{R_3} + C_2 \frac{d}{dt}(-v_1 + v_3) \right) dt$$

O circuito que realiza o filtro, normalizado, é mostrado na figura 2.35. O capacitor C_2 aparece quatro vezes, em paralelo com C_1 e C_3 , e realizando ligações cruzadas entre o primeiro e o terceiro integradores. Notar que sem C_2 o circuito realiza a simulação por equações de estado do filtro protótipo exatamente. Com C_2 , a equalização da faixa dinâmica requer mudanças nos capacitores cruzados também, tratados por suas impedâncias.

Exemplo: Como exemplo de desnormalização e ajuste da faixa dinâmica, seja projetar o filtro elíptico de terceira ordem com atenuação máxima na banda passante de 1 dB, atenuação mínima na banda passante de 40 dB, banda passante até 1 kHz, e resistores de 10 k Ω , com a estrutura da figura 2.35. O protótipo normalizado, com banda passante até 1 rad/s, na forma da figura 2.34, obtido com um programa de síntese de filtros (ou uma tabela), tem os valores na primeira coluna abaixo.

$R_1 : 1 \Omega$	\Rightarrow	10 k Ω
$R_3 : 1 \Omega$	\Rightarrow	10 k Ω
$C_1 : 1.909413 \text{ F}$	\Rightarrow	30.3896 nF
$C_2 : 0.145356 \text{ F}$	\Rightarrow	2.3134 nF
$L_2 : 0.904212 \text{ H}$	\Rightarrow	14.3910 nF
$C_3 : 1.909413 \text{ H}$	\Rightarrow	30.3896 nF

Para escalar em impedância, resistências são multiplicadas por 10000 e capacitâncias divididas, e para escalar em frequência capacitâncias são divididas por $2\pi \times 1000$, resultando nos valores da segunda coluna. Os resistores unitários ficam todos com 10 k Ω . Para dobrar a tensão de saída, a resistência $1'$ fica com 5 k Ω , $1''$ com 20 k Ω , C_2' fica com 2.3134×2 nF, e C_2'' com $2.3134 \div 2$ nF. Este escalamento

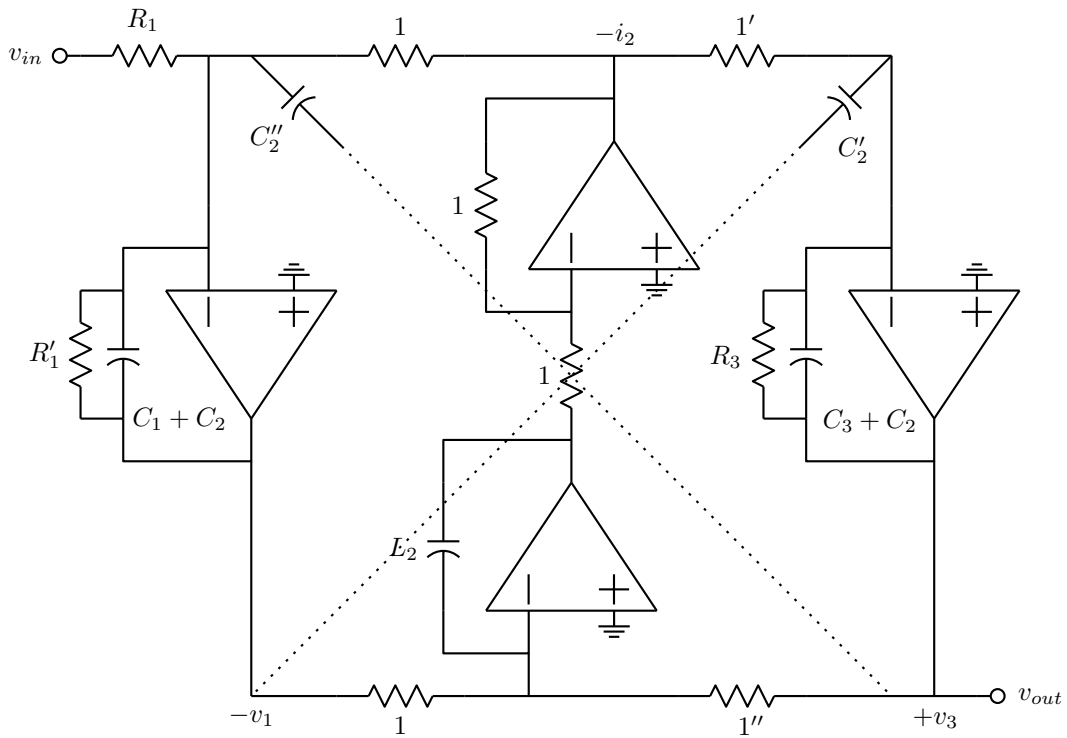


Figura 2.35: Circuito simulando o protótipo, com “capacitores cruzados”.

torna unitário o ganho máximo de tensão do filtro, e deixa uma margem de duas vezes nas demais saídas dos amplificadores, pois note-se que em baixa frequência os ganhos da entrada até todas as variáveis de estado do protótipo normalizado valem $0.5(-6.02 \text{ dB})$, tanto para as tensões quanto para a corrente (simulada por tensão) no indutor. O resultado nas respostas em frequência pode ser visto na figura 2.36. Uma pequena margem adicional seria desejável para i_2 .

Exemplo: Um procedimento similar pode ser feito para geração de filtros usando transcondutores feitos com amplificadores operacionais de transcondutância¹⁴ e capacitores, filtros “OTA-C”. Seja um filtro de quinta ordem com a estrutura da figura 2.37. As equações de estado para a estrutura, com a mesma modificação feita no tratamento dos capacitores suspensos do exemplo anterior, tomam a forma integral:

¹⁴Amplificadores similares a amplificadores operacionais, mas com corrente de saída controlada pela tensão de entrada, $i_o = G_m v_{in}$ e altas impedâncias de entrada e de saída.

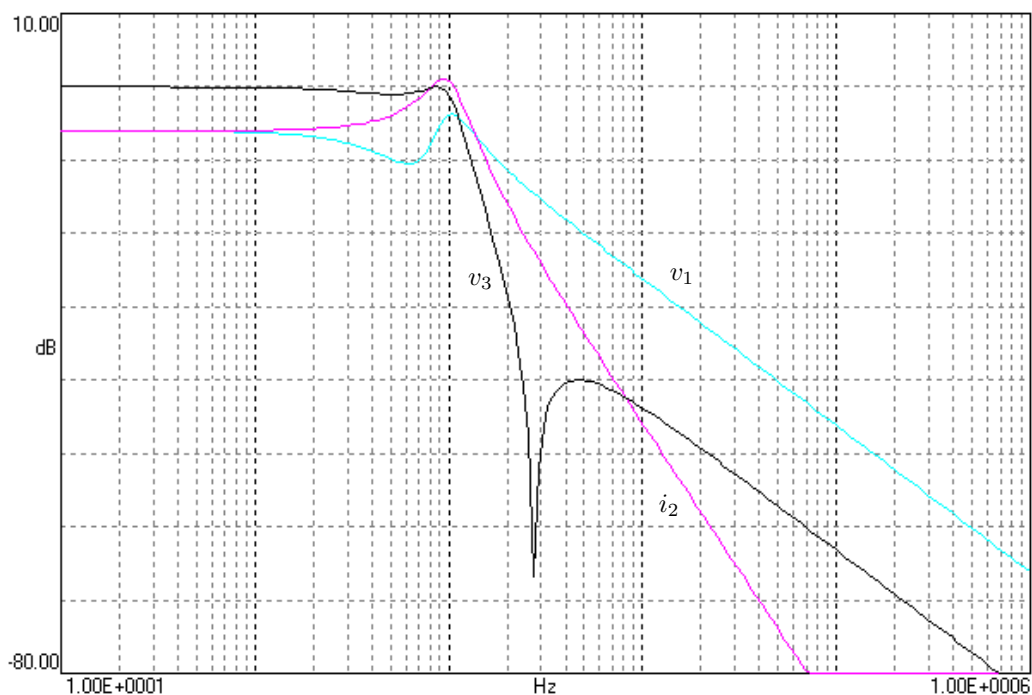


Figura 2.36: Módulos da resposta em frequência do filtro projetado, para as três variáveis de estado.

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{1}{C_1} \int \left(\frac{v_{in}}{R_1} - \frac{v_1}{R_1} - i_2 - C_2 \frac{d}{dt}(v_1 - v_3) \right) dt \\
 i_2 &= \frac{1}{L_2} \int (v_1 - v_3) dt \\
 v_3 &= \frac{1}{C_3} \int \left(i_2 - i_4 + C_2 \frac{d}{dt}(v_1 - v_3) - C_4 \frac{d}{dt}(v_3 - v_5) \right) dt \\
 i_4 &= \frac{1}{L_4} \int (v_3 - v_5) dt \\
 v_5 &= \frac{1}{C_5} \int \left(i_4 - \frac{v_5}{R_5} + C_4 \frac{d}{dt}(v_3 - v_5) \right) dt
 \end{aligned}$$

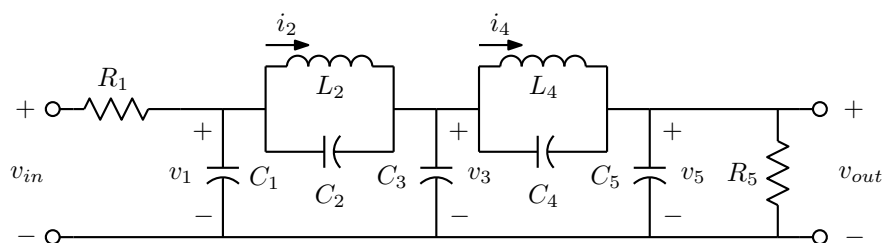


Figura 2.37: Filtro de ordem 5 com dois ciclos capacitivos.

As integrações podem ser realizadas com amplificadores operacionais de transcondutância com $G_m = 1$ S na versão normalizada aplicando corrente em capacitores aterrados. Neste caso pode-se reconhecer que as correntes pelos capacitores suspensos podem ser obtidas apenas copiando a estrutura de rede capacitiva do protótipo, resultando a estrutura normalizada da figura 2.38. Foi assumido que o protótipo normalizado tem $R_5 = 1 \Omega$ na simulação da corrente por R_5 . Uma desnormalização do circuito em frequência e impedância gera o filtro final, com valores realísticos para as transcondutâncias. As tensões dentro do circuito ativo simulam as tensões e correntes no protótipo normalizado, como no exemplo anterior. Com este tipo de estrutura é mais difícil realizar o escalamento de faixa dinâmica, embora seja possível [13].

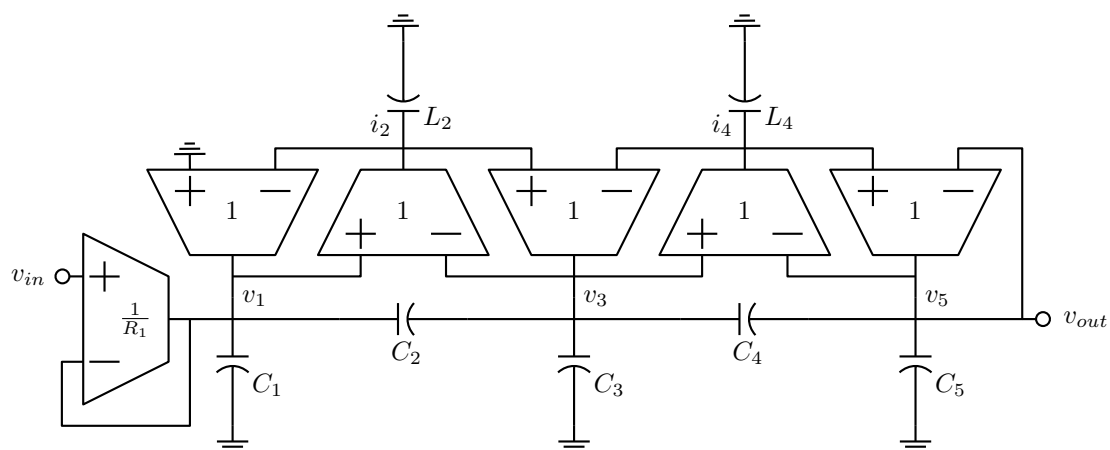


Figura 2.38: Filtro de ordem 5 com dois ciclos capacitivos simulado por uma estrutura com amplificadores operacionais de transcondutância e capacitores.



Parte II

Introdução à síntese de circuitos

Capítulo 3

Propriedades e teoremas básicos

As próximas seções discutem várias propriedades dos circuitos lineares invariantes no tempo. O objetivo final é chegar a processos de síntese para estes circuitos, em particular para filtros, mas alguns itens sobre análise ainda vão aparecer.

3.1 Propriedades dos circuitos lineares invariantes no tempo

As características dos sistemas lineares invariantes no tempo que são importantes para a síntese dos mesmos e para a análise de seu comportamento podem todas ser obtidas da caracterização usando transformadas de Laplace. Para o problema da análise, o tratamento já foi visto. A transformada de Laplace permite transformar um circuito geral em um circuito “resistivo”, que pode ser analisado com as mesmas técnicas usadas para estes circuitos, ou a transformada pode ser aplicada a sistemas de equações diferenciais como as equações de estado e a resposta é obtida pela volta ao domínio do tempo da solução encontrada pela transformada. Para o problema de síntese, o que se procura realizar, ou encontrar como construir, são funções de transferência, entre certas tensões e correntes no circuito.

3.1.1 Portas

É conveniente definir “portas” em um circuito, que são pares de terminais onde são medidas tensões em aberto ou correntes em curto. Uma porta pode ser aberta em um circuito geral por dois métodos:

- Entrada em série, ou “de alicate”, onde um ramo é cortado e as extremidades do corte usadas como porta.
- Entrada em paralelo, ou “de ferro de soldar”, onde dois nós do circuito são usados como porta.

A diferença essencial entre estes tipos de porta aparece quando se conecta fontes de entrada, de tensão ou de corrente, a estas portas, e quando se mede tensões em aberto ou correntes de curto nelas. Características importantes da rede, como as frequências naturais (ver a seguir), são preservadas quando se conecta uma fonte de tensão ou se mede uma corrente em uma porta aberta em série, e quando se conecta uma fonte de corrente ou se mede uma tensão em uma porta aberta em paralelo.

Existe também uma distinção entre as características das funções de transferência de “uma porta”, que se referem a relações entre tensão $V(s)$ e corrente $I(s)$ em uma mesma porta, e funções de transferência entre “duas portas” distintas. Para uma porta são definidas:

- Impedância: $Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$.
- Admitância: $Y(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{Z(s)}$.

Em um circuito RLCM, talvez com fontes controladas lineares, impedâncias e admitâncias são razões de polinômios de “s”. Seja $Z(s) = N(s)/D(s)$. $Z(s)$ é uma função de transferência que calcula a tensão na porta quando é aplicada uma corrente a ela. $Y(s)$ calcula a corrente na porta quando é aplicada uma tensão a ela. Para $Z(s)$ ser estável, as raízes de $D(s)$ tem que estar no semiplano lateral esquerdo, ou serem simples no eixo imaginário. Para $Y(s)$ ser estável, o mesmo vale para $N(s)$. Todos os circuitos RLCM com elementos positivos são estáveis, mas se existirem elementos negativos ou fontes controladas as funções de impedância e admitância podem ser instáveis, ambas ou apenas uma delas.

Para duas portas, nomeadas “1” e “2”, considerando entrada em 1 e saída em 2, existem impedâncias e admitâncias em ambas as portas, e também as funções de transferência:

- Ganho de tensão: $A(s) = \left. \frac{V_2(s)}{V_1(s)} \right|_{I_2(s)=0}$.
- Ganho de corrente: $B(s) = \left. \frac{I_2(s)}{I_1(s)} \right|_{V_2(s)=0}$.
- Transadmitância: $Y_m(s) = \left. \frac{I_2(s)}{V_1(s)} \right|_{V_2(s)=0}$.
- Transimpedância: $Z_m(s) = \left. \frac{V_2(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2(s)=0}$.

Existem também as mesmas funções para entrada na porta “2” e saída na porta “1”, naturalmente. Vai ser visto adiante que uma rede de 2 portas pode ser caracterizada por duas impedâncias e duas destas funções de transferência.

3.1.2 Resposta em frequência

Os procedimentos de síntese permitem obter estruturas que realizam estas funções, geralmente com finalidade de construir filtros. O procedimento para calcular funções de transferência já foi visto, na seção sobre análise no estado permanente senoidal. Aplicando-se um sinal senoidal a uma função de transferência, a saída em regime permanente é uma senoide da mesma frequência, mas com o módulo e o ângulo de fase modificado pela função. A operação é completamente descrita por um cálculo com fasores. Seja o caso de um ganho de tensão entre duas portas:

$$V_2(j\omega) = T(j\omega)V_1(j\omega) \Rightarrow A_2 + jB_2 = T(j\omega)(A_1 + jB_1)$$

onde $A_1 + jB_1$ é o fasor de entrada (correspondente ao sinal de entrada $A_1 \cos(\omega t) - B_1 \sin(\omega t)$), $T(j\omega)$ é a função de transferência $T(s)$ quando $s = j\omega$, e $A_2 + jB_2$ é o fasor correspondente ao sinal de saída. O módulo do fasor de entrada, $\sqrt{A_1^2 + B_1^2}$, fica multiplicado por $|T(j\omega)|$, e a fase fica somada de $\angle T(j\omega)$. O efeito pode ser então caracterizado por gráficos de módulo e fase da função de transferência.

3.2 Frequências naturais

A resposta a uma excitação de um sistema linear invariante no tempo pode sempre ser decomposta em duas partes. Uma parte é forçada pela entrada, e é chamada de “resposta ao estado zero”. A outra depende apenas do estado inicial do sistema, e é chamada de “resposta à entrada zero”. A análise em transformada de Laplace calcula ambas simultaneamente, uma em função das entradas, somada à outra em função das condições iniciais. Observando como a análise em transformada de Laplace é feita, nota-se que qualquer variável calculada por um sistema de equações como os estudados (nós, malhas, etc.) tem uma transformada de Laplace que, pelo método de Cramer, é a razão de dois determinantes, $X_0(s) = N(s)/D(s)$. O numerador contém as transformadas de Laplace das entradas multiplicando numeradores de funções de transferência, e o denominador é sempre o mesmo para todas as variáveis. Em circuitos RLCM (compostos por resistores, indutores, capacitores e transformadores) $D(s)$ é um polinômio

de s , possivelmente com potências negativas de s também. Os termos do numerador multiplicando as entradas também são assim. A inversão da transformada, de volta ao domínio do tempo, requer a multiplicação de $N(s)$ e $D(s)$ por uma potência adequada de s para tornar o denominador em um polinômio com potências positivas (e talvez uma nula) de s . A seguir é feita uma expansão em frações parciais, e os termos resultantes são identificados com as correspondentes funções no tempo, somadas.

No caso da resposta à entrada zero ocorre o mesmo, com as condições iniciais atuando como entradas. A expansão em frações parciais normalmente é do tipo:

$$X_0(s) = \sum_i \frac{k_i}{s + s_i} \Rightarrow x_0(t) = \sum_i k_i e^{s_i t}$$

Os termos s_i são as “frequências naturais” do sistema, e podem ser dos tipos:

- $s_i = 0$, em zero. $x_{0i}(t) = k_i$
- $s_i = a_i$, real. $x_{0i}(t) = k_i e^{a_i t}$
- $s_i = a_i + j b_i$, complexo, sempre em pares conjugados para funções reais.

No caso de um par complexo conjugado, os resíduos também são complexos conjugados $k_{ri} \pm j k_{ii}$, e os dois termos se combinam gerando senoides multiplicando exponenciais:

$$\begin{aligned} x_{0i}(t) &= (k_{ri} + j k_{ii}) e^{(a_i + j b_i)t} + (k_{ri} - j k_{ii}) e^{(a_i - j b_i)t} \\ &= e^{a_i t} ((k_{ri} + j k_{ii})(\cos(b_i t) + j \sin(b_i t)) + (k_{ri} - j k_{ii})(\cos(b_i t) - j \sin(b_i t))) \\ &= e^{a_i t} (2k_{ri} \cos(b_i t) - 2k_{ii} \sin(b_i t)) \end{aligned}$$

No caso de raízes múltiplas do denominador, na expansão em frações parciais aparecem termos com todas as potências de $s - s_i$ no denominador, e no tempo aparecem os mesmos termos multiplicando potências do tempo. Por exemplo:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+3)^3} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+3} + \frac{k_3}{(s+3)^2} + \frac{k_4}{(s+3)^3} \\ x(t) &= k_1 e^{-t} + k_2 e^{-3t} + k_3 t e^{-3t} + k_4 \frac{t^2}{2} e^{-3t} \end{aligned}$$

onde $k_1 = 1/8$, $k_2 = -1/8$, $k_3 = -1/4$ e $k_4 = -1/2$. Note que a transformada inversa de Laplace de $\frac{1}{(s-a)^n}$ vale $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$. Frequências naturais complexas múltiplas podem ocorrer também. Estes casos raramente acontecem. Somente aparecem no caso ideal de circuitos especialmente projetados para isto.

As frequências naturais determinam a estabilidade de um sistema, ou de um circuito. Sistemas estáveis tem todas as f. n. no semiplano lateral esquerdo, ou simples no eixo imaginário, nunca gerando transientes crescentes. Circuitos LCM tem todas as f. n. no eixo imaginário ou em zero. Circuitos RC e RL tem todas no semieixo real negativo ou em zero, já que não podem gerar respostas oscilatórias. Circuitos RLCM são sempre passivos, e portanto estáveis. Instabilidade exige a presença de fontes controladas ou de elementos RLC negativos. Para um circuito RLCM ter $2k$ f. n. complexas, ele deve ter ao menos k capacitores e k indutores. Frequências naturais em zero aparecem quando existem ciclos de indutores e fontes de tensão ou cortes de capacitores e fontes de corrente, que são estruturas que geram tensões e correntes constantes na resposta à entrada zero. Circuitos passivos podem ter várias f. n. em zero ou no eixo imaginário, mas os resíduos dos termos multiplicando potências do tempo em qualquer resposta à entrada zero são sempre nulos, pois não há como serem geradas respostas crescentes. Estas f. n. nulas invariavelmente ocorrem para variáveis diferentes (ver abaixo).

3.2.1 Cálculo de frequências naturais

Como é o denominador das transformadas de Laplace que determina as f. n., basta observar como gerá-lo. Em uma análise nodal, o denominador é o determinante da matriz $[Y_n(s)]$, que é um polinômio de s e $1/s$. As f. n. são as raízes deste polinômio depois de uma multiplicação por uma potência adequada de s para eliminar os termos em potências de $1/s$. Como estas potências são geradas pelos indutores, esta potência é o número de indutores no circuito. Para análise de malhas vale a regra dual, e para cortes e ciclos as mesmas regras. Em análises modificadas, como a análise nodal modificada com as correntes nos indutores calculadas, o determinante não precisa de correção. No sistema de equações de estado, as f. n. são os autovalores da matriz $[A]$. Em qualquer caso, o polinômio gerado tem grau igual à ordem de complexidade do circuito.

- Análise nodal: f. n. = raízes de $|Y_n(s)|s^{\text{número de indutores}}$.
- Análise das malhas: f. n. = raízes de $|Z_m(s)|s^{\text{número de capacitores}}$.
- Análise ndos cortes: f. n. = raízes de $|Y_c(s)|s^{\text{número de indutores}}$.
- Análise das ciclos: f. n. = raízes de $|Z_l(s)|s^{\text{número de capacitores}}$.
- Análise nodal ou dos cortes modificada com \vec{j}_L calculadas: f. n. = raízes de $|Y_n(s)|$ ou $|Y_c(s)|$.
- Análise das malhas ou dos ciclos modificada com \vec{v}_C calculadas: f. n. = raízes de $|Z_m(s)|$ ou $|Z_l(s)|$.
- Equações de estado: f. n. = raízes de $|s[I] - [A]|$, autovalores de $[A]$.

O cálculo obtém todas as frequências naturais do circuito, sem considerar onde aparecem nas variáveis do circuito.

3.2.2 Frequências naturais de uma variável

Quando se considera uma variável apenas, pode ocorrer que para ela não apareçam todas as f. n. do circuito. Isto é comum em vários casos:

- Circuitos desconexos: Circuitos compostos por blocos isolados, ou interligados por um único ramo, geram frequências naturais privadas destes blocos.
- Circuitos em blocos isolados em cascata: Os blocos que recebem sinais de outros recebem também as f. n. deles, mas com acoplamentos unidirecionais não transferem as suas f. n. privadas a eles. (É estranho neste caso que elementos possuam frequências naturais em suas variáveis sem tomar parte da geração delas, mas pela definição adotada de frequência natural, é isto o que ocorre.)
- Circuitos com simetria: Variáveis sobre o eixo de simetria não tem algumas das f. n. do circuito.
- Circuitos contendo “pontes” podem tornar elementos invisíveis a outras partes do circuito, e assim eles não fazem parte da geração das frequências naturais naquelas partes.
- Frequências naturais em zero: Usualmente apenas aparecem em correntes de ramos que fazem parte de ciclos de indutores e fontes de tensão, e em tensões em ramos que fazem parte de cortes de capacitores e fontes de corrente.

Sejam os circuitos da figura 3.1. O circuito (a) tem dois blocos ligados por menos de dois ramos. O bloco da esquerda tem frequências naturais $s = \pm j$, o bloco da direita tem $s = -1$. O circuito total tem as três. O circuito (b) tem dois blocos ligados em cascata. O da esquerda tem f. n. $s = \pm j$. O da direita tem $s = -1$ e $s = \pm j$, todas as do circuito. No circuito (c), a ponte equilibrada faz com que o capacitor da esquerda e o indutor não interajam. A rede tem 4 f. n., em $s = 0$, $s = -3$ e $s = -0.5 \pm j\sqrt{7}/2$, mas o capacitor da esquerda não tem as f. n. complexas em suas variáveis de tensão e corrente, enquanto para o indutor só elas aparecem.

Exemplo: Seja o circuito simétrico da figura 3.2. Calculando a tensão sobre o indutor central com uma análise nodal, para um conjunto genérico de condições iniciais, resulta o sistema, e a solução:

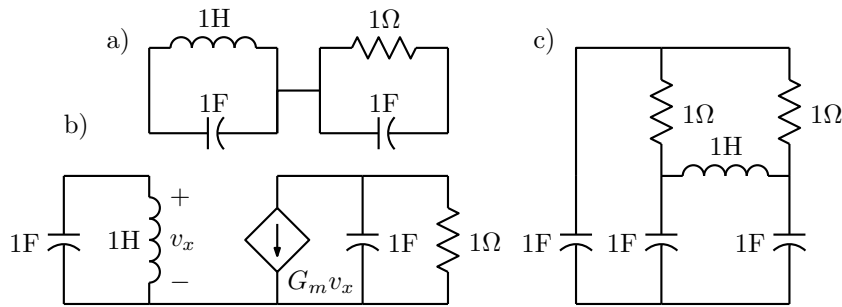


Figura 3.1: a) Circuito desconexo. b) Circuitos em cascata. c) Circuito com ponte equilibrada.

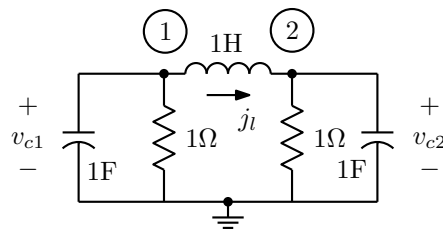


Figura 3.2: Circuito simétrico para cálculo de frequências naturais.

$$\begin{bmatrix} s + 1 + \frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & s + 1 + \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{c1}(0) - \frac{jI(0)}{s} \\ v_{c2}(0) + \frac{jI(0)}{s} \end{bmatrix}$$

$$E_1(s) = \frac{(v_{c1}(0) - \frac{jI(s)}{s})(s + 1 + \frac{1}{s}) + (v_{c2}(0) + \frac{jI(s)}{s})\frac{1}{s}}{s^2 + 2s + 3 + \frac{2}{s}}$$

$$E_2(s) = \frac{(v_{c2}(0) + \frac{jI(s)}{s})(s + 1 + \frac{1}{s}) + (v_{c1}(0) - \frac{jI(s)}{s})\frac{1}{s}}{s^2 + 2s + 3 + \frac{2}{s}}$$

$$E_1(s) - E_2(s) = \frac{(v_{c1}(0) - v_{c2}(0) - \frac{2jI(0)}{s})(s + 1)}{\frac{1}{s}(s^2 + s + 2)(s + 1)} = \frac{(s(v_{c1}(0) - v_{c2}(0)) - 2jI(0))(s + 1)}{(s^2 + s + 2)(s + 1)}$$

Como o circuito tem um só indutor, numerador e denominador devem ser multiplicados por s para a contagem correta do número de frequências naturais em 0. É então visto que ocorre um cancelamento da frequência natural em $s = -1$ para qualquer conjunto de frequências naturais. A tensão sobre o indutor tem apenas as frequências naturais que são as raízes do polinômio $s^2 + s + 2$, $s = \frac{-1 \pm j\sqrt{7}}{2}$.

3.2.2.1 Uso da simetria

No caso de circuitos simétricos, a simetria pode ser usada para facilitar o cálculo das frequências naturais. Com condições iniciais simétricas nos dois lados, não circula corrente entre as duas metades, e o circuito pode ser simplificado abrindo-se as conexões entre as metades. Com condições iniciais opostas nos dois lados, as tensões entre os centros dos ramos cruzando o eixo de simetria se anulam, e então estes pontos podem ser curto-circuitados sem alteração das frequências naturais. O cálculo das frequências naturais nos dois circuitos simplificados resulta no conjunto completo delas.

Exemplo: No exemplo anterior, figura 3.2, com excitação $v_{c1}(0) = v_{c2}(0)$ e $jI(0) = 0$ resulta o circuito da figura 3.3a, que tem frequência natural $s = -1$ (notar que só uma metade deve ser considerada). Com

excitação $v_{c1}(0) = -v_{c2}(0)$ e $j_l(0)$ qualquer resulta o circuito da figura 3.3b, que tem frequências naturais em $s = \frac{-1 \pm j\sqrt{7}}{2}$. Nos dois casos as frequências naturais são obtidas com uma análise nodal com um só nó¹.

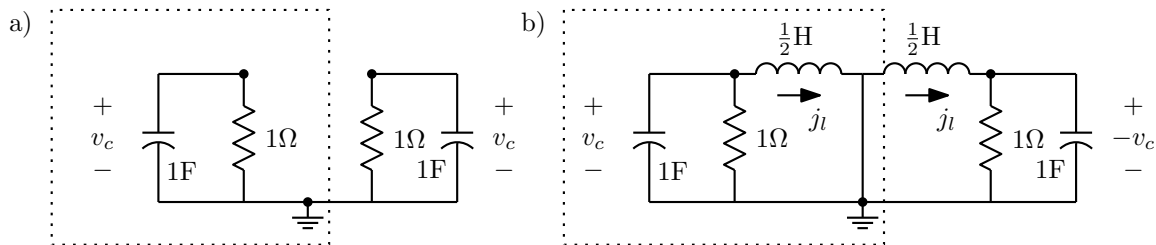


Figura 3.3: Circuito simétrico com excitações simétricas e antissimétricas.

3.3 Polos e zeros

Considerando agora a resposta ao estado zero, saídas e entradas são relacionadas por funções de transferência em transformada de Laplace. Em uma função de transferência, incluindo impedâncias e admitâncias, os valores de “s” que tornam a função infinita são chamados de “polos”, e os valores que anulam a função de “zeros”. Se a função vale $T(s) = N(s)/D(s)$, razão de polinômios de “s”, os polos são as raízes de $D(s)$ e os zeros as raízes de $N(s)$. Observando a forma como funções de transferência são calculadas, é evidente que os polos são calculados da mesma forma que as frequências naturais da variável onde se mede a saída da função de transferência, e que portanto são as f. n. desta variável. Os zeros não tem uma relação clara com as f. n., e dependem de onde estão a entrada e a saída da função de transferência. Polos e zeros podem estar em qualquer parte do plano complexo, sempre em pares conjugados se forem complexos em circuitos reais. Em circuitos estáveis os polos ficam todos no semiplano lateral esquerdo ou são simples no eixo imaginário. Não há restrições de estabilidade sobre os zeros (a não ser nos casos de impedâncias e admitâncias, onde eles se tornam polos na função inversa, e tem as mesmas restrições dos polos). Polos e zeros podem estar também “no infinito”, quando existe diferença de graus entre $N(s)$ e $D(s)$. Em termos de efeito no sinal de entrada, sinais no tempo que contêm componentes próximos de zeros são atenuados, até cancelados, e sinais com componentes próximos de polos são amplificados, podendo aparecer multiplicados pelo tempo. Na resposta em frequência, polos e zeros próximos ao eixo imaginário provocam ressonâncias ou anti-ressonâncias, que amplificam ou atenuam sinais senoidais em frequências próximas no regime permanente.

Exemplo: A rede da figura 3.4 tem a função de transferência, polos e zeros:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}(s) = 10 \frac{s^2 + 9}{s^3 + 100.1s^2 + 18s + 90.9}$$

$$\text{Zeros : } \pm 3j$$

$$\text{Polos : } -99.93, -0.08551 \pm 0.9499j$$

¹Uma interessante questão é se é possível projetar um circuito simétrico a partir de um polinômio de que se deseja calcular as raízes, e então calculá-las com este tipo de divisão do problema em duas partes. Devem existir formas de fazer isto, sem calcular previamente as raízes, para casos de até quarta ordem. Acima disto é sabido que não existem algoritmos algébricos para cálculo de raízes de polinômios.

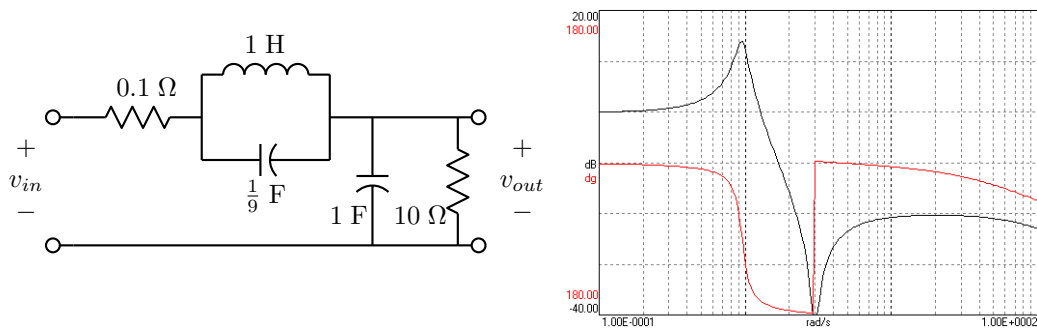


Figura 3.4: Circuito com polos e zeros complexos e sua resposta em frequência.

Sua resposta em frequência tem nulos, ou zeros, para $\omega = 3 \text{ rad/s}$ e ∞ e máximo com multiplicação por 5 em $\omega = 0.9443 \text{ rad/s}$, ou 13.97 dB^2 . Uma excitação senoidal em $\omega = 3 \text{ rad/s}$ desaparece, produzindo um pequeno transiente determinado apenas pelos polos, frequências naturais da rede. Uma excitação senoidal em $\omega = 0.9443 \text{ rad/s}$ é amplificada, como mostrado na figura 3.5. Notar que a duração do transiente é controlada pelos polos, no caso com constante de tempo, $1/0.08551 = 11.69 \text{ s}$. A estabilização ocorre em aproximadamente Q ciclos, onde $Q = 5.58$ é o fator de qualidade dos polos complexos.

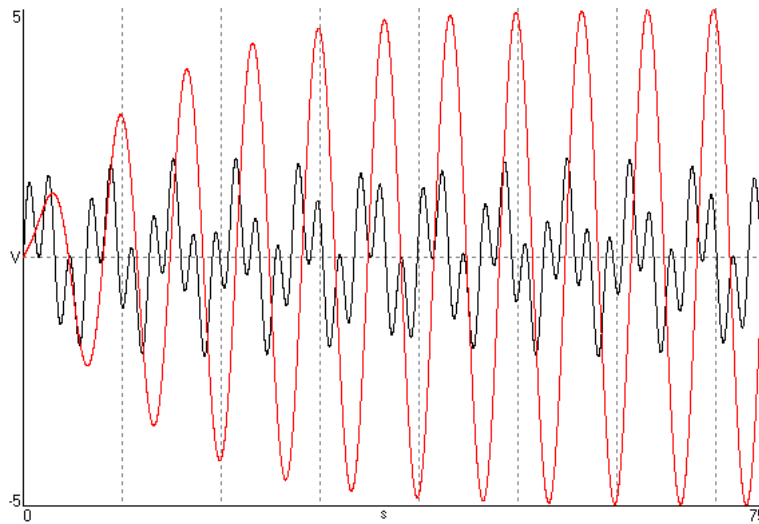


Figura 3.5: Resposta no tempo, entrada e saída, com excitação de duas senóides de 1 V em 3 rad/s e 0.9443 rad/s somadas.

²A multiplicação por 5 é limitada pela máxima transferência de potência. Com casamento de impedâncias com o resistor de entrada R_1 a potência que vem do resistor e da fonte de entrada vale $(v_{in}/2)^2/R_1$, e a potência sobre o resistor de saída R_2 vale v_{out}^2/R_2 . Igualando as duas, já que a rede LC é sem perdas, vem $v_{out}/v_{in} = \sqrt{R_2/R_1}/2 = 5$, no máximo.

3.3.1 Zeros em redes em escada

Como dito acima, zeros dependem do caminho entre entrada e saída, e em alguns casos podem ser gerados por estruturas reconhecíveis. No caso de uma rede em escada (“ladder”) formada por impedâncias em série $Z_i(s)$ e admitâncias em paralelo $Y_i(s)$ (figura 3.6), os zeros estão nos valores de “s” que fazem $Z_i(s) = \infty$ ou $Y_i(s) = \infty$, colocando circuitos abertos nos ramos série ou curto-circuitos nos ramos em paralelo. A figura 3.7 mostra alguns ramos que formam zeros de transmissão. Os casos mais úteis são os das redes LC que formam zeros em 0 , ∞ ou $\pm j\omega$, mas estruturas RC e RL formando zeros no semieixo real negativo podem ser úteis também. Zeros complexos no semiplano lateral esquerdo podem ser formados com redes RLC, um caso sendo mostrado na figura. Outros casos envolvem o resistor, possivelmente mais de um, em outras posições, mas estes caso tem pouca utilidade, a não ser em análise de circuitos simples. Outras redes úteis que formam zeros podem ser geradas com o uso de transformadores, redes em “lattice” e estruturas como a do “duplo T”, esta mostrada na figura 3.8³

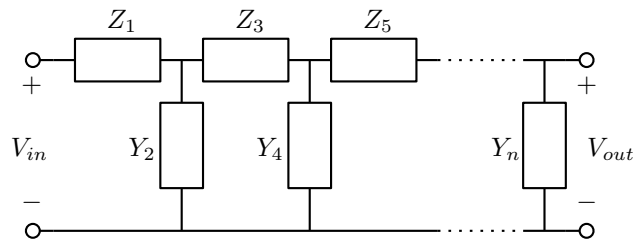


Figura 3.6: Rede em escada realizando um ganho de tensão.

3.3.1.1 Divisores que não formam zeros

A formação de zeros nesta forma nem sempre ocorre, entretanto, pois podem ser formados divisores de impedâncias nulas ou infinitas na escada. Divisores são formados quando uma impedância em série é infinita, mas a impedância que a segue também é, ou quando uma admitância em paralelo é infinita, mas a admitância que a precede também é. Estes casos são muito comuns em filtros, especialmente com divisores formados em $s = 0$ ou $s = \infty$. A rede da figura 3.9 mostra alguns casos. Notar que a formação de divisores no infinito está sempre associada a estruturas que reduzem a ordem de complexidade (ciclos capacitivos e cortes indutivos), e divisores em zero se associam a estruturas que formam frequências naturais nulas (ciclos indutivos e cortes capacitivos). A rede da figura tem 16 elementos reativos, é de ordem 14, e tem duas frequências naturais em zero. A ordem da função de transferência de tensão da esquerda para a direita é 12, e existem portanto também 12 zeros, 8 no eixo imaginário, 2 no ∞ e 2 em 0^4 .

Exemplo: Para ilustrar como aparecem tanques com resistores e cancelamentos devidos à estrutura, seja a rede simétrica da figura 3.2, com entrada e saídas acrescentadas como na figura 3.10. Com a saída em v_{c2} existem três zeros de transmissão em zero e v_{c2} observa as três frequências naturais da rede. Com a saída em v_{c1} , existe um zero no infinito e um par de zeros complexos formados pelo tanque RLC em

³O “duplo T” generalizado cria zeros complexos inclusive no semiplano lateral direito, mas com restrições. O numerador de sua função de transferência é um polinômio de terceiro grau completo com coeficientes positivos. Para realizar zeros em $\alpha \pm j\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$, ele deve valer $(s^2 - 2\alpha s + \beta^2)(s + a)$, com $-a$ sendo um zero real também criado. É fácil ver que para todos os coeficientes serem positivos a condição é $\beta > 2\alpha$, ou o ângulo dos zeros ser maior que $\pi/3$. No caso geral de um polinômio positivo completo de grau n , o limite para os zeros é em ângulo maior que π/n [26].

⁴Uma outra interpretação, menos prática mas que evita os problemas com divisores, é dizer que ciclos capacitivos e cortes indutivos criam “frequências naturais no infinito”, que se tornam polos nas funções de transferência, cancelados por zeros no infinito realizados pelos elementos que formam divisores no infinito. Analogamente pode-se considerar que frequências naturais em zero se tornam também polos, e são canceladas pelos elementos que formam divisores em zero.

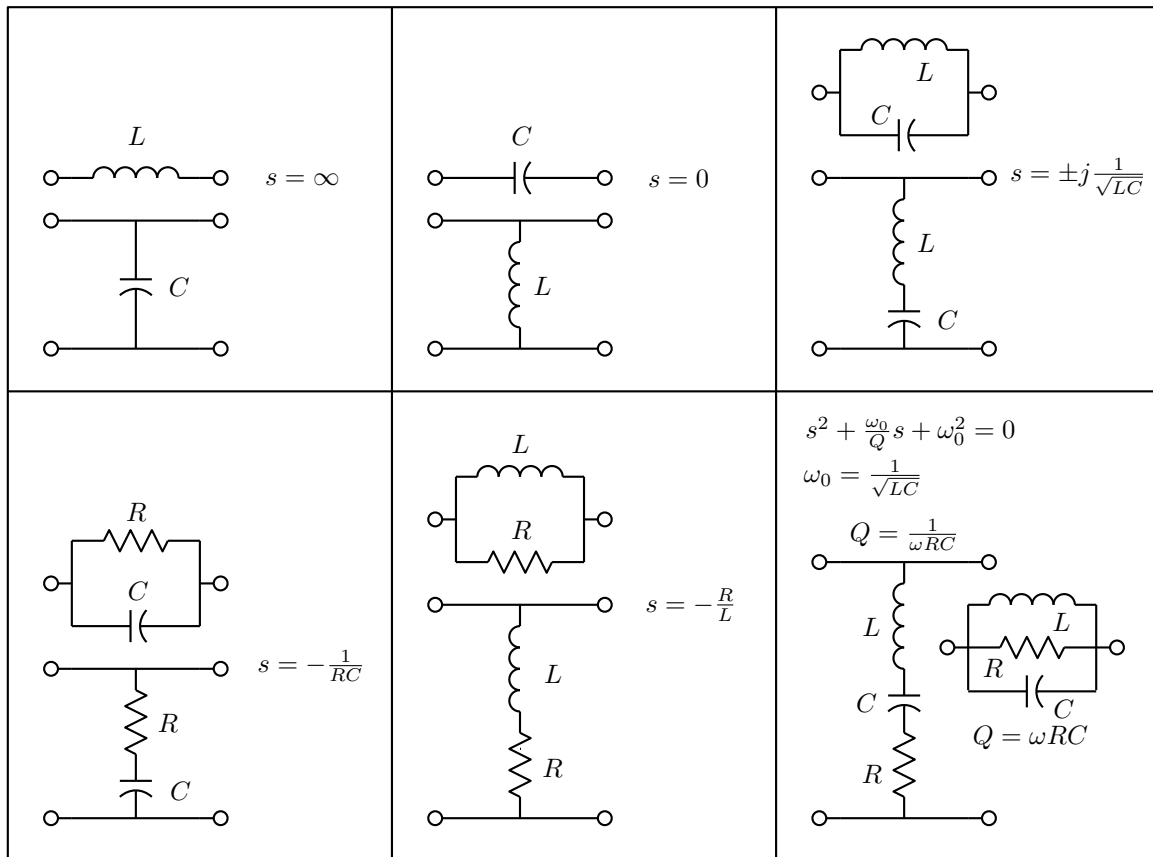


Figura 3.7: Estruturas de impedâncias em série e admitâncias em paralelo que formam zeros em redes em escada.

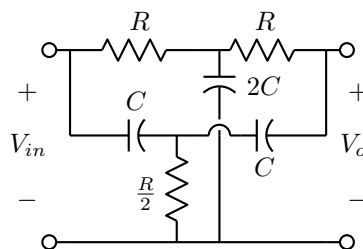


Figura 3.8: “Duplo T”, uma estrutura RC que cria zeros em $\pm j \frac{1}{RC}$.

$-\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$. As três frequências naturais são polos pois v_{c1} as observa. Com a saída em v_l , existem zeros no infinito, em zero e em -1 devido ao tanque RC, este obrigatoriamente cancelado com o polo em $s = -1$, pois o indutor não o observa⁵. As funções de transferência tem então as formas, onde é fácil verificar que as constantes K_i são unitárias:

⁵É interessante notar que se este circuito é analisado com o “algoritmo da eliminação”, o cancelamento aparece feito.

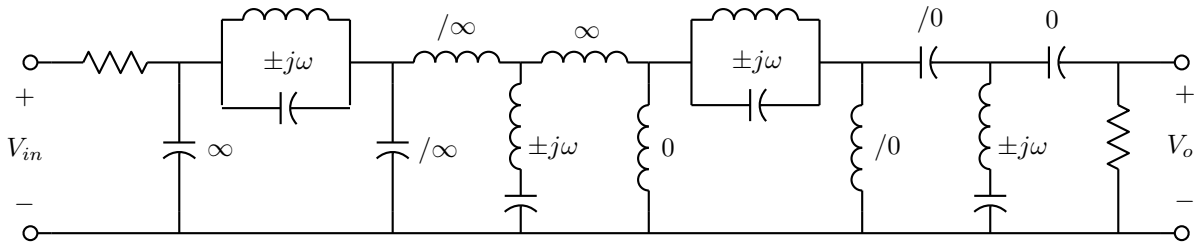


Figura 3.9: Formação de zeros, e divisores em 0 e ∞ em uma típica rede em escada.

$$\frac{V_{c1}}{V_{in}}(s) = \frac{K_1(s^2 + s + 1)}{(s + 1)(s^2 + s + 2)}$$

$$\frac{V_{c2}}{V_{in}}(s) = \frac{K_2}{(s + 1)(s^2 + s + 2)}$$

$$\frac{J_l}{V_{in}}(s) = \frac{K_3 \cancel{s(s+1)}}{(s+1)(s^2 + s + 2)}$$

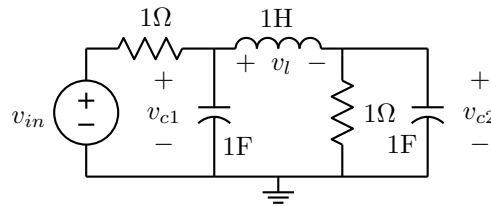


Figura 3.10: Circuito simétrico para cálculo de polos zeros.

3.4 Estruturas para filtros

A seção anterior indica como se pode prever estruturas para filtros RLC. Resistores não são requeridos para a formação de zeros em 0, ∞ e $\pm j\omega$, e assim só são incluídos nas extremidades, como terminações da rede. É possível usar apenas uma terminação, na entrada ou na saída, ou duas, uma de cada lado. Esta forma é mais útil quando se quer conectar o filtro a outros circuitos, e também pode resultar em filtros com menor sensibilidade à variação dos elementos (ver adiante). Os filtros mais usuais, considerando a forma do módulo da função de transferência, são:

- Passa-baixas: Polos reais e complexos são posicionados em baixa frequência e zeros são posicionados em alta frequência, em pares imaginários ou no infinito.
- Passa-altas: Polos reais e complexos são posicionados em alta frequência e zeros são posicionados em baixa frequência, em pares imaginários ou em 0.
- Passa-faixa: Polos complexos são posicionados na região da banda passante, e zeros são posicionados acima e abaixo da banda passante, em pares imaginários, 0 ou ∞ .
- Rejeita-faixa: Polos ficam em alta e em baixa frequência, com zeros imaginários na banda de rejeição.

Os filtros também podem ser caracterizados como “polinomiais”, se a função de transferência é caracterizada por um único polinômio, cujas raízes são os polos, com zeros localizados todos em zero, no infinito ou na mesma frequência no eixo imaginário, ou “racionais”, quando existem zeros em outras posições, usualmente em pares conjugados no eixo imaginário. Em filtros polinomiais os tanques LC necessários para isto não estão presentes nas estruturas em escada.

A figura 3.11 mostra típicas respostas em frequência destes filtros, as configurações de polos e zeros e possíveis estruturas correspondentes. Os filtros mostrados são do tipo racional, com funções de transferência com polos no semiplano lateral esquerdo e zeros no eixo imaginário. As estruturas são em escada LC duplamente terminada em resistores. O filtro passa-baixas é uma estrutura de ordem 5 realizando dois pares de zeros imaginários e um zero no infinito. O filtro passa-altas é de ordem 7, mas tem duas frequências naturais em zero que não aparecem na tensão de saída. Forma um filtro de ordem 5 com dois pares de zeros imaginários e um zero em zero. O filtro passa-faixa com a estrutura mostrada é a forma que resulta de uma “transformação passa-baixas para passa-faixa” (ver adiante), com ressíntese dos tanques LC suspensos (ver síntese de impedâncias LC). É uma estrutura de ordem 7, com uma frequência natural em zero que não aparece na saída, realizando então um filtro de ordem 6, com dois pares de zeros imaginários e zeros em zero e no infinito. A estrutura rejeita-faixa também resulta de transformação de um filtro passa-baixas, e é mais estranha pois é de ordem 8 para realizar um filtro de ordem 6. Os tanques laterais e a combinação dos tanques suspensos ressonam em série na frequência central do filtro, e portanto os tanques suspensos não observam as terminações na frequência central. Isto cria um par de frequências naturais imaginárias na frequência central do filtro. Os zeros centrais são na verdade uma combinação de dois pares de zeros e um de polos.

As estruturas contendo frequências naturais em zero, e especialmente a rejeita-faixa contendo frequências naturais no eixo imaginário, não devem ser usadas como protótipo para filtros ativos (a partir de equações de estado), pois os polos em zero geram níveis indeterminados de tensão ou corrente contínua dentro da estrutura, e os imaginários podem se mover para o semiplano lateral direito devido a efeitos parasitas e instabilizar o filtro. Em uma realização passiva não são problema, pois perdas sempre os movem ligeiramente para o semiplano lateral esquerdo.

3.4.1 Aproximações

Apenas para informação, já que não se visa um estudo do assunto aqui, filtros operando sobre o módulo de um sinal são obtidos a partir de “aproximações”, que geram funções de transferência realizáveis aproximando filtros ideais, que deixariam passar os sinais inalterados nas “bandas passantes” e bloqueariam totalmente sinais nas “bandas de rejeição”. É impossível deixar passar sem atenuação e bloquear completamente sinais em bandas extensas, e assim o que se consegue realizar é algo como mostrado na figura 3.12, para o caso de um filtro “passa-baixas”. Há uma banda passante onde é especificada uma atenuação máxima do sinal A_{max} , uma banda de rejeição onde é especificada uma atenuação mínima A_{min} , e uma banda de transição entre elas. As frequências onde não há atenuação são chamadas de “zeros de atenuação”, e as onde a atenuação é completa de “zeros de transmissão”. Os tipos clássicos de aproximação mais comuns podem ser classificados da forma abaixo, sempre no caso passa-baixas. Seja n a ordem do filtro, número de polos da função de transferência. As aproximações sempre geram n zeros de atenuação e n zeros de transmissão:

- Aproximação de Butterworth: Apresenta n zeros de atenuação em 0 e n zeros de transmissão no infinito. Resulta uma banda passante maximamente plana e um filtro não muito seletivo, com atenuação de $20n$ dB por década a partir da borda da banda passante.
- Aproximação de Chebyshev: Apresenta 1 (n ímpar) ou 0 (n par) zeros de atenuação em zero, com os demais distribuídos na banda passante de forma a gerar uma oscilação (“ripple”) uniforme com a atenuação variando entre 0 e A_{max} dB. Os n zeros de transmissão ficam no infinito. Resulta a aproximação sem zeros finitos de transmissão com a maior atenuação possível na banda de rejeição.

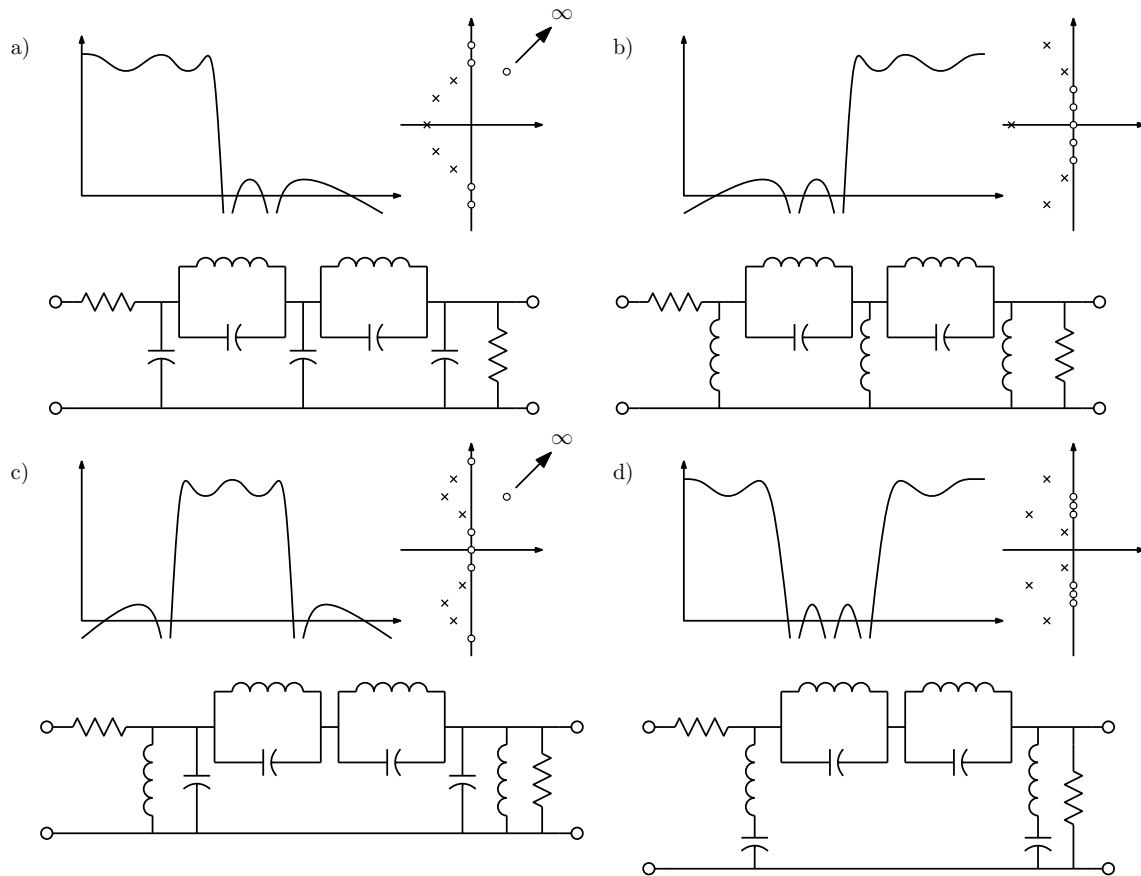


Figura 3.11: Respostas em frequência, configurações de polos e zeros e estruturas típicas para filtros. a) Passa-baixas. b) Passa-altas. c) Passa-faixa. d) Rejeita-faixa.

- Aproximação de Chebyshev inversa: Apresenta n zeros de atenuação em 0, 1 (n ímpar) ou 0 (n par) zeros de transmissão no infinito, e os demais zeros de transmissão posicionados de forma a gerar oscilação uniforme na banda de rejeição, com atenuação variando entre A_{min} e ∞ . Resulta um filtro com banda passante maximamente plana, similar ao do filtro de Butterworth, mas com a mesma seletividade do filtro de Chebyshev.
- Aproximação de Cauer, ou elíptica: Apresenta banda passante como no caso da aproximação de Chebyshev e banda de rejeição como no caso da aproximação de Chebyshev inversa. É a mais seletiva de todas as aproximações.

Apenas considerando-se a seletividade, é sempre melhor usar a aproximação elíptica, mas considerações sobre as características de fase e atraso de grupo, ou resposta transiente, ou o desejo de não ter zeros de transmissão finitos, que podem criar dificuldades especialmente em filtros ativos, podem levar a preferência por outras aproximações. É possível gerar muitas outras aproximações alterando as posições dos zeros de transmissão e atenuação, e é possível modificar as características de fase sem alterar as de módulo com o uso de filtros “passa-tudo”, que tem zeros no semiplano lateral direito nas mesmas posições dos polos no lado esquerdo. A figura 3.13 mostra as características das aproximações descritas.

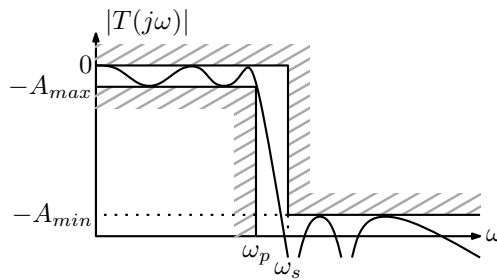


Figura 3.12: Especificação de um filtro passa-baixas.

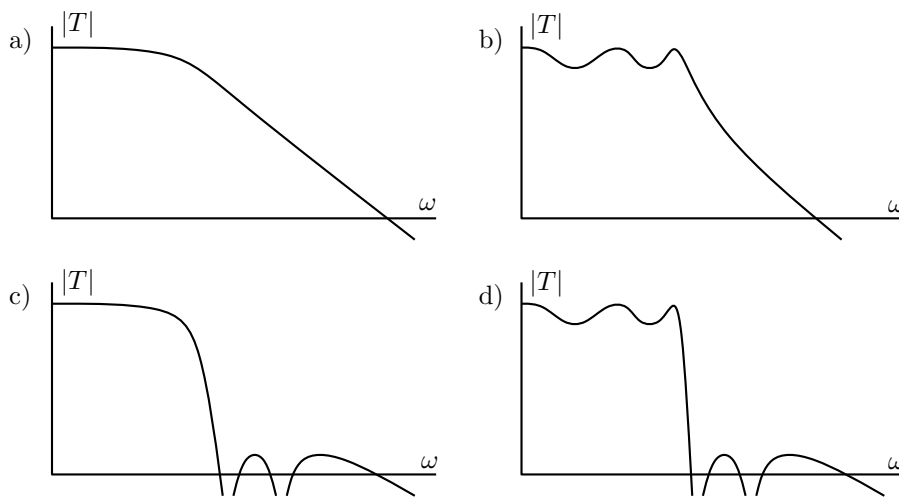


Figura 3.13: Curvas de módulo das aproximações mais usuais. a) Butterworth, b) Chebyshev, c) Chebyshev inversa d) Elíptica. Filtros de ordem 5.

Filtros de Butterworth e de Chebyshev tem fórmulas explícitas conhecidas para os elementos. Os demais podem ser gerados a partir das técnicas descritas mais adiante. Tabelas e programas de síntese para as aproximações clássicas são fáceis de encontrar.

3.4.2 Transformações de frequência

3.4.2.1 Escalamento em frequência e impedância

Um filtro projetado para operar em certa faixa de frequências e com terminações de certo valor pode ser facilmente modificado para operar em outra faixa ou com outro nível de impedância, bastando escalar os valores dos componentes. Seja alterar um filtro para operar em uma frequência F vezes maior e com nível de impedância R vezes maior:

- Todas as resistências são multiplicados por R .
- Todas as capacitâncias são divididas por R e divididas por F .
- Todas as indutâncias, próprias e mútuas, são multiplicadas por R e divididas por F .

Assim é possível projetar filtros originais sempre normalizados, para operação em 1 rad/s e com nível de impedância de 1 ohm, e transformá-los para os níveis finais por escalamento.

Com o uso de “transformações de reatância”, um filtro pode ser transformado em outro sem necessidade de um reprojeto completo. Um filtro passa-faixa pode ser convertido nas outras formas com simples transformações:

3.4.2.2 Transformação passa-baixas - passa-altas

Um filtro passa-baixas com frequência de corte em 1 rad/s é transformado em um filtro passa-altas com corte em ω_p pela transformação:

$$s \rightarrow \frac{\omega_p}{s}$$

A rede passiva pode ser diretamente transformada:

- Capacitores: $Y(s) = sC \rightarrow Y'(s) = \frac{\omega_p C}{s}$, indutor de valor $L' = \frac{1}{\omega_p C}$.
- Indutores: $Z(s) = sL \rightarrow Z'(s) = \frac{\omega_p L}{s}$, capacitor de valor $C' = \frac{1}{\omega_p L}$.

3.4.2.3 Transformação passa-baixas - passa-faixa

Um filtro passa-baixas com frequência de corte em 1 rad/s é transformado em um filtro passa-faixa com banda passante centrada geometricamente em ω_0 e banda passante B pela transformação:

$$s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs}$$

A rede passiva pode também ser diretamente transformada:

- Capacitores: $Y(s) = sC \rightarrow Y'(s) = \frac{s^2 C + \omega_0^2 C}{Bs} \rightarrow \frac{sC}{B} + \frac{\omega_0^2 C}{Bs}$, tanque paralelo com $C' = \frac{C}{B}$ e $L' = \frac{B}{\omega_0^2 C}$.
- Indutores: $Z(s) = sL \rightarrow Z'(s) = \frac{s^2 L + \omega_0^2 L}{Bs} \rightarrow \frac{sL}{B} + \frac{\omega_0^2 L}{Bs}$, tanque série com $L' = \frac{L}{B}$ e $C' = \frac{B}{\omega_0^2 L}$.

3.4.2.4 Transformação passa-baixas - rejeita-faixa

Um filtro passa-baixas com frequência de corte em 1 rad/s é transformado em um filtro rejeita-faixa com banda de rejeição centrada geometricamente em ω_0 e bandas passantes separadas por B pela transformação, que é uma combinação da transformação passa-baixas - passa-altas e passa-baixas - passa-faixa:

$$s \rightarrow \frac{Bs}{s^2 + \omega_0^2}$$

A rede passiva pode também ser diretamente transformada:

- Capacitores: $Y(s) = sC \rightarrow Y'(s) = \frac{CBs}{s^2 + \omega_0^2} \rightarrow 1 / (\frac{s}{CB} + \frac{\omega_0^2}{CBs})$, tanque série com $C' = \frac{CB}{\omega_0^2}$ e $L' = \frac{1}{CB}$.
- Indutores: $Z(s) = sL \rightarrow Z'(s) = \frac{LBs}{s^2 + \omega_0^2} \rightarrow 1 / (\frac{s}{LB} + \frac{\omega_0^2}{LBs})$, tanque paralelo com $L' = \frac{LB}{\omega_0^2}$ e $C' = \frac{1}{LB}$.

Exemplo: Seja obter um filtro passa-faixa de 6ª ordem com banda passante entre 1 e 2 kHz, com atenuação de 3.0103 dB ($1/\sqrt{2}$) nas bordas da banda e terminações de 50 ohms. No caso será usada a aproximação de Butterworth, que resulta em uma banda passante maximamente plana. O filtro passivo

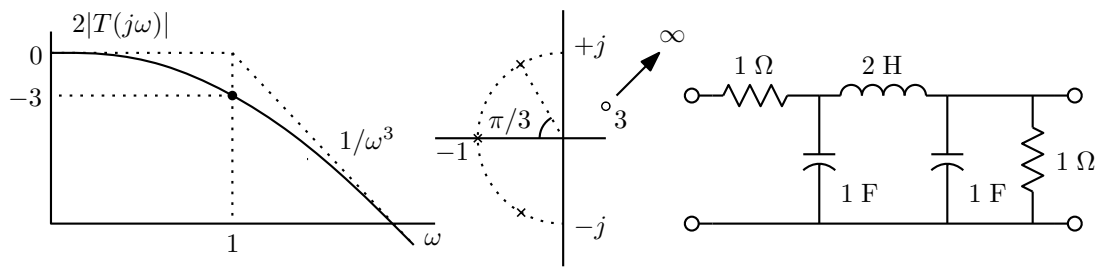


Figura 3.14: Resposta em frequência, configuração de polos e zeros e estrutura para um filtro de Butterworth normalizado de 3ª ordem.

de Butterworth de 3ª ordem com esta atenuação em 1 rad/s é mostrado na figura 3.14. Notar que devido à estrutura duplamente terminada a atenuação mínima na banda passante é de 6.0206 dB (1/2).

A transformação passa-baixas - passa-faixa é então aplicada com os parâmetros $\omega_0 = 2\pi\sqrt{1000 \times 2000}$ e $B = 2\pi(2000 - 1000)$, seguida de um escalamento de impedância para 50 Ω, resultando na rede mostrada na figura 3.15.

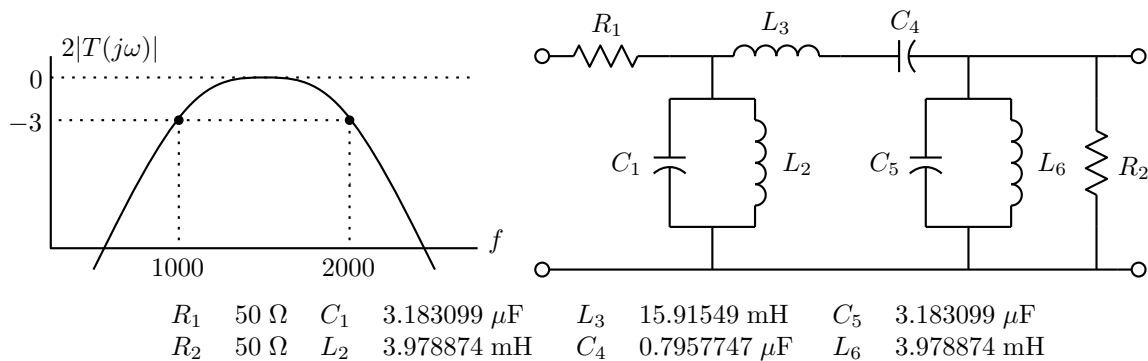


Figura 3.15: Resposta em frequência e estrutura para um filtro de Butterworth passa-faixa de 6ª ordem.

Exemplo: A transformação de um filtro com zeros pode envolver mais um passo, para a geração de tanques LC nas formas mostradas na figura 3.11. Seja o caso de um filtro passa-faixa de 6ª ordem, maximamente plano na banda passante, mas com zeros nos dois lados da banda passante, com as mesmas especificações do exemplo anterior. O filtro protótipo pode ser obtido pela aproximação de Chebyshev inversa, com $A_{max} = 3.0103$ dB e, por exemplo, $A_{min} = 40$ dB, e é mostrado na figura 3.16.

A transformação passa-baixas - passa-faixa gera a estrutura da figura 3.17. Em casos de banda passante estreita a dispersão de valores entre elementos do mesmo tipo no tanque LC composto gerado pela transformação do tanque do protótipo pode ficar grande demais. Uma forma mais conveniente pode ser obtida resintonizando a rede LC do tanque composto na “primeira forma de Foster” (ver adiante), obtendo-se a rede da figura 3.17, que também é mais fácil de sintonizar, pois cada tanque controla a frequência de um zero de transmissão. Fórmulas explícitas para esta transformação podem ser obtidas.

A transformação passa-baixas - rejeita-faixa, no caso de filtros com zeros finitos de transmissão, também pode usar esta transformação de tanques LC compostos em pares de tanques simples.

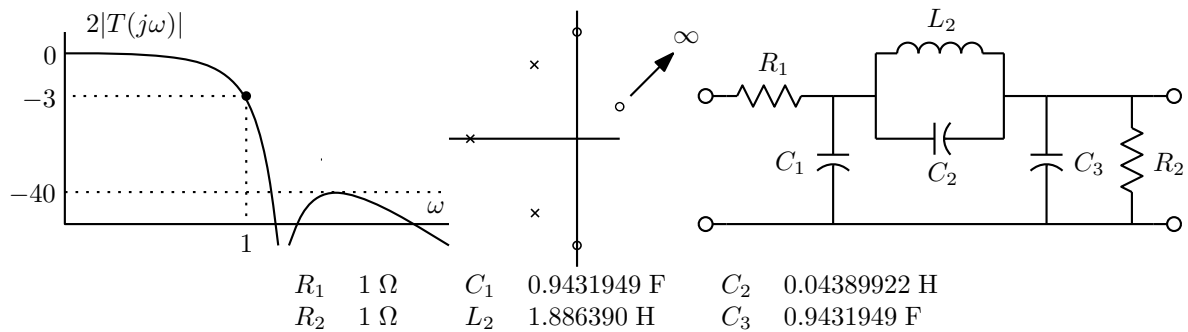


Figura 3.16: Resposta em frequência, configuração de polos e zeros e estrutura para um filtro de Chebyshev inverso normalizado de 3ª ordem.

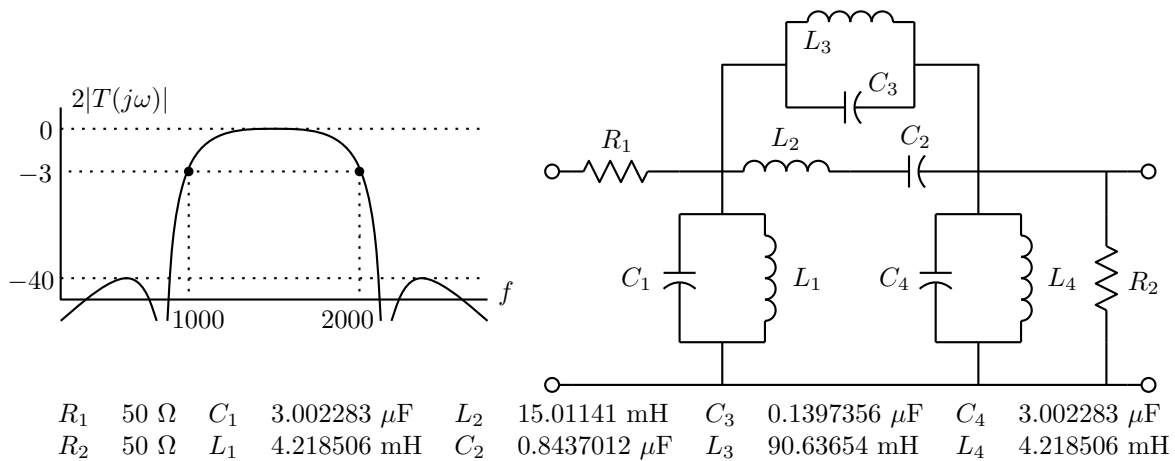


Figura 3.17: Resposta em frequência e estrutura para um filtro de Chebyshev inverso passa-faixa de 6ª ordem.

3.4.2.5 Número de elementos necessários

Nos filtros polinomiais o número de elementos reativos é a ordem do filtro, mas nos filtros racionais a rede tem mais componentes reativos que a ordem do filtro realizado. Isto se deve aos graus extra de liberdade necessários à realização dos zeros de transmissão. Ao menos um resistor deve sempre existir, para a realização de polos no semiplano lateral esquerdo. Resistores são sempre colocados como terminações, na entrada ou na saída. É conveniente usar duas terminações resistivas, por facilidade de conexão com outros circuitos e por questões de sensibilidade à variação dos elementos (ver adiante). O número de elementos reativos necessário pode ser obtido contando-se os coeficientes necessários para especificar a forma da função de transferência. Um filtro elíptico de quinta ordem, por exemplo, tem uma função de transferência da forma:

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = k \frac{s^4 + b_2s^2 + b_0}{s^5 + a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

e a forma da curva é especificada por 7 coeficientes (ignorando-se o ganho). São necessários 7 componentes reativos e ao menos um resistor.

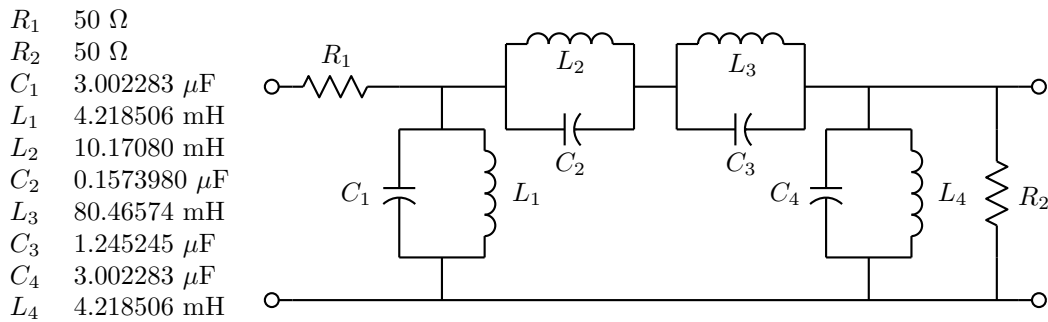


Figura 3.18: Estrutura para um filtro de Chebyshev inverso passa-faixa de 6ª ordem com o tanque LC composto ressinetizado.

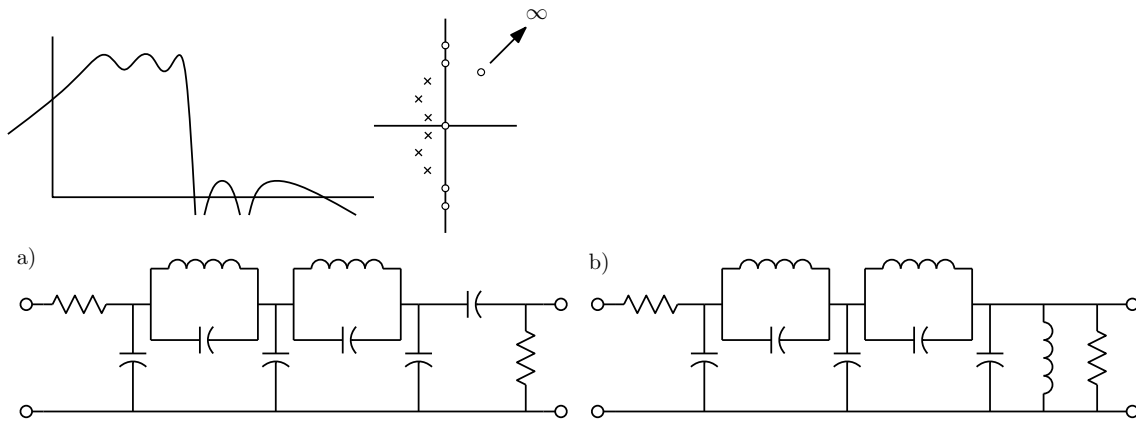


Figura 3.19: Estruturas para um filtro passa-faixa irregular de 6a. ordem. A estrutura (a) realiza os zeros corretamente, mas não tem indutores suficientes para os três pares de polos complexos. A estrutura (b) está correta.

Para a realização de polos complexos, ao menos um indutor e um capacitor são necessários para cada par. Por exemplo, seja um filtro similar a um filtro passa-baixas de quinta ordem, mas com um zero de transmissão extra em zero, da figura 3.19. O filtro tem então ordem 6, com uma estrutura similar a de um filtro passa-baixas, mas com um indutor em paralelo ou um capacitor em série em algum lugar. Se a versão passa-baixas tem 2 indutores, o novo elemento tem que ser um indutor. Se tem 2 capacitores, o novo elemento tem que ser um capacitor.

3.5 Teoremas

A seguir são discutidos alguns teoremas básicos de circuitos, que tem implicações importantes na dedução de como a síntese de estruturas passivas pode ser feita.

3.5.1 Teorema da substituição

Um ramo onde se conhece a tensão $v(t)$ pode ser substituído por uma fonte de tensão de valor $v(t)$. Um ramo onde se conhece a corrente $i(t)$ pode ser substituído por uma fonte de corrente de valor $i(t)$. Mais geralmente, o ramo pode ser substituído por qualquer circuito que gere a mesma tensão ou, o que é equivalente, a mesma tensão. Estas substituições não afetam a solução do circuito. Este teorema vale para qualquer circuito, é apenas consequência da álgebra da análise de circuitos.

3.5.2 Teorema da superposição

Em circuitos lineares, variantes ou não no tempo, o efeito de um conjunto de fontes independentes de tensão e corrente no valor de uma variável é a soma dos efeitos obtidos aplicando-se as fontes separadamente, com as demais zeradas. O teorema é consequência da linearidade, e inclui o caso de a aplicação de uma entrada única K vezes maior gerar uma saída também K vezes maior:

$$f(Ax(t) + By(t)) = Af(x(t)) + Bf(y(t))$$

3.5.3 Teoremas de Thévenin e Norton

O teorema de Thévenin⁶ (ver figura 3.20) diz que uma rede linear contendo fontes independentes ligada a uma carga qualquer por uma porta pode ser substituída por uma cópia da rede com as fontes zeradas em série com uma fonte de tensão V_{th} que tem o valor da tensão na porta v quando $i = 0$, ou seja, com a porta em aberto.

O teorema de Norton⁷ é a versão dual do de Thévenin, e diz que uma rede linear contendo fontes independentes ligada a uma carga arbitrária por uma porta pode ser substituída por uma cópia da rede com as fontes zeradas, a mesma rede do equivalente de Thévenin, em paralelo com uma fonte de corrente I_n que tem como valor i quando $v = 0$, ou seja, a corrente saindo da porta com esta em curto-circuito.

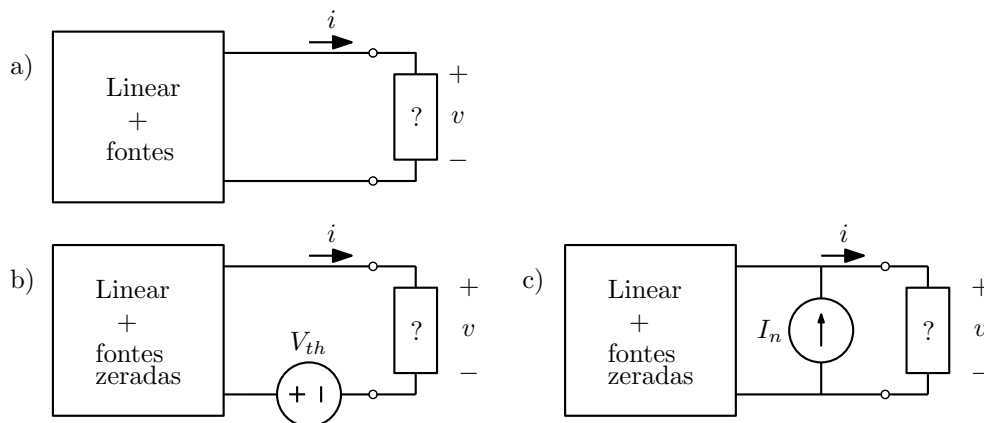


Figura 3.20: Equivalentes de Thévenin (b) e de Norton (c) para um circuito linear com fontes independentes (a) ligado a uma carga arbitrária.

Para provar os dois teoremas, no caso do de Thévenin (ver figura 3.21) aplica-se o teorema da substituição à carga arbitrária, que é substituída por uma fonte de corrente de valor i . O circuito é agora todo

⁶Léon Charles Thévenin, 1883.

⁷Edward Lawry Norton, 1926.

linear, e se pode aplicar o teorema da superposição. Este diz que a tensão sobre a porta v é a soma dos efeitos das fontes internas da rede quando $i=0$, que é a definição de V_{th} , com o efeito da corrente i na rede com as fontes zeradas, o que corresponde exatamente ao equivalente. No caso do equivalente de Norton a carga é substituída por uma fonte de tensão de valor v . O circuito é então todo linear, e o teorema da superposição diz que a corrente na porta é a soma dos efeitos das fontes internas quando $v = 0$, o que é a definição de I_n , com o efeito de v na rede com as fontes internas zeradas. Novamente, isto corresponde ao equivalente.

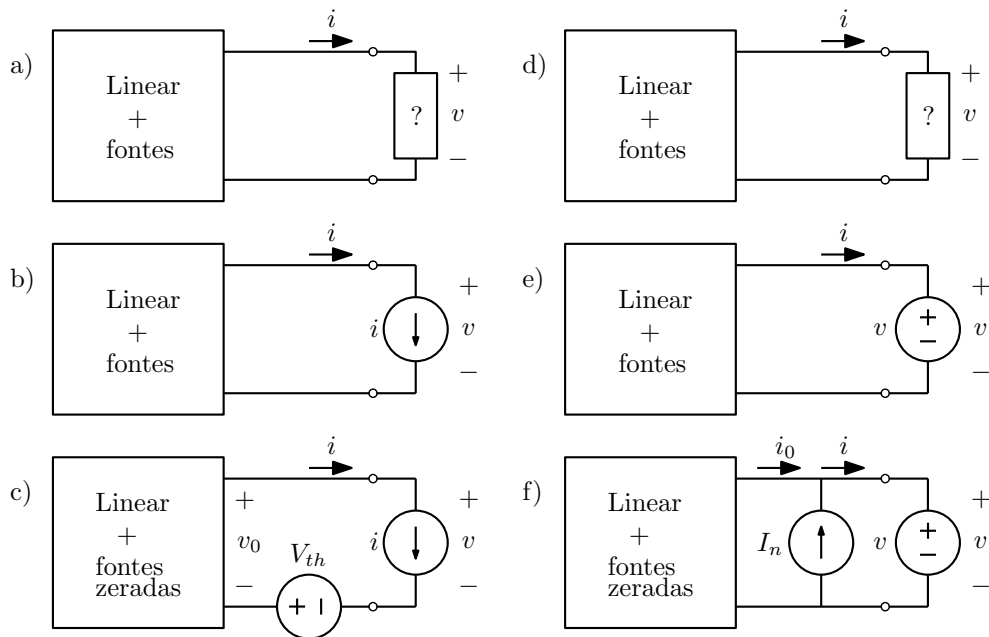


Figura 3.21: Provas dos equivalentes Thévenin e Norton.

Os dois teoremas se aplicam a circuitos lineares variantes ou não no tempo ligados a uma carga qualquer. No caso de circuitos invariantes no tempo (figura 3.22), a rede com as fontes internas zeradas pode ser representada pela relação constante entre tensão e corrente sobre ela, que define uma impedância $Z = V/I$ ou uma admitância $Y = I/V$, em transformada de Laplace ou no estado permanente senoidal, as mesmas nos dois equivalentes. No caso de um circuito resistivo, aparece uma resistência ou uma condutância. O equivalente Thévenin é então uma impedância Z_{th} em série com uma fonte de tensão V_{th} , e o equivalente Norton um impedância $Z_n = Z_{th}$ em paralelo com uma fonte de corrente I_n , e valem as relações $V_{th} = Z_{th}I_n$ e $I_n = V_{th}/Z_{th}$, úteis para simplificar circuitos em análises simples.

Exemplo: Seja a rede a analisar da figura 3.23, que pode ser resolvida para V_0 considerando um duplo divisor de tensão ou um equivalente Thévenin na primeira seção. No primeiro caso, tem-se:

$$V_0 = V \frac{R_2 // (sL_3 + \frac{1}{sC_4})}{\frac{1}{sC_1} + R_2 // (sL_3 + \frac{1}{sC_4})} \frac{\frac{1}{sC_4}}{sL_3 + \frac{1}{sC_4}}$$

No segundo caso a expressão é um pouco mais fácil de simplificar, com $V_{th} = V \frac{R_2}{\frac{1}{sC_1} + R_2}$:

$$V_0 = V \frac{R_2}{\frac{1}{sC_1} + R_2} \frac{\frac{1}{sC_4}}{R_2 // \frac{1}{sC_1} + sL_3 + \frac{1}{sC_4}}$$

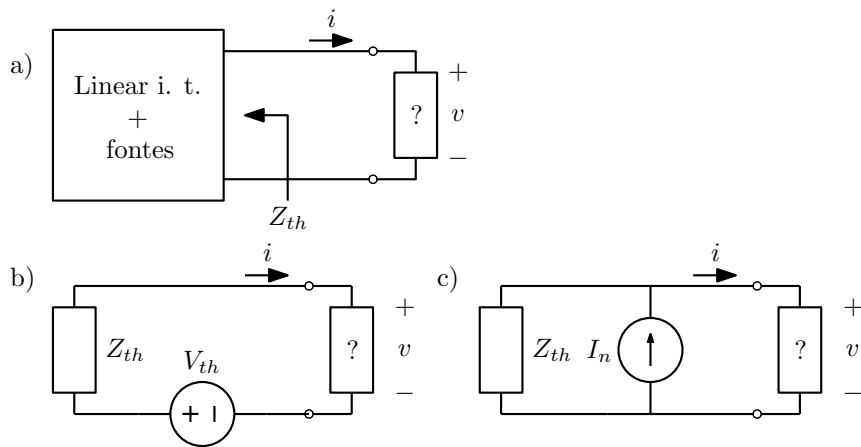


Figura 3.22: Equivalentes Thévenin e Norton para circuitos lineares invariantes no tempo.

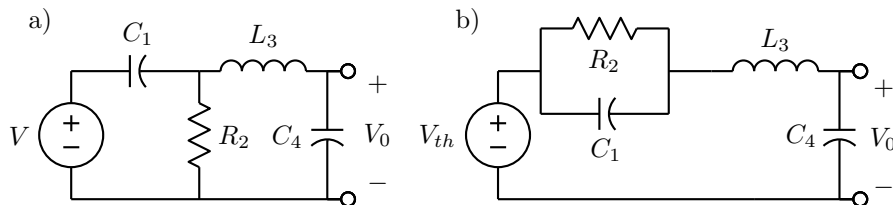


Figura 3.23: Usando o equivalente Thévenin em uma análise simples. a) com divisor de tensão duplo, b) com divisor simples e equivalente Thévenin.

3.6 Redes de duas portas

Quando se consideram duas portas abertas em uma rede linear, invariante no tempo, sem fontes internas, o equivalente visto por uma das portas tem que levar em conta o que está aplicado na outra. Pelo teorema da substituição, o circuito ligado à porta que não está sendo observada pode ser substituído por uma fonte de tensão ou de corrente. O equivalente visto então pode ser um equivalente Thévenin ou Norton, onde a impedância é obtida zerando-se a fonte na outra porta, e a fonte do equivalente é proporcional ao valor da fonte na outra porta. Uma fonte controlada portanto. Existem quatro possibilidades:

1. Fonte de tensão na outra porta, equivalente Thévenin. Z_{th} é calculado com um curto-circuito na outra porta, e a fonte do equivalente é um amplificador de tensão.
2. Fonte de corrente na outra porta, equivalente Thévenin. Z_{th} é calculado com a outra porta em aberto, e a fonte do equivalente é um transresistor.
3. Fonte de tensão na outra porta, equivalente Norton. Z_n é calculado com um curto-circuito na outra porta, e a fonte do equivalente é um transcondutor.
4. Fonte de corrente na outra porta, equivalente Norton. Z_n é calculado com a outra porta em aberto, e a fonte do equivalente é um amplificador de corrente.

Considerando as duas portas, existem 16 equivalentes possíveis para uma rede de duas portas. As quatro

formas mais importantes são descritas a seguir, com os modelos mostrados na figura 3.24. As outras podem ser obtidas com equivalentes Thévenin ou Norton nas duas portas, mantendo as variáveis controladoras.

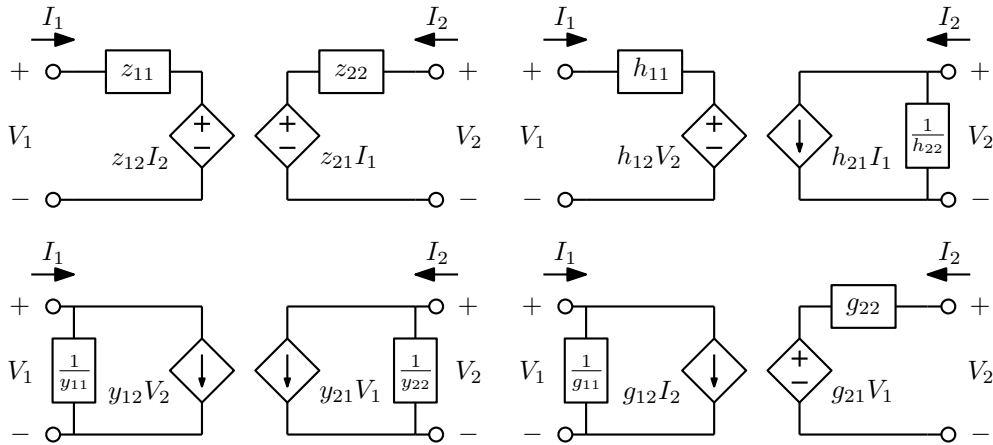


Figura 3.24: Redes de duas portas. Parâmetros Z e Y (esquerda), e parâmetros h e g (direita).

3.6.1 Parâmetros Z

São usados equivalentes Thévenin controlados a corrente nas duas portas $\vec{V} = [Z]\vec{I}$:

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ V_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{aligned}$$

3.6.2 Parâmetros Y

São usados equivalentes Norton controlados a tensão nas duas portas $\vec{I} = [Y]\vec{V}$:

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{aligned}$$

Notar que como $\vec{V} = [Z]\vec{I}$, $\vec{I} = [Z]^{-1}\vec{V}$, e então $[Y] = [Z]^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}$$

3.6.3 Parâmetros h e g

Os parâmetros “híbridos h ” são definidos como:

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{aligned}$$

e os parâmetros “híbridos g ” por:

$$\begin{aligned} I_1 &= g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\ V_2 &= g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \end{aligned}$$

As matrizes de parâmetros h e g são inversas uma da outra, $[g] = [h]^{-1}$. As estruturas dos modelos equivalentes, como mostrado na figura 3.24, são uma o inverso da outra também. Estes parâmetros são comuns em modelamento de pequenos sinais de dispositivos como transistores (o híbrido h) e amplificadores. Para um transistor bipolar na configuração de emissor comum (figura 3.25), é usual se escrever:

$$\begin{aligned} v_{be} &= h_{ie}i_b + h_{re}v_{ce} \\ c_c &= h_{fe}i_b + h_{oe}v_{ce} \end{aligned}$$

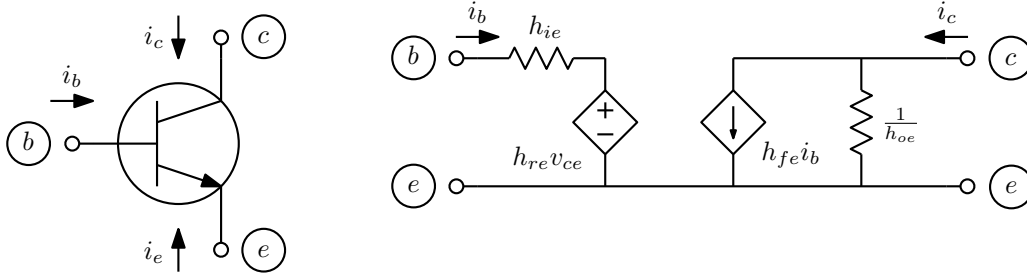


Figura 3.25: Modelo híbrido h para um transistor bipolar em emissor comum.

Para transistores usuais, h_{re} é pequeno e frequentemente h_{oe} é desprezível também, levando a um modelo simples com apenas h_{ie} e h_{fe} .

3.6.4 Teorema da reciprocidade

Considerando duas versões η e $\hat{\eta}$ de uma mesma rede de 2 portas e aplicando o teorema de Tellegen na forma cruzada, tem-se:

$$\begin{aligned} -v_1\hat{j}_1 - v_2\hat{j}_2 + \sum_{i=3}^b v_i\hat{j}_i &= 0 \\ -\hat{v}_1j_1 - \hat{v}_2j_2 + \sum_{i=3}^b \hat{v}_ij_i &= 0 \end{aligned}$$

Considere-se as redes lineares, invariantes no tempo, e compostas de impedâncias Z_i , de forma que $v_i = Z_ij_i$ e $\hat{v}_i = Z_i\hat{j}_i$. Tem-se então:

$$\begin{aligned} v_1\hat{j}_1 + v_2\hat{j}_2 &= \sum_{i=3}^b Z_ij_i\hat{j}_i \\ \hat{v}_1j_1 + \hat{v}_2j_2 &= \sum_{i=3}^b Z_i\hat{j}_ij_i \end{aligned}$$

E portanto, como a ordem do produto das correntes não importa, resulta uma igualdade que é a forma geral do “Teorema da Reciprocidade”:

$$v_1\hat{j}_1 + v_2\hat{j}_2 = \hat{v}_1j_1 + \hat{v}_2j_2$$

Os somatórios são também iguais se a rede contiver transformadores, ou grupos de fontes controladas ligadas de forma similar às que aparecem nos modelos de transformadores. Redes onde a igualdade

ocorre são chamadas de “redes recíprocas”. Todas as redes RLCM são recíprocas. Redes ativas, que contêm fontes controladas, usualmente não são. Uma rede ativa pode apresentar reciprocidade entre algumas portas e não apresentar entre outras. Casos assim ocorrem em circuitos ativos que simulam redes passivas, usando giradores e capacitores para simular indutores. Entre portas que também existem na rede protótipo passiva, a reciprocidade existe. Entre outras portas nem sempre. Sobre portas em dois lados de um girador não existe reciprocidade.

A forma geral gera três casos particularmente interessantes quando uma fonte de tensão ou corrente é aplicada a uma das portas e uma tensão ou corrente é medida na outra porta (ver figura 3.26):

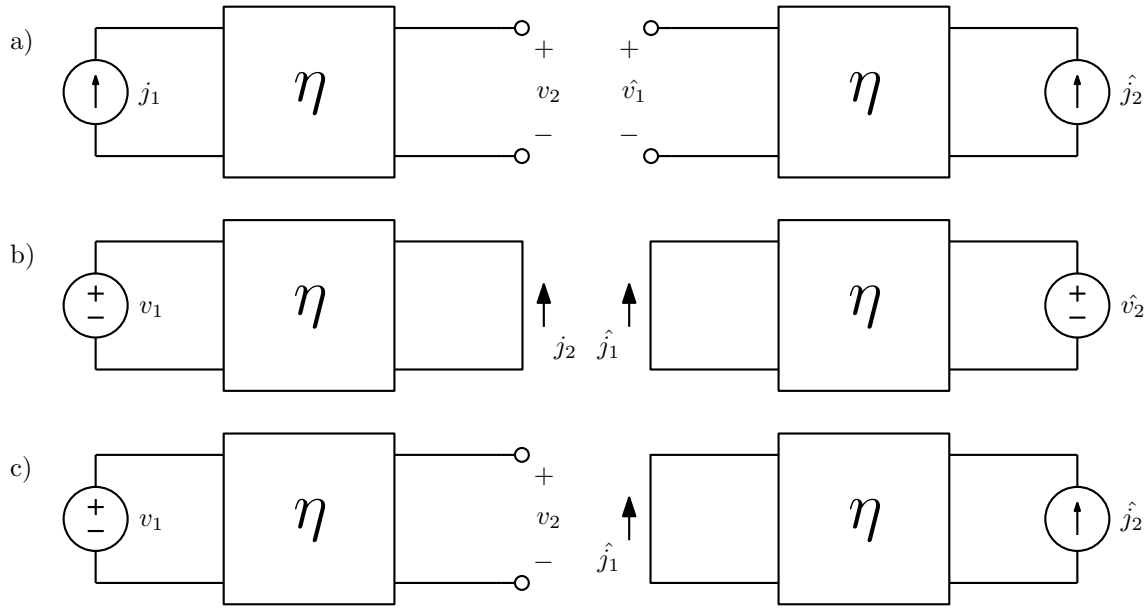


Figura 3.26: Os três casos básicos de reciprocidade. a) Transimpedâncias. b) Transcondutâncias. c) Ganho de tensão e ganho de corrente.

1. Se são aplicadas fontes de corrente j_1 e \hat{j}_2 e medidas tensões em aberto v_2 e \hat{v}_1 :

$$v_1 0 + v_2 \hat{j}_2 = \hat{v}_1 j_1 + \hat{v}_2 0$$

$$\frac{v_2}{\hat{j}_2} = \frac{\hat{v}_1}{j_1} \Rightarrow z_{21} = z_{12}$$

2. Se são aplicadas fontes de tensão v_1 e \hat{v}_2 e medidas correntes em curto-circuito j_2 e \hat{j}_1 :

$$v_1 \hat{j}_1 + 0 \hat{j}_2 = 0 j_1 + \hat{v}_2 j_2$$

$$\frac{\hat{j}_2}{v_1} = \frac{\hat{j}_1}{\hat{v}_2} \Rightarrow y_{21} = y_{12}$$

3. Se é aplicada a tensão v_1 e medida a tensão v_2 em aberto, e aplicada a corrente \hat{j}_2 e medida a corrente \hat{j}_1 em curto-circuito:

$$v_1 \hat{j}_1 + v_2 \hat{j}_2 = 0 j_1 + \hat{v}_2 0$$

$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{\hat{j}_1}{\hat{j}_2} \Rightarrow g_{21} = -g_{12}$$

Analogamente, invertendo as portas, tem-se o mesmo caso:

$$v_1 \hat{j}_1 + v_2 \hat{j}_2 = \hat{v}_1 0 + 0 \hat{j}_2$$

$$\frac{\hat{j}_2}{\hat{j}_1} = -\frac{\hat{v}_1}{\hat{v}_2} \Rightarrow h_{21} = -h_{12}$$

Assim, o teorema da reciprocidade diz que entre duas portas abertas em uma rede recíproca, transimpedâncias são iguais, transadmitâncias são iguais, e o ganho de tensão para um lado é o negativo do ganho de corrente para o outro.

Exemplo: Seja o caso mostrado na figura 3.27. A partir das medidas na rede resistiva linear η mostradas nos casos (a) e (b), deseja-se calcular as duas correntes indicadas no terceiro caso (c). Uma forma de solucionar o problema é achando primeiro o equivalente Thévenin da rede como vista pelo resistor, que tem uma fonte controlada de tensão, pois a fonte tem que ser linearmente proporcional à única fonte independente no circuito. Os modelos necessários são mostrados na figura 3.28. As medidas resultam no modelos (a) e (b), e nas equações:

$$0.2 = \frac{K}{R + 1}; \quad 2 = \frac{14K}{R + 2}$$

Resolvendo para K e R vem $K = 1/2$ e $R = 3/2 \Omega$. A corrente i_1 é obtida imediatamente a partir do modelo (c) como $i_1 = 10/R = 20/3$ A. A corrente i_2 é obtida pela aplicação direta do teorema da reciprocidade no caso de transcondutâncias nos modelos (d) e (e), resultando em $i_2 = i_x = 10K/R = 10/3$ A.

O mesmo problema pode ser resolvido apenas por reciprocidade. Considere-se os modelos mostrados na figura 3.29, onde o resistor nos circuitos medidos é incorporado à rede η . Como os ganhos de transcondutância são iguais, são obtidas duas equações:

$$\frac{1/5}{1} = \frac{i_2}{10 + i_1} \quad \frac{2}{14} = \frac{i_2}{10 + 2i_2}$$

Resolvendo o sistema de equações para i_1 e i_2 vem o mesmo resultado anterior.

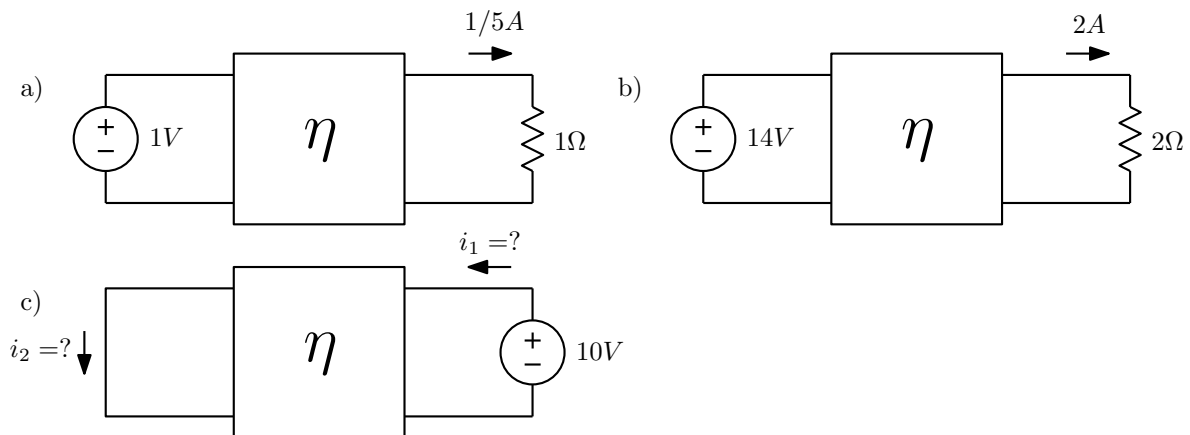


Figura 3.27: Conhecendo as medidas a) e b) na rede η , deseja-se calcular i_1 e i_2 na configuração c).

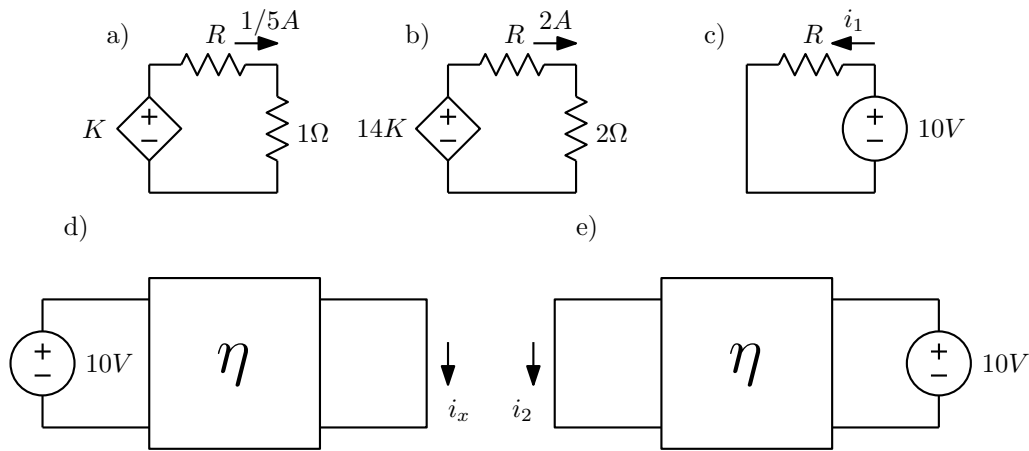


Figura 3.28: Solução usando equivalentes Thévenin e reciprocidade.

3.6.5 Parâmetros ABCD

Uma representação um pouco diferente para redes de duas portas são os “parâmetros de transmissão”, ou parâmetros ABCD. São definidos na forma:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

O motivo desta formulação é que para sistemas de redes de duas portas em cascata fica simples a obtenção da matriz de transmissão de todo o sistema, que é simplesmente o produto de todas as matrizes. Sejam n redes:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [T_1] \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = [T_1][T_2] \begin{bmatrix} V_3 \\ -I_3 \end{bmatrix} = \dots = [T_1] \dots [T_n] \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ -I_{n+1} \end{bmatrix}$$

Os parâmetros de transmissão tem as seguintes interpretações:

$A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}$, inverso do ganho de tensão.

$B = \frac{V_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0}$, inverso da transcondutância.

$C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}$, inverso da transresistência.

$D = \frac{I_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0}$, inverso do ganho de corrente.

Note-se que a transcondutância e o ganho de corrente são considerados com a corrente na saída “saíndo”. Estes parâmetros podem ser usados na análise de redes em escada. Um ramo série com impedância Z tem a representação:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Um ramo em paralelo de impedância Z tem a representação:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Um circuito em L , com um ramo em série seguido de outro em paralelo, com impedâncias Z_1 e Z_2 tem então a representação:

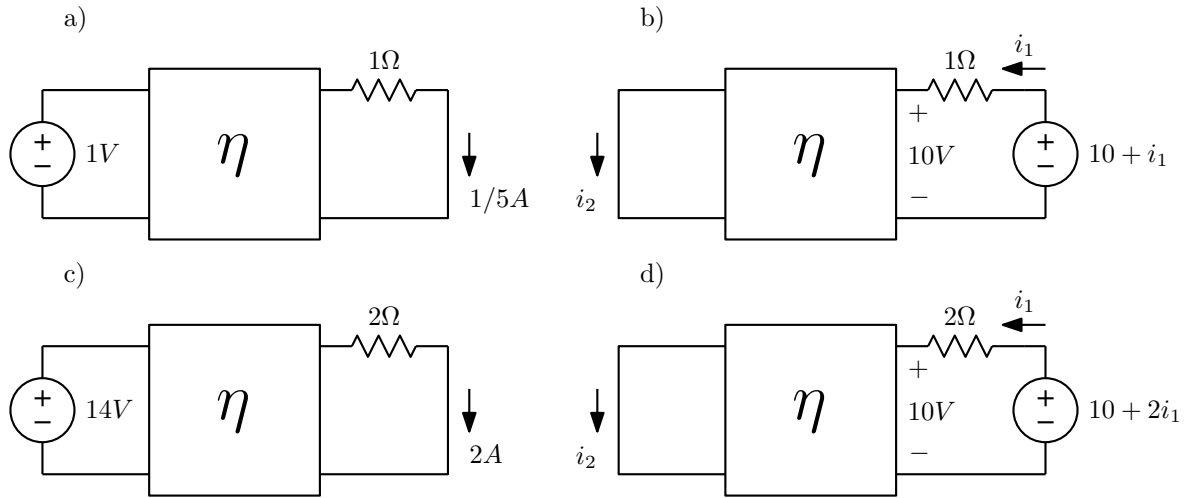


Figura 3.29: Solução usando reciprocidade apenas.

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix}$$

Como as operações necessárias envolvem apenas multiplicações e somas, o método é conveniente para análise algébrica ou semi-algébrica de circuitos lineares, embora não seja necessariamente a forma mais eficiente para isto. É uma forma simples para uso em programas de cálculo algébrico, e é também muito simples calcular respostas em frequência de filtros em escada por este meio.

Exemplo: Seja calcular a função de transferência de tensão da rede da figura 3.23. A rede pode ser decomposta em elementos em série e em paralelo ou em circuitos em L diretamente:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{sC_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & sL_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ sC_4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{sC_1R_2} & \frac{1}{sC_1} \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + s^2L_3C_4 & sL_3 \\ sC_4 & 1 \end{bmatrix}$$

A última multiplicação produz a matriz de transmissão da rede completa:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_1R_2L_3C_4s^3 + L_3C_4s^2 + R_2(C_1 + C_4)s + 1}{C_1R_2s} & \frac{C_1R_2L_3s^2 + L_3s + R_2}{C_1R_2s} \\ \frac{L_3C_4s^2 + R_2C_4 + 1}{R_2} & \frac{L_3s + R_2}{R_2} \end{bmatrix}$$

O ganho de tensão desejado é então:

$$\frac{V_2}{V_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{1}{A} = \frac{C_1R_2s}{C_1R_2L_3C_4s^3 + L_3C_4s^2 + R_2(C_1 + C_4)s + 1}$$

Notar que as expressões para B e C são de grau menor pois o quarto ramo é visto em curto. A expressão para o termo C ficou ainda mais simples, pois o primeiro ramo está em série com uma fonte de corrente.

Capítulo 4

Síntese de circuitos passivos

4.1 Propriedades das impedâncias e admitâncias RLCM

IMPEDÂNCIAS ou admitâncias, ou, usando apenas um termo, “imitâncias”, formam um caso particular do caso das funções de transferência em circuitos lineares invariantes no tempo. O caso geral das imitâncias RLCM, em transformadas de Laplace, tem as seguintes propriedades:

- São razões de polinômios reais de s , com coeficientes positivos.
- Os polinômios do numerador e do denominador tem todas as raízes no semiplano lateral esquerdo, reais ou em pares complexos conjugados ou no eixo imaginário, em zero ou em pares conjugados. Raízes no eixo imaginário são simples. Isto é consequência de que respostas transientes à entrada zero não podem conter exponenciais crescentes, e, no caso de frequências naturais no eixo imaginário ou em zero, não podem conter multiplicações por potências do tempo. Isto tem que valer tanto para impedâncias quanto para admitâncias, ou seja, a rede tem que ser estável com os terminais em aberto ou em curto.
- A diferença de graus entre numerador ou denominador deve ser de $+1$, 0 ou -1 , conforme o comportamento em alta frequência da imitância, que pode ser indutiva, capacitiva ou resistiva, e não mais complicada que isto.
- A parte real da imitância para $s = j\omega$ tem que ser sempre positiva ou nula. Isto é requerido pela passividade da rede, já que parte real negativa geraria potência.

Como se verá adiante, satisfeitas estas condições sempre há formas para se obter a rede que realiza a imitância. Os casos mais simples são as redes compostas de 2 elementos, LC, RC e RL.

4.1.1 Imitâncias LC

Quando existem apenas indutores e capacitores, ocorrem as seguintes particularidades nas imitâncias:

- São razões de polinômios de s , sempre na forma de polinômios par/ímpar ou ímpar/par, com coeficientes positivos. Isto ocorre devido à existência de um polo ou um zero simples em zero, já que a imitância não pode ser resistiva em $s = 0$, e da posição dos outros polos e zeros.
- As frequências naturais da rede em aberto e em curto, e portanto os polos e os zeros da imitância, ficam restritas a estarem no eixo imaginário, em pares conjugados, ou em zero, todas simples.

- A diferença de graus entre numerador e denominador é sempre de +1 ou -1, pois a rede só pode ser indutiva ou capacitiva em alta frequência.
- A parte real da imitância para para $s = j\omega$ é nula.
- As mesmas propriedades valem para impedâncias e admitâncias, pois o dual de uma rede LC é também uma rede LC.

Há ainda outra restrição: Tomando-se, por exemplo, a impedância, a reatância vale:

$$X(\omega) = \frac{Z(j\omega)}{j}$$

Expandindo a impedância em frações parciais, obtém-se:

$$Z(s) = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \sum_i \left(\frac{k_i}{s + j\omega_i} + \frac{k_i}{s - j\omega_i} \right)$$

$$Z(s) = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \sum_i \frac{2k_i s}{s^2 + \omega_{pi}^2}$$

Observe-se que cada termo da expansão corresponde a um polo, ou a um par deles, e domina sobre os demais quando está na vizinhança do polo. Como a rede tem que se comportar sempre como composta de elementos positivos, nota-se que k_∞ e k_0 tem que ser positivos ou nulos, para que a rede se comporte como indutor positivo em alta frequência e capacitor positivo em baixa frequência, respectivamente. Os termos no somatório correspondem a circuitos tanque paralelos LC, e para que os elementos sejam positivos, os k_i também devem ser todos positivos.

A reatância vale portanto:

$$X(\omega) = k_\infty \omega - \frac{k_0}{\omega} + \sum_i \frac{2k_i \omega}{-\omega^2 + \omega_{pi}^2}$$

A derivada desta função é sempre positiva, e como ela tem polos em que o valor de $X(\omega)$ é positivo para ω menor e negativo para ω maior que a frequência do polo, obrigatoriamente existem zeros entre os polos, incluindo zero no infinito se não há polo no infinito. Os polos e zeros de $X(\omega)$ então se alternam no eixo real, como no exemplo da figura 4.1, e os polos e zeros de $Z(s)$ se alternam no eixo imaginário. Não podem existir dois polos sucessivos sem um zero entre eles, nem dois zeros sucessivos sem um polo entre eles. A regra para admitâncias LC é a mesma.

4.1.1.1 Realização de imitâncias LC

A discussão anterior já apresenta uma possível realização, através da expansão em frações parciais da impedância. O mesmo pode ser feito com a admitância. Estas formas de realização são chamadas “formas de Foster”. São “formas canônicas”, que usam o mínimo número de componentes.

Primeira forma de Foster LC: Expansão em frações parciais de $Z(s)$

$$Z_{LC}(s) = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \sum_i \frac{2k_i s}{s^2 + \omega_{pi}^2}$$

Segunda forma de Foster LC: Expansão em frações parciais de $Y(s)$

$$Y_{LC}(s) = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \sum_i \frac{2k_i s}{s^2 + \omega_{pi}^2}$$

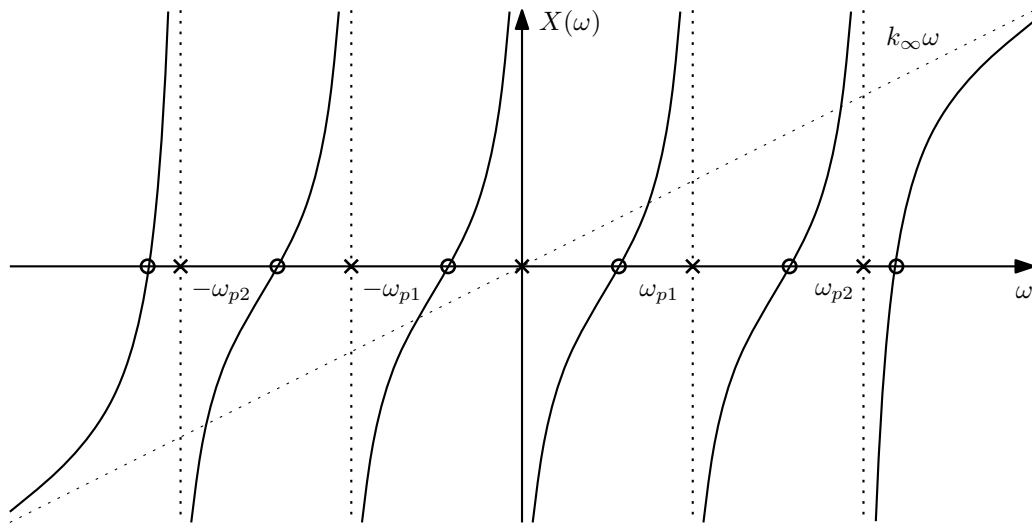


Figura 4.1: Reatância LC, no caso para polos em $0, \infty, \pm j\omega_{p1}$ e $\pm j\omega_{p2}$.

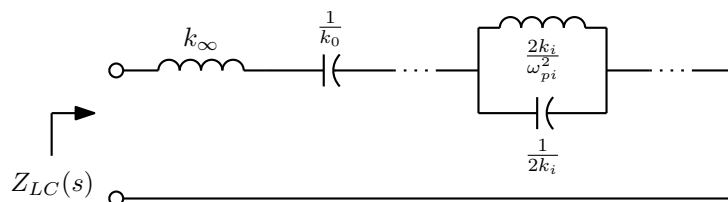


Figura 4.2: Primeira forma de Foster LC.

Note-se que as expansões podem ser feitas de forma parcial. Cada termo da expansão em frações parciais realiza um polo, ou um par conjugado deles. A subtração destes termos da função original resulta em uma nova função, de menor ordem, que não tem mais os polos correspondentes. Subtrações de termos da expansão da função original são então chamadas de “extrações completas de polos”. Formas em escada podem ser obtidas pela alternância de extração de polos de impedância e de admitância. As formas mais simples são as “formas de Cauer”, que são também canônicas:

Primeira forma de Cauer LC: Alternância entre extração do polo no infinito da impedância e da admitância.

A estrutura pode ser obtida pela identificação da rede com uma expansão em fração contínua:

$$Z_{LC}(s) = k_\infty s + \frac{1}{k'_\infty s + \frac{1}{k''_\infty s + \frac{1}{\dots}}}$$

Se $Z(s)$ não tem polo no infinito, começa-se a expansão com o inverso, $Y(s)$, que tem, e a expansão se inicia por um capacitor em paralelo.

Segunda forma de Cauer LC: Alternância entre extração do polo na origem da impedância e da admitância.

Também existe a identificação com uma expansão em fração contínua:

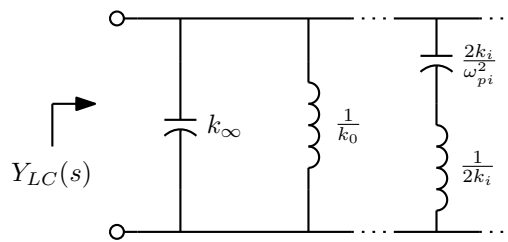


Figura 4.3: Segunda forma de Foster LC.

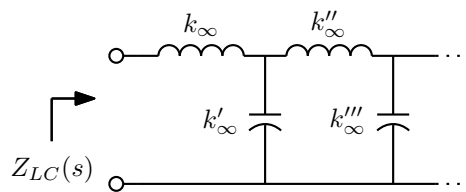


Figura 4.4: Primeira forma de Cauer LC.

$$Z_{LC}(s) = \frac{k_0}{s} + \frac{1}{\frac{k'_0}{s} + \frac{1}{\frac{k''_0}{s} + \frac{1}{\dots}}}$$

Também aqui, se $Z(s)$ não tem polo em zero, inicia-se a expansão por $Y(s)$, que tem, e a expansão se inicia por um indutor em paralelo.

Exemplo: Seja realizar a impedância normalizada:

$$Z(s) = \frac{(s^2 + 1)(s^2 + 3)}{s(s^2 + 2)} = \frac{s^4 + 4s^2 + 3}{s^3 + 2s}$$

A realização na primeira forma de Foster vem da expansão em frações parciais:

$$Z(s) = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \frac{2k_1 s}{s^2 + 2} = s + \frac{3}{s} + \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + 2}$$

onde os resíduos da expansão foram calculados como:

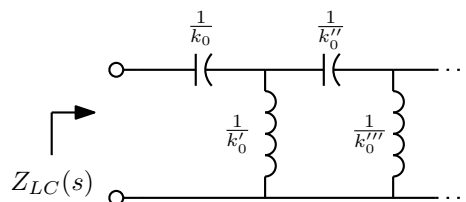


Figura 4.5: Segunda forma de Cauer LC.

$$k_\infty = \left. \frac{Z(s)}{s} \right|_{s \rightarrow \infty} = 1; \quad k_0 = sZ(s)|_{s=0} = \frac{3}{2}; \quad 2k_1 = \left. \frac{s^2+2}{s} Z(s) \right|_{s^2=-2} = \frac{1}{2}$$

A realização na segunda forma de Foster vem da expansão em frações parciais da admitância:

$$Y(s) = \frac{s^3 + 2s}{(s^2 + 1)(s^2 + 3)} = \frac{2k_1 s}{s^2 + 1} + \frac{2k_2 s}{s^2 + 3} = \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + 1} + \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + 3}$$

onde os resíduos da expansão foram calculados como:

$$2k_1 = \left. \frac{s^2 + 1}{s} Y(s) \right|_{s^2=-1} = \frac{1}{2}; \quad 2k_2 = \left. \frac{s^2 + 3}{s} Y(s) \right|_{s^2=-3} = \frac{1}{2}$$

A primeira forma de Cauer vem da expansão em fração contínua de $Z(s)$ na forma normal, já que $Z(s)$ tem polo no infinito, e a segunda forma de Cauer da expansão em fração contínua com os polinômios invertidos, já que $Z(s)$ tem polo em zero. A figura 4.8 mostra as quatro realizações, todas diferentes. As realizações podem ser verificadas observando-se que em todas elas a indutância vista em alta frequência vale $k_\infty = 1$ H e a capacitância vista em baixa frequência vale $\frac{1}{k_0} = \frac{2}{3}$ F.

$$\begin{array}{r} s^4 + 4s^2 + 3 \quad \left| \begin{array}{l} s^3 + 2s \\ s \end{array} \right. \\ \hline -s^4 - 2s^2 \\ \hline s^3 + 2s \quad \left| \begin{array}{l} 2s^2 + 3 \\ \frac{1}{2}s \end{array} \right. \\ \hline -s^3 - \frac{3}{2}s \\ \hline 2s^2 + 3 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}s \\ 4s \end{array} \right. \\ \hline -2s \\ \hline \frac{1}{2}s \quad \left| \begin{array}{l} 3 \\ \frac{1}{6}s \end{array} \right. \\ \hline -\frac{1}{2}s \\ \hline 0 \end{array}$$

Figura 4.6: Expansão na primeira forma de Cauer para $Z(s) = \frac{s^4+4s^2+3}{s^3+2s}$.

$$\begin{array}{r} 3 + 4s^2 + s^4 \quad \left| \begin{array}{l} 2s + s^3 \\ \frac{3}{2s} \end{array} \right. \\ \hline -3 - \frac{3}{2}s^2 \\ \hline 2s + s^3 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{5}{2}s^2 + s^4 \\ \frac{4}{5s} \end{array} \right. \\ \hline -2s - \frac{4}{5}s^3 \\ \hline \frac{5}{2}s^2 + s^4 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{5}s^3 \\ \frac{25}{2s} \end{array} \right. \\ \hline -\frac{5}{2}s^2 \\ \hline \frac{1}{5}s^3 \quad \left| \begin{array}{l} s^4 \\ \frac{1}{5s} \end{array} \right. \\ \hline -\frac{1}{5}s^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

Figura 4.7: Expansão na segunda forma de Cauer para $Z(s) = \frac{s^4+4s^2+3}{s^3+2s}$.

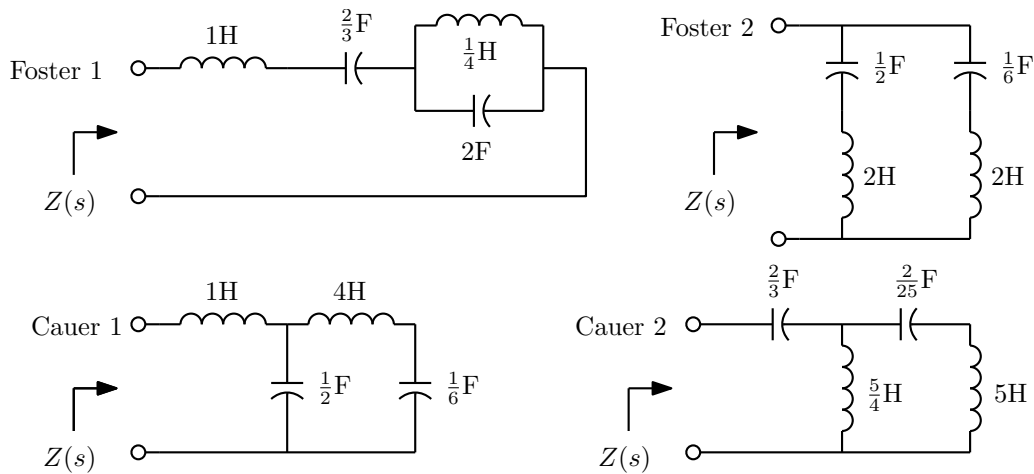


Figura 4.8: Formas de Foster e Cauer para $Z(s) = \frac{s^4+4s^2+3}{s^3+2s}$.

4.1.2 Imitâncias RC e RL

Para gerar uma impedância RC, pode-se transformar uma já conhecida impedância LC, dividindo a impedância por s e trocando os resultantes s^2 por s . Os termos correspondentes aos polos imaginários passam a se referir a polos reais, no semieixo real negativo.

$$Z_{LC}(s) = k_{\infty}s + \frac{k_0}{s} + \sum_i \frac{2k_i s}{s^2 + \omega_{pi}^2}$$

$$Z_{RC}(s) = k_{\infty} + \frac{k_0}{s} + \sum_i \frac{k'_i}{s + p_i}$$

Observa-se então as propriedades de $Z_{RC}(s)$:

- É constante ou nula no infinito.
- É infinita ou constante em frequência zero.
- É uma razão de polinômios completos de s , a menos de possível falta do termo constante no denominador, e o grau do denominador é igual a ou um grau maior que o grau do numerador.
- Os polos e zeros se alternam no semieixo real negativo. A singularidade de mais baixa frequência é um polo, que pode estar na origem.
- $|Z(j(\omega))|$ cai monotonicamente com a frequência, pois as impedâncias dos capacitores diminuem com a frequência.

Para gerar uma impedância RL, pode-se também transformar uma impedância LC, mas multiplicando a impedância por s e trocando os resultantes s^2 por s . Os polos imaginários novamente se convertem em polos no semieixo real negativo.

$$Z_{LC}(s) = k_{\infty}s + \frac{k_0}{s} + \sum_i \frac{2k_i s}{s^2 + \omega_{p_i}^2}$$

$$Z_{RL}(s) = k_{\infty}s + k_0 + \sum_i \frac{k'_i s}{s + p_i}$$

As propriedades de $Z_{RL}(s)$ são então:

- É constante ou infinita no infinito.
- É nula ou constante em frequência zero.
- É uma razão de polinômios completos de s , a menos de possível falta do termo constante no numerador, e o grau do denominador é igual a ou um grau menor que o grau do numerador.
- Os polos e zeros se alternam no semieixo real negativo. A singularidade de mais baixa frequência é um zero, que pode estar na origem.
- $|Z(j(\omega))|$ aumenta monotonicamente com a frequência, pois as impedâncias dos indutores aumentam com a frequência.

Para gerar uma admitância RC a partir de uma admitância LC, o procedimento é idêntico ao usado para gerar uma impedância RL, e para gerar uma admitância RL, o procedimento é idêntico ao usado para gerar uma impedância RC. Conclui-se então que admitâncias RC tem as mesmas propriedades das impedâncias RL, e que admitâncias RL tem as mesmas propriedades das impedâncias RC. Isto decorre naturalmente da dualidade, pois o dual de uma rede RC é uma rede RL. No caso das redes LC as propriedades de impedâncias e admitâncias são idênticas pois o dual de uma rede LC é uma rede LC também.

4.1.2.1 Realização de imitâncias RC e RL

Como acontece com as formas LC, também se pode definir as quatro formas canônicas, de Foster e de Cauer.

Primeira forma de Foster RC: Expansão em frações parciais de $Z(s)$:

$$Z_{RC}(s) = k_{\infty} + \frac{k_0}{s} + \sum_i \frac{k_i}{s + p_i}$$

Segunda forma de Foster RC: Expansão em frações parciais de $Y(s)$:

$$Y_{RC}(s) = k_{\infty}s + k_0 + \sum_i \frac{k_i s}{s + p_i}$$

Primeira forma de Cauer RC: Alternância entre extração da constante no infinito de $Z(s)$ e do polo no infinito de $Y(s)$.

$$Z_{RC}(s) = k_{\infty} + \frac{1}{k'_{\infty}s + \frac{1}{k''_{\infty} + \dots}}$$

Se $Z(s)$ não tem constante no infinito, começa-se a expansão por $Y(s)$, que tem polo no infinito, e a expansão se inicia por um capacitor em paralelo.

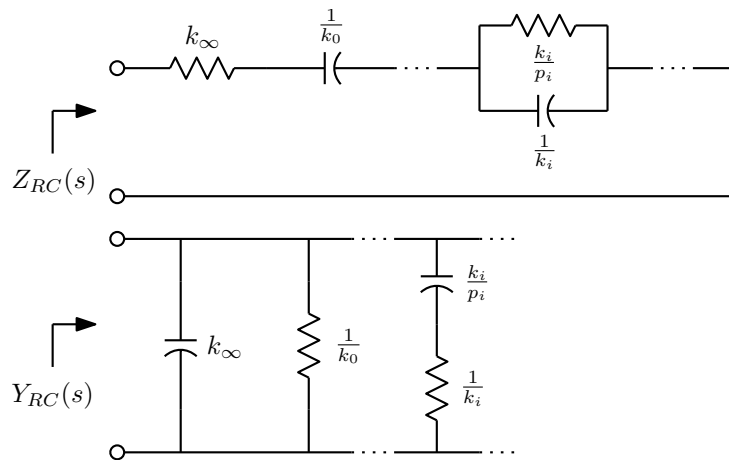


Figura 4.9: Formas de Foster RC.

Segunda forma de Cauer RC: Alternância entre extração do polo na origem de $Z(s)$ e da constante na origem de $Y(s)$.

$$Z_{RC}(s) = \frac{k_0}{s} + \frac{1}{k'_0 + \frac{1}{\frac{k''_0}{s} + \dots}}$$

Se $Z(s)$ não tem polo na origem, começa-se a expansão por $Y(s)$, que tem constante na origem, e a expansão se inicia com um resistor em paralelo.

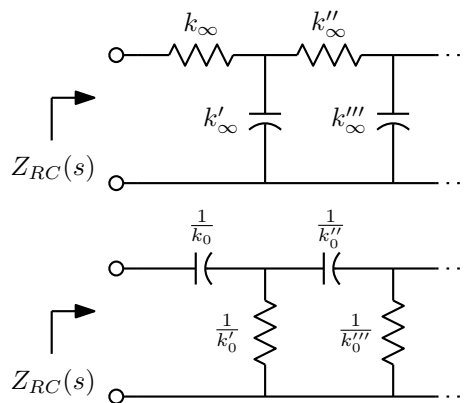


Figura 4.10: Formas de Cauer RC.

Primeira forma de Foster RL: Expansão em frações parciais de $Z(s)$:

$$Z_{RL}(s) = k_\infty s + k_0 + \sum_i \frac{k_i s}{s + p_i}$$

Segunda forma de Foster RL: Expansão em frações parciais de $Y(s)$:

$$Y_{RL}(s) = k_{\infty} + \frac{k_0}{s} + \sum_i \frac{k_i}{s + p_i}$$

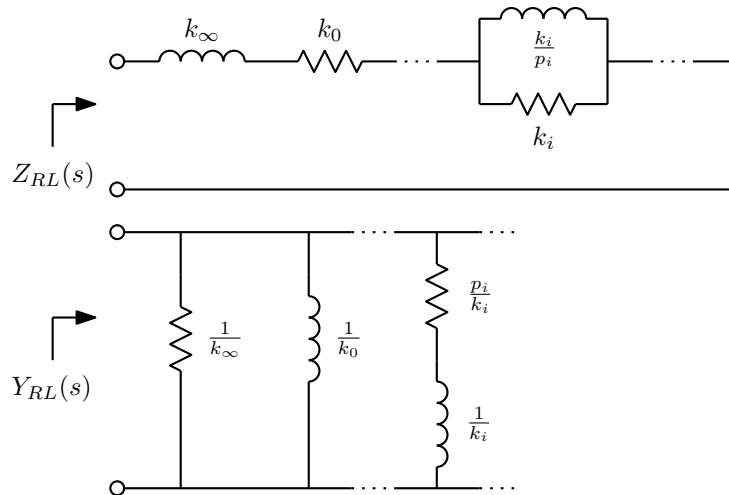


Figura 4.11: Formas de Foster RL.

Primeira forma de Cauer RL: Alternância entre extração do polo no infinito de $Z(s)$ e da constante no infinito de $Y(s)$.

$$Z_{RL}(s) = k_{\infty}s + \frac{1}{k'_{\infty} + \frac{1}{k''_{\infty}s + \dots}}$$

Se $Z(s)$ não tem polo no infinito, começa-se a expansão por $Y(s)$, que tem constante infinito, e a expansão se inicia por um resistor em paralelo.

Segunda forma de Cauer RL: Alternância entre extração da constante na origem de $Z(s)$ e do polo na origem de $Y(s)$.

$$Z_{RL}(s) = k_0 + \frac{1}{\frac{k'_0}{s} + \frac{1}{k''_0 + \dots}}$$

Se $Z(s)$ não tem constante na origem, começa-se a expansão por $Y(s)$, que tem polo na origem, e a expansão se inicia com um indutor em paralelo.

Exemplo: Seja realizar a impedância normalizada que tem a característica de módulo mostrada na figura 4.13. Ela tem polos reais em $s = -1$ e $s = -5$, zero real em $s = -2$ e constante multiplicativa de $\frac{5}{2}$ para que a impedância em baixa frequência seja de 1Ω . Como tem como primeira singularidade um polo, e polos e zeros estão alternados, admite uma realização RC. As primeira e segunda formas de Foster são obtidas como:

$$Z(s) = \frac{2.5(s+2)}{(s+1)(s+5)} = \frac{\frac{5}{8}}{s+1} + \frac{\frac{15}{8}}{s+5}$$

$$Y(s) = \frac{(s+1)(s+5)}{2.5(s+2)} = \frac{2}{5}s + 1 + \frac{\frac{3}{5}s}{s+2}$$

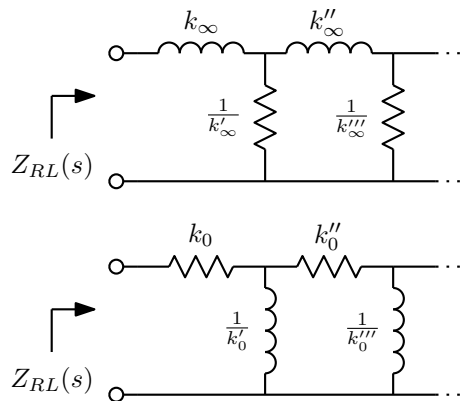


Figura 4.12: Formas de Cauer RL.



Figura 4.13: Módulo de uma impedância a realizar. Plotado também o digrama de Bode correspondente.

As primeira e segunda formas de Cauer vem das expansões em fração contínua mostradas na figura 4.14.

As realizações correspondentes são mostradas na figura 4.15. Como verificação, pode-se notar que a resistência vista em baixa frequência é de 1Ω , e que a capacitância vista em alta frequência vale $\frac{2}{5} F$.

Se a mesma função fosse uma admitância, seria então RL, com as realizações mostradas na figura 4.16. Os cálculos são idênticos aos feitos para impedância RC, com as realizações tomando formas duais às da figura 4.15. Notar que o dual de uma estrutura na primeira forma de Foster fica na segunda forma, e vice-versa. Os duais das formas de Cauer continuam nas mesmas formas.

Exemplo: A síntese de admitâncias RC e RL, pode ser aplicada em síntese de funções de transferência de redes em escada “não terminadas” realizando filtros simples bastante úteis, desde que todos os polos da função de transferência sejam reais. É simples obter zeros de transmissão em zero e no infinito. Seja realizar a função de transferência normalizada:

$$\begin{array}{r}
 s^2 + 6s + 5 \left| \frac{5}{2}s + 5 \right. \\
 \hline
 -s^2 - 2s \qquad \frac{2}{5}s \\
 \hline
 \frac{5}{2}s + 5 \left| \frac{4s + 5}{\frac{5}{8}} \right. \\
 \hline
 -\frac{5}{2}s - \frac{25}{8} \qquad \frac{5}{8} \\
 \hline
 4s + 5 \left| \frac{15}{8} \right. \\
 \hline
 -4s \qquad \frac{32}{15}s \\
 \hline
 \frac{15}{8} \left| \frac{5}{\frac{3}{8}} \right. \\
 \hline
 -\frac{15}{8} \qquad \frac{3}{8} \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 5 + 6s + s^2 \left| 5 + \frac{5}{2}s \right. \\
 \hline
 -5 - \frac{5}{2}s \qquad 1 \\
 \hline
 5 + \frac{5}{2}s \left| \frac{7}{2}s + s^2 \right. \\
 \hline
 -5 - \frac{10}{7}s \qquad \frac{10}{7s} \\
 \hline
 \frac{7}{2}s + s^2 \left| \frac{15}{14}s \right. \\
 \hline
 -\frac{7}{2}s \qquad \frac{49}{15} \\
 \hline
 \frac{15}{14}s \left| \frac{s^2}{\frac{15}{14s}} \right. \\
 \hline
 -\frac{15}{14}s \qquad \frac{15}{14s} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Figura 4.14: Expansões em fração contínua de $Z(s) = \frac{2.5(s+2)}{(s+1)(s+5)}$ nas duas formas de Cauer.

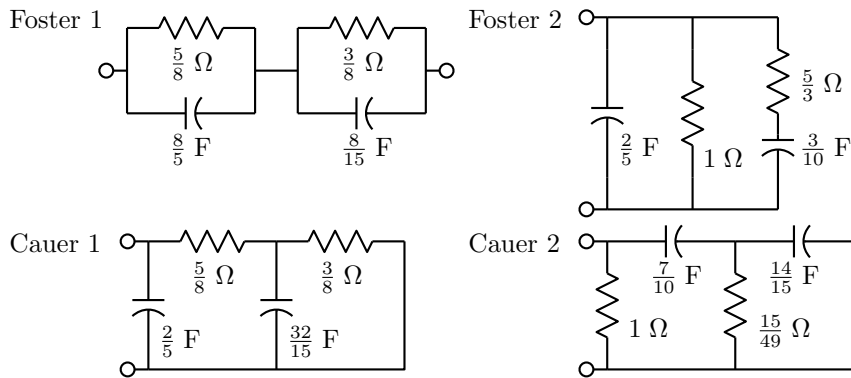


Figura 4.15: Realizações da impedância RC $Z(s) = \frac{2.5(s+2)}{(s+1)(s+5)}$ nas formas de Foster e Cauer.

$$\frac{V_o}{V_{in}(s)} = \frac{ks}{(s+1)(s+2)}$$

Uma rede que pode realizar a função é mostrada abaixo. Ela realiza dois polos, reais pois é uma rede RC, um zero em zero e um zero no infinito.

Analisando a rede como uma rede de 2 portas por parâmetros Z, considerando que a porta de saída está sem carga, vem:

$$\begin{aligned}
 V_{in} &= z_{11}I_{in} + z_{12} 0 \\
 V_o &= z_{21}I_{in} + z_{22} 0
 \end{aligned}$$

E, considerando que os parâmetros Z tem o mesmo denominador, a menos de cancelamentos:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{z_{21}}{z_{11}} = \frac{N_{21}/D}{N_{11}/D} = \frac{N_{21}}{N_{11}}$$

O numerador de z_{11} é então conhecido. Resta determinar um denominador adequado, sabendo que os polos e zeros de z_{11} devem se alternar no semieixo real negativo, e que a singularidade de mais baixa frequência é um polo, que pode estar na origem. A estrutura já indica que z_{11} tem polo na origem, devido

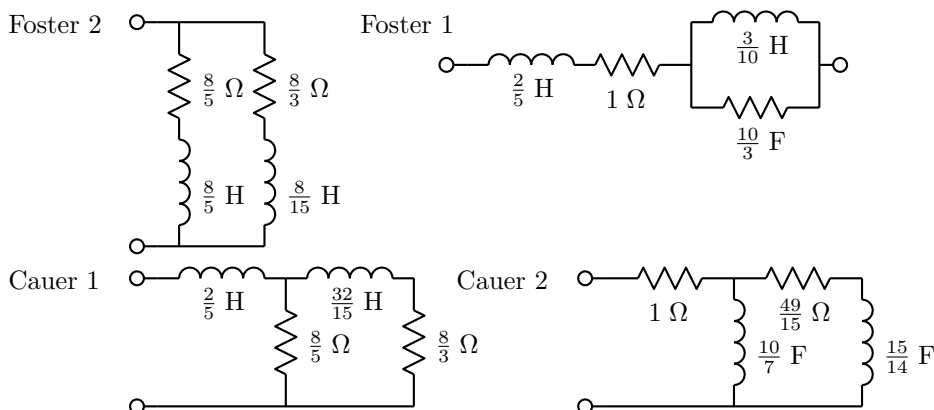


Figura 4.16: Realizações da admitância RL $Y(s) = \frac{2.5(s+2)}{(s+1)(s+5)}$ nas formas de Foster e Cauer.

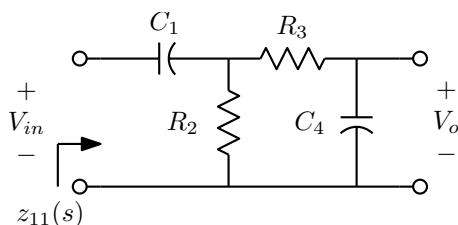


Figura 4.17: Possível estrutura para o filtro RC.

ao bloqueio de corrente contínua pelos capacitores. O outro polo deve ficar em alguma posição entre -1 e -2 . Seja em -1.5 .

$$z_{11}(s) = \alpha \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+1.5)} = \alpha \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 1.5s}$$

O fator α define o nível de impedância do circuito, que pode ser ajustado como conveniente após a síntese. Seja $\alpha = 1$ por enquanto. A estrutura da rede é a da segunda forma de Cauer, com a saída tomada sobre o segundo capacitor, para a realização correta dos zeros. A expansão de z_{11} em fração contínua nesta forma é mostrada na figura 4.18.

A rede obtida é então a da figura 4.19.

A função de transferência realizada foi¹:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{\frac{5}{3}s}{s^2 + 3s + 2}$$

Uma outra forma de resolver o mesmo problema é expandir a rede na primeira forma de Cauer e então trocar as posições dos dois primeiros elementos. Isto dá certo porque as frequências naturais da rede não são alteradas pela operação, pois assume-se uma fonte de tensão na entrada, e os zeros são realizados corretamente. A rede obtida é diferente da anterior porque o polo de z_{11} na rede final não está mais em -1.5 , e há uma mudança no nível de impedância.

¹Basta ver que o limite em alta frequência da função $\frac{ks}{(s+P_1)(s+P_2)}$ vale $\frac{k}{s}$, que a partir da figura 4.17 vale $\frac{1}{sR_3C_4}$, e então $k = \frac{1}{R_3C_4}$. Também é possível observar o comportamento em baixa frequência, obtendo $\frac{ks}{P_1P_2} = sC_1R_2$ e $k = C_1R_2P_1P_2$.

$$\begin{array}{r}
 2 + 3s + s^2 \left| \frac{\frac{3}{2}s + s^2}{\frac{4}{3s}} \right. \\
 \hline
 -2 - \frac{4}{3}s \\
 \frac{\frac{3}{2}s + s^2}{\frac{4}{3s}} \left| \frac{\frac{5}{3}s + s^2}{\frac{9}{10}} \right. \\
 \hline
 -\frac{3}{2}s - \frac{9}{10}s^2 \\
 \frac{\frac{5}{3}s + s^2}{\frac{4}{3s}} \left| \frac{\frac{1}{10}s^2}{\frac{50}{3s}} \right. \\
 \hline
 -\frac{5}{3}s \\
 \frac{\frac{1}{10}s^2}{\frac{4}{3s}} \left| \frac{s^2}{\frac{1}{10}} \right. \\
 \hline
 -\frac{1}{10}s^2 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Figura 4.18: Expansão em fração contínua na segunda forma de Cauer RC.

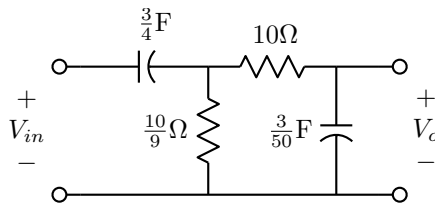


Figura 4.19: Estrutura obtida para o filtro RC.

A expansão de z_{11} em fração contínua, na primeira forma de Cauer, é mostrada na figura 4.20.

A rede alternativa obtida é então a da figura 4.21.

Em uma análise como no caso anterior mostra que a função de transferência realizada foi:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{\frac{4}{3}s}{s^2 + 3s + 2}$$

z_{11} com esta estrutura, que é diferente do do caso anterior, vale:

$$z_{11}(s) = 0.9 \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 1.2s}$$

É possível também obter duas outras redes trocando as posições dos capacitores e resistores nas duas seções das redes. Isto dá certo pois as frequências naturais não são alteradas, e os zeros ficam nas posições certas. A mesma técnica se aplica a realização de funções de transferência de redes LC, mas estes filtros não terminados não são tão úteis.

É interessante ver o que acontece quando a posição do polo colocado entre os dois zeros é modificada. Seja realizar a síntese do caso geral passa-faixa, com a função de transferência:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{ks}{(s + Z_1)(s + Z_2)}$$

A impedância z_{11} normalizada em impedância vale:

$$z_{11}(s) = \frac{(s + Z_1)(s + Z_2)}{s(s + P)}$$

$$\begin{array}{r}
 s^2 + 3s + 2 \left| s^2 + \frac{3}{2}s \right. \\
 \hline
 -s^2 - \frac{3}{2}s \quad 1 \\
 \hline
 s^2 + \frac{3}{2}s \left| \frac{3}{2}s + 2 \right. \\
 \hline
 -s^2 - \frac{4}{3}s \quad \frac{2}{3}s \\
 \hline
 \frac{3}{2}s + 2 \left| \frac{1}{6}s \right. \\
 \hline
 -\frac{3}{2}s \quad 9 \\
 \hline
 \frac{1}{6}s \left| 2 \right. \\
 \hline
 -\frac{1}{6}s \quad \frac{1}{12}s \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Figura 4.20: Expansão em fração contínua na primeira forma de Cauer RC.

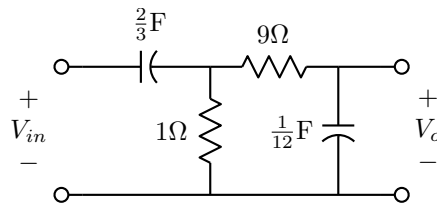


Figura 4.21: Estrutura alternativa obtida para o filtro RC.

Realizando a expansão na primeira forma de Cauer, os elementos obtidos, como na figura 4.17, são:

$$\begin{aligned}
 R_2 &= 1 \\
 C_1 &= \frac{1}{Z_1 + Z_2 - P} \\
 R_3 &= \frac{(Z_1 + Z_2 - P)^2}{P(Z_1 + Z_2) - P^2 - Z_1 Z_2} \\
 C_4 &= \frac{P(Z_1 + Z_2) - P^2 - Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2 - P)Z_1 Z_2}
 \end{aligned}$$

Note-se que o valor de R_3 tem polos para $P = Z_1$ e $P = Z_2$, enquanto C_4 tem zeros. Ao se aproximar o polo de qualquer dos zeros a dispersão de valores aumenta, com as duas seções tendendo a ficar desacopladas, com a segunda seção ficando com muito maior nível de impedância que a primeira. Se P ficar fora do intervalo entre os zeros, R_3 fica negativo (nulo se $P = Z_1 + Z_2$, mas então $C_4 = \infty$), em coerência com a não realizabilidade da rede. Há um valor do polo que minimiza a dispersão dos valores dos resistores, no caso minimizando o valor de R_3 :

$$\frac{d}{dP} \frac{(Z_1 + Z_2 - P)^2}{P(Z_1 + Z_2) - P^2 - Z_1 Z_2} = 0 \implies P = \frac{Z_1^2 + Z_2^2}{Z_1 + Z_2}$$

O que leva aos componentes ótimos, exemplificados com o exemplo de $Z_1 = 1$, $Z_2 = 2$ e $P = \frac{5}{3}$:

$$\begin{aligned}
 R_2 &= 1 \implies 1 \Omega \\
 C_1 &= \frac{Z_1 + Z_2}{2Z_1Z_2} \implies \frac{3}{4} \text{ F} \\
 R_3 &= \frac{4Z_1Z_2}{Z_1^2 - 2Z_1Z_2 + Z_2^2} \implies 8 \Omega \\
 C_4 &= \frac{Z_1^2 - 2Z_1Z_2 + Z_2^2}{2Z_1Z_2(Z_1 + Z_2)} \implies \frac{1}{12} \text{ F}
 \end{aligned}$$

Os valores ficaram semelhantes aos obtidos com $P = 1.5$, que é próximo do ótimo. Uma análise semelhante pode ser feita partindo da expansão na segunda forma de Cauer, resultando em $P = \frac{2Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$, diferente devido à estrutura diferente. A rede com mínima dispersão de resistências, entretanto, resulta a mesma se $R_2 = 1 \Omega$.

4.1.3 Imitâncias RLCM

Este caso é mais complexo, e pode facilmente recair em uma situação em que uma rede não canônica, ou usando transformadores, é requerida. Mas soluções sempre existem para a realização se a função satisfizer as propriedades gerais das imitâncias RLCM. Um procedimento geral é o chamado “método chop-chop”:

1. Se $Z(s)$ ou $Y(s)$ tem polos em zero, infinito, ou no eixo imaginário, extrair estes polos com seções de Foster LC. As extrações são sempre possíveis, pois nas vizinhanças dos polos a rede se comporta como uma rede LC.
2. A rede resultante é resistiva em frequências zero e infinito. Deve-se então extrair um resistor, em série ou em paralelo. Sempre existem essas duas possibilidades. Um resistor em série deve ser igual a R_{min} , e um condutor em paralelo deve ser igual a G_{min} , os mínimos valores das partes reais da impedância ou da admitância. Mais não pode ser retirado, pois as partes reais tem que continuar maiores ou iguais a zero.

$$R_{min} = \min(\operatorname{Re} Z(j\omega))$$

$$G_{min} = \min(\operatorname{Re} Y(j\omega))$$

3. A imitância que resta desta operação tem ao menos uma frequência em que sua parte real é nula, justamente a frequência onde ocorria o mínimo da parte real extraída, ω_0 . Se a extração ocorreu em frequência zero ou infinita, a parte imaginária é zerada também, e pode-se voltar ao passo 1 para extrair o polo em zero ou infinito criado. Para outros valores de ω_0 , se por coincidência a parte imaginária em ω_0 também foi zerada pela extração, também pode-se voltar ao passo 1 e extrair os polos imaginários criados.
4. Se a imitância que restou tem parte imaginária não nula na frequência ω_0 , é chamada então de “imitância mínima”, pois não tem polos em zero, infinito ou no eixo imaginário, e tem parte real mínima nula. Nada pode ser extraído dela imediatamente. Existem entretanto vários métodos para contornar o problema.

4.1.3.1 Síntese de Brune

O mais simples é o “ciclo de Brune” [7], que vai requerer um transformador, e é realizado assim:

1. Extraí-se de $Z(s)$ um indutor série que tenha a impedância $Z(j\omega_0)$. Este indutor pode ser negativo. Está sendo criado um polo no infinito artificialmente:

$$L_1 = \frac{Z(j\omega_0)}{j\omega_0}$$

2. A impedância agora tem zeros em $\pm j\omega_0$, e pode-se extrair os polos de admitância como um tanque série L_2, C_2 em paralelo. Se a impedância original era válida, o resíduo será positivo, e os dois componentes também.
3. A seguir extrai-se o polo no infinito de $Z(s)$ criado pela extração do primeiro indutor como outro indutor L_3 em série. Se L_1 era negativo, L_3 é positivo, e vice-versa. A impedância restante é novamente resistiva em zero e infinito, e volta-se à extração da resistência ou condutância mínima.

Pode ser necessário repetir o ciclo de Brune várias vezes para terminar a síntese. O bloco gerado pelo ciclo de Brune contém na realidade um transformador com acoplamento cerrado, obtido da transformação do “T” de indutores gerado pelo ciclo. Com esse transformador a impedância resistiva no infinito que resta é transformada na impedância também resistiva no infinito que foi obtida após a extração da resistência ou condutância mínima. A rede de indutores não corresponde a polo no infinito.

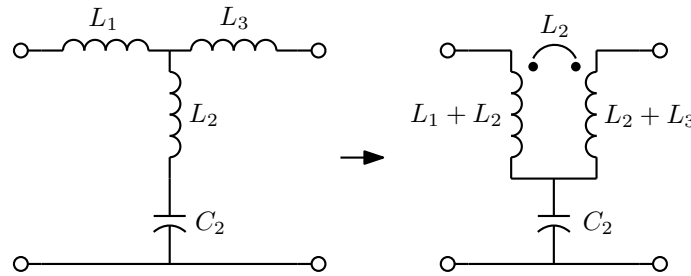


Figura 4.22: Estrutura retirada pelo ciclo de Brune.

A realização (figura 4.22) não é muito realística, devido ao transformador com acoplamento cerrado. Mas se a rede possuir um indutor série à esquerda, antes da extração de R_{min} em série, é possível absorver o indutor no transformador e obter um transformador com acoplamento não unitário, mais realístico.

Exemplo: Seja realizar a impedância:

$$Z(s) = \frac{5s^2 + 18s + 8}{s^2 + s + 10}$$

Os polos e zeros são complexos no SPLE², não há polos de impedância ou admitância no eixo imaginário. A resistência mínima não fica nem em zero nem no infinito. A parte real deve ser examinada. Uma forma para obter a parte real com menos cálculos é considerar que a impedância está na forma:

$$Z(s) = \frac{N_e + N_o}{D_e + D_o}$$

onde os sufixos denotam as partes par (e) e ímpar (o) dos polinômios de s do numerador e do denominador. No caso, $N_e = 5s^2 + 8$, $N_o = 18s$, $D_e = s^2 + 10$ e $D_o = s$. A multiplicação pelo complexo conjugado do denominador, que seria feita para eliminar a parte imaginária do denominador para $s = j\omega$, equivale a multiplicar numerador e denominador por $D_e - D_o$:

²Semiplano lateral esquerdo do plano complexo.

$$Z(s) = \frac{(N_e + N_o)(D_e - D_o)}{D_e^2 - D_o^2} = \frac{N_e D_e - N_o D_o}{D_e^2 - D_o^2} + \frac{N_o D_e - D_o N_e}{D_e^2 - D_o^2}$$

A primeira parte é par/par, e portanto par, enquanto a segunda é ímpar/par, e portanto ímpar. Para $s = j\omega$ a parte par é real e a parte ímpar é imaginária. Assim:

$$Re(Z(j\omega)) = \left. \frac{N_e D_e - N_o D_o}{D_e^2 - D_o^2} \right|_{s=j\omega} \quad Im(Z(j\omega)) = \left. \frac{N_o D_e - D_o N_e}{D_e^2 - D_o^2} \right|_{s=j\omega}$$

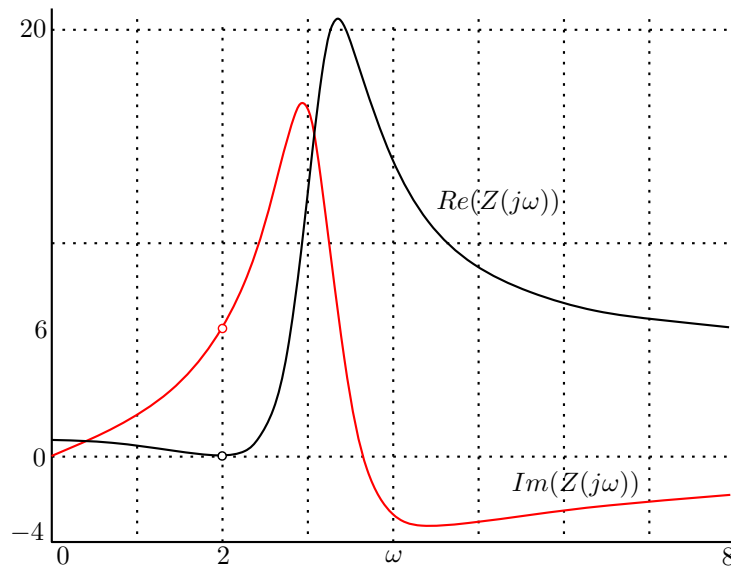


Figura 4.23: Partes real e imaginária da impedância.

No caso:

$$Re(Z(j\omega)) = \left. \frac{(5s^2 + 8)(s^2 + 10) - 18s^2}{(s^2 + 10)^2 - s^2} \right|_{s=j\omega} = \left. \frac{5s^4 + 40s^2 + 80}{s^4 + 19s^2 + 100} \right|_{s=j\omega}$$

$$Re(Z(j\omega)) = \frac{5\omega^4 - 40\omega^2 + 80}{\omega^4 - 19\omega^2 + 100} = \frac{5(\omega^2 - 4)}{\omega^4 - 19\omega^2 + 100}$$

onde se observa que a parte real vale zero para $\omega = 2$ rad/s (Ver as partes real e imaginária plotadas na figura 4.23). Nenhum resistor pode ser extraído então. $Z(j2) = \frac{-12+36j}{6+2j} = 6j$, puramente imaginário e não nulo. O ciclo de Brune permite sair do impasse. O indutor série a extrair vale:

$$L_1 = \frac{Z(j2)}{j2} = \frac{6j}{2j} = 3H$$

Extraindo este indutor de $Z(s)$:

$$Z'(s) = Z(s) - 3s = \frac{5s^2 + 18s + 8}{s^2 + s + 10} - 3s = \frac{-3s^3 + 2s^2 - 12s + 8}{s^2 + s + 10} = \frac{-3(s - 2/3)(s^2 + 4)}{s^2 + s + 10}$$

Extraindo o tanque LC que realiza os polos em $\pm 2j$ em $Y'(s) = 1/Z'(s)$:

$$Y''(s) = Y'(s) - \frac{2ks}{s^2 + 4}$$

$$2k = \frac{s^2 + 4}{s} Y'(s) \Big|_{s=\pm 2j} = \frac{1}{2}$$

$$Y''(s) = \frac{s^2 + s + 10}{-3(s - 2/3)(s^2 + 4)} - \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + 4} = \frac{2.5(s^2 + 4)}{-3(s - 2/3)(s^2 + 4)} = \frac{-2.5}{3s - 2}$$

O que restou é a impedância $Z''(s) = 1/Y''(s)$:

$$Z''(s) = \frac{3s - 2}{-2.5} = -1.2s + 0.8$$

A realização tem então a forma da figura 4.24, com o transformador equivalente aos indutores mostrados.

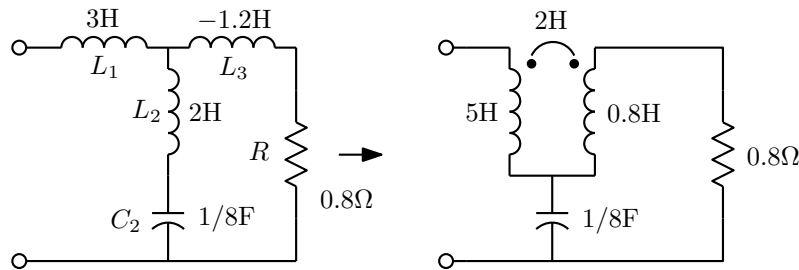


Figura 4.24: Exemplo de realização pelo ciclo de Brune.

Note-se que a indutância vista na entrada da rede em alta frequência vale $L_1 + L_2 // L_3 = 0$, implicando em $1/L_1 + 1/L_2 + 1/L_3 = 0$, o que sempre acontece. Um dos indutores, L_1 ou L_3 é sempre negativo.

4.1.3.2 Síntese de Bott e Duffin³

O uso de transformador não é obrigatório. Existe o método de Bott e Duffin [8], que obtém a realização sem o uso de transformador, às custas de uma rede não canônica usando pontes.

A idéia é obter uma realização através de uma associação em série (ou em paralelo) de duas redes de ordem igual, mas que não são imitâncias mínimas. A realização é baseada no teorema de Richards [9], que diz que se $Z(s)$ é uma função positiva real, e portanto uma imitância RLCM válida, a função $R(s)$ também o é:

$$R(s) = \frac{kZ(s) - sZ(k)}{kZ(k) - sZ(s)}$$

Isto vale para qualquer valor real positivo de k , e o grau de $R(s)$ não é maior que o de $Z(s)$. Seja $Z(s)$ a impedância mínima a realizar. Ela pode ser expressa como:

$$Z(s) = \frac{kZ(k)R(s)}{k + sR(s)} + \frac{Z(k)s}{k + sR(s)} = \frac{1}{\frac{1}{Z(k)R(s)} + \frac{s}{kZ(k)}} + \frac{1}{\frac{k}{Z(k)s} + \frac{R(s)}{Z(k)}}$$

Esta realização corresponde à estrutura da figura 4.25, que é uma ponte equilibrada de quatro impedâncias, onde $Z_1(s) = Z(k)R(s)$ e $Z_2(s) = \frac{Z(k)}{R(s)}$.

³Formulação como no livro “Classical Circuit Theory”, de Omar Wing, 2008. Esta síntese não é normalmente detalhada no curso, mas é colocada aqui para completar o material.

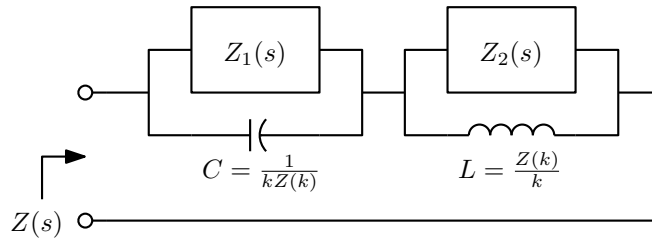


Figura 4.25: Estrutura da realização de Bott e Duffin.

Para que as impedâncias $Z_1(s)$ e $Z_2(s)$ sejam de mais simples realização que $Z(s)$, elas devem ter polos ou zeros no eixo imaginário, implicando na existência destes em $R(s)$. Sabe-se que $Z(s)$ tem parte real nula em ω_0 , e que $Z(j\omega_0) = jX(\omega_0)$. Existem dois casos, dependendo do sinal de $X(\omega_0)$. Se $X(\omega_0) > 0$ pode-se usar a definição de $R(s)$ para fazer com que $R(s)$ tenha zeros em $\pm j\omega_0$, escolhendo um valor adequado para a constante k a partir da equação:

$$kZ(j\omega_0) - j\omega_0 Z(k) = 0$$

Daí vem um polinômio em k , que deve ter uma raiz positiva real e raízes em $\pm j\omega_0$. Obtida k , a raiz real, o capacitor e o indutor da ponte estão determinados, e são positivos:

$$C = \frac{1}{kZ(k)} \quad L = \frac{Z(k)}{k}$$

Como $R(s)$ tem zeros em $\pm j\omega_0$, as duas outras impedâncias da ponte se expandem como:

$$\frac{1}{Z_1(s)} = \frac{1}{Z(k)R(s)} = \frac{2k_1 s}{s^2 + \omega_0^2} + Y_3(s)$$

$$Z_2(s) = \frac{Z(k)}{R(s)} = \frac{2k_2 s}{s^2 + \omega_0^2} + Z_4(s)$$

A realização tem então a forma da figura 4.26, onde as redes $Y_3(s)$ e $Z_4(s)$ tem dois graus a menos que $Z(s)$ e os elementos são:

$$L_1 = \frac{1}{2k_1} \quad C_1 = \frac{2k_1}{\omega_0^2} \quad L_2 = \frac{2k_2}{\omega_0^2} \quad C_2 = \frac{1}{2k_2}$$

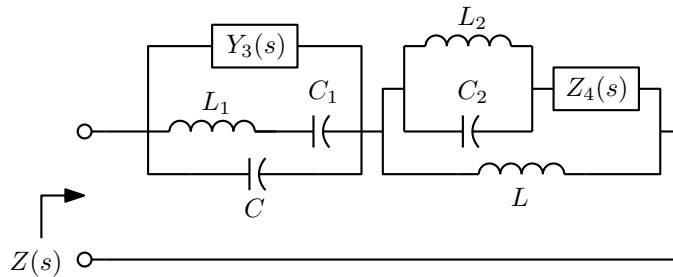


Figura 4.26: Estrutura da realização de Bott e Duffin quando $X(\omega_0) > 0$.

Quando $X(j\omega_0) < 0$, $R(s)$ deve ter um par de polos em $s = \pm j\omega_0$. Da definição de $R(s)$ vem a equação:

$$kZ(k) - j\omega_0 Z(j\omega_0) = 0$$

o que dá outro polinômio que tem uma raiz positiva k . As duas impedâncias $Z_1(s)$ e $Z_2(s)$ são então:

$$Z_1(s) = Z(k)R(s) = \frac{2k_1s}{s^2 + \omega_0^2} + Z_3(s)$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{Z_2(s)} = \frac{R(s)}{Z(k)} = \frac{2k_2s}{s^2 + \omega_0^2} + Y_4(s)$$

A realização tem então a forma da figura 4.27, onde as redes $Z_3(s)$ e $Y_4(s)$ tem também dois graus a menos que $Z(s)$, e os elementos são:

$$C_1 = \frac{1}{2k_1} \quad L_1 = \frac{2k_1}{\omega_0^2} \quad C_2 = \frac{2k_2}{\omega_0^2} \quad L_2 = \frac{1}{2k_2}$$

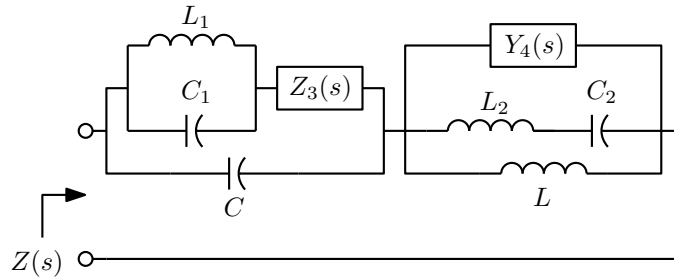


Figura 4.27: Estrutura da realização de Bott e Duffin quando $X(\omega_0) < 0$.

Exemplo: Seja realizar a mesma impedância realizada pelo método de Brune, $Z(s) = \frac{5s^2+18s+8}{s^2+s+10}$, que vale $Z(j\omega_0) = 6j$ para $\omega_0 = 2$. A primeira coisa a fazer é achar k :

$$kZ(j2) - j2Z(k) = 0 \Rightarrow 6k^3 - 4k + 24k - 16 = 0 \Rightarrow (k^2 + 4)(6k - 4) = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

Precisa-se também de $Z(k) = \frac{5k^2+18k+8}{k^2+k+10} = 2$. Os elementos C e L já podem ser calculados como $C = \frac{1}{kZ(k)} = \frac{3}{4}\text{F}$ e $L = \frac{Z(k)}{k} = 3\text{H}$. A seguir calcula-se $R(s)$ como:

$$R(s) = \frac{kZ(s) - sZ(k)}{kZ(k) - sZ(s)} = \frac{2(s^2 + 4)}{5s^2 + 20s + 20}$$

As duas impedâncias Z_1 e Z_2 são então calculadas:

$$\frac{1}{Z_1(s)} = Y_1(s) = \frac{1}{Z(k)R(s)} = \frac{5s^2 + 20s + 20}{4(s^2 + 4)} = \frac{2k_1s}{s^2 + 4} + Y_3(s) = \frac{5s}{s^2 + 4} + \frac{5}{4}$$

$$Z_2(s) = \frac{Z(k)}{R(s)} = \frac{5s^2 + 20s + 20}{s^2 + 4} = \frac{2k_2s}{s^2 + 4} + Z_4(s) = \frac{20s}{s^2 + 4} + 5$$

As expansões correspondem à rede da figura 4.28. Note-se que a rede é de ordem 6 realizando uma impedância de ordem 2. Existem quatro polos e quatro zeros extra cancelados. Existem outras soluções

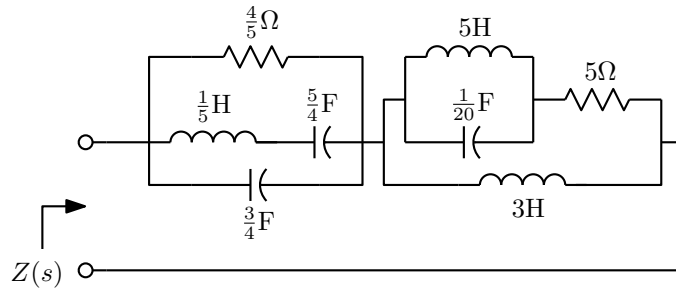


Figura 4.28: Realização de Bott e Duffin para $Z(s) = \frac{5s^2+18s+8}{s^2+s+10}$.

conhecidas para o problema da imitância mínima, mas são todas problemáticas, usando transformadores ideais ou muitos elementos.

Exemplo: Para verificar a síntese quando $X(\omega_0) < 0$, seja realizar a impedância dual da realizada, $Z(s) = \frac{s^2+s+10}{5s^2+18s+8}$, que vale $Z(j\omega_0) = -\frac{1}{6}j$ em $\omega_0 = 2$. Achando k :

$$kZ(k) - j2Z(j2) = 0 \Rightarrow k^3 - \frac{2}{3}k^2 + 4k - \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow (k^2 + 4)(k - \frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

Achando então $Z(k) = \frac{k^2+k+10}{5k^2+18k+8} = \frac{1}{2}$, tem-se $C = \frac{1}{kZ(k)} = 3F$ e $L = \frac{Z(k)}{k} = \frac{3}{4}H$, e $R(s)$ o inverso da anterior:

$$R(s) = \frac{kZ(s) - sZ(k)}{kZ(k) - sZ(s)} = \frac{5s^2 + 20s + 20}{2(s^2 + 4)}$$

As duas impedâncias são então:

$$Z_1(s) = Z(k)R(s) = \frac{5s^2 + 20s + 20}{4(s^2 + 4)} = \frac{2k_1s}{s^2 + 4} + Z_3(s) = \frac{5s}{s^2 + 4} + \frac{5}{4}$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{Z_2(s)} = \frac{Z(k)}{R(s)} = \frac{5s^2 + 20s + 20}{s^2 + 4} = \frac{2k_2s}{s^2 + 4} + Y_4(s) = \frac{20s}{s^2 + 4} + 5$$

A realização é mostrada na figura 4.29. Note-se que não tem a forma da rede dual da rede da figura 4.28, mas como a estrutura é uma ponte equilibrada, pode-se redesenhar a estrutura na forma de duas redes em paralelo, com o indutor L em série com $Z_1(s)$ em paralelo com o capacitor C em série com $Z_2(s)$. Esta versão tem a estrutura correta para a rede dual.

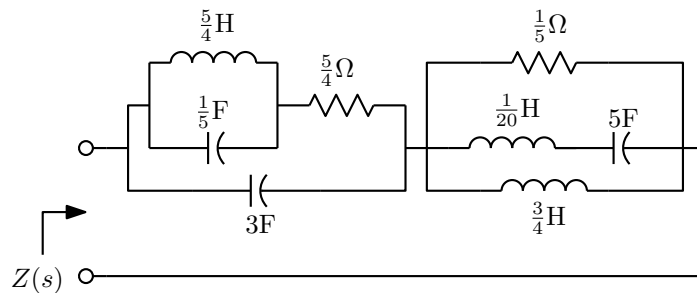


Figura 4.29: Realização de Bott e Duffin para $Z(s) = \frac{s^2+s+10}{5s^2+18s+8}$.

4.1.3.3 Análogos mecânicos

Recentemente, houve uma volta ao interesse de encontrar realizações simples para imitâncias, com aplicação em problemas mecânicos usando análogos de redes elétricas, onde redes compostas de amortecedores, molas e “inerters” equivalem a redes RLC. A principal aplicação é em sistemas de suspensão para veículos. Neste análogo mecânico força equivale a corrente e velocidade a tensão. Considere-se V_1 e V_2 velocidades nos dois terminais do elemento mecânico, correspondendo a tensões v_1 e v_2 nos terminais do componente elétrico. Para um amortecedor pode-se escrever $F = c(V_1 - V_2)$, equivalendo a um resistor onde $i = (1/R)(v_1 - v_2)$. Para uma mola se escreve $\frac{dF}{dt} = K(V_1 - V_2)$, correspondendo a um indutor onde $\frac{di}{dt} = (1/L)(v_1 - v_2)$. E para o “inertor” se escreve $F = b\frac{d(V_1 - V_2)}{dt}$, equivalendo a um capacitor onde $i = C\frac{d(v_1 - v_2)}{dt}$. O “inertor” é o equivalente mecânico do capacitor suspenso. Tem dois terminais mecânicos disponíveis, ao contrário do análogo usual neste caso, uma massa, que só tem um terminal disponível e equivale a um capacitor aterrado. Uma das formas de construir o “inertor” é com um disco montado em uma estrutura que é um dos terminais, que é girado por uma engrenagem plana, que é o outro terminal, ligada a uma pequena engrenagem circular em seu eixo.

4.2 Realização de funções de transferência na forma LC simplesmente terminada

Já foi vista uma forma para a construção de filtros simples, com o uso de redes de dois componentes. Esses filtros ficam entretanto restritos a terem polos reais ou imaginários, o que exclui filtros mais interessantes e úteis, com polos complexos. Em todos os casos, entretanto, é possível reduzir a síntese necessária à de uma imitância LC a ser ligada entre terminações resistivas na entrada e na saída. Existem dois casos simples, com a terminação resistiva na entrada e na saída, e o mais complexo, com duas terminações.

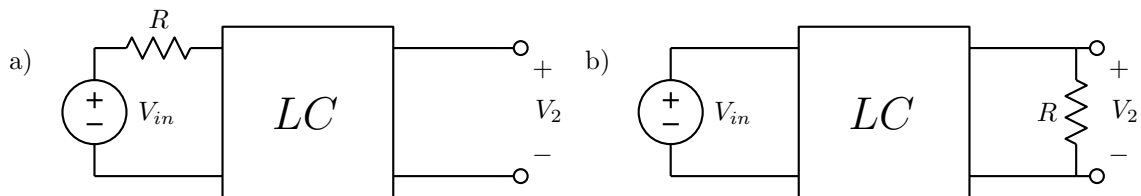


Figura 4.30: Filtros LC simplesmente terminados. a) Terminação na entrada. b) Terminação na saída.

4.2.1 Terminação na entrada

Observando a figura 4.30a, nota-se que a impedância vista após a terminação resistiva na entrada é de uma rede LC. Analisando com parâmetros Z :

$$\begin{aligned} z_{11}I_1 + z_{12}I_2 &= V_1 \\ z_{12}I_1 + z_{22}I_2 &= V_2 \\ V_1 &= V_{in} - RI_1 \\ I_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= z_{21} I_1 \\ V_{in} &= (z_{11} + R) I_1 \\ \frac{V_2}{V_{in}} &= \frac{z_{21}}{R + z_{11}} \end{aligned}$$

O denominador da função de transferência do filtro é um polinômio de Hurwitz, com todos os coeficientes positivos, $D = D_o + D_e$, onde os sufixos denotam os coeficientes de ordem par (e , de “even”) e de ordem ímpar (o , de “odd”). O numerador da função de transferência tem raízes que são zeros formados pela rede LC, e portanto só pode ser puramente par ou ímpar, $N = N_e$ ou $N = N_o$. Um filtro passa-baixas com zeros de transmissão imaginários ou no infinito sempre tem numerador par, por exemplo. É possível então identificar os parâmetros da rede LC. Para o caso de numerador par:

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_{in}} &= \frac{z_{21}}{R + z_{11}} = \frac{N_e}{D_o + D_e} \\ \frac{\frac{z_{21}}{R}}{1 + \frac{z_{11}}{R}} &= \frac{\frac{N_e}{D_o}}{1 + \frac{D_e}{D_o}} \\ \frac{z_{11}}{R} &= \frac{D_e}{D_o} \end{aligned}$$

E para o caso de numerador ímpar:

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_{in}} &= \frac{z_{21}}{R + z_{11}} = \frac{N_o}{D_o + D_e} \\ \frac{\frac{z_{21}}{R}}{1 + \frac{z_{11}}{R}} &= \frac{\frac{N_o}{D_e}}{1 + \frac{D_o}{D_e}} \\ \frac{z_{11}}{R} &= \frac{D_o}{D_e} \end{aligned}$$

Basta então separar as partes par e ímpar do denominador e expandir sua razão, em uma ou outra forma dependendo da paridade de N , em uma forma que realize os zeros de transmissão desejados, que são também os zeros de z_{12} . Um escalamento de nível de impedância pelo fator R obtém o z_{11} correto. Para um filtro polinomial passa-baixas, basta expandir z_{11} na primeira forma de Cauer, colocando a saída sobre o último elemento (capacitor em //). Para um filtro passa-altas seria usada a segunda forma de Cauer. Para filtros com zeros de transmissão em zero e no infinito, uma mistura das duas formas de Cauer obtém o circuito. Para filtros com zeros finitos de transmissão o procedimento é descrito mais adiante.

Exemplo: Seja gerar um filtro de Butterworth de terceira ordem, com corte de 3.01 dB em 1 kHz e terminação na entrada de 50 Ω . As especificações normalizadas para corte em 1 rad/s e 1 Ω de terminação geram a função de transferência:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}}(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

Para terminação na entrada tem-se:

$$\frac{z_{11}(s)}{R} = \frac{2s^2 + 1}{s^3 + 2s}$$

Esta impedância normalizada para $R = 1 \Omega$ e expandida na primeira forma de Cauer, com a saída sobre o último capacitor para formação dos 3 zeros de transmissão no infinito, fica na forma de figura 4.31a. Desnormalizando em frequência (para 1 kHz) e impedância (para 50 Ω) resulta a estrutura da figura 4.31b.

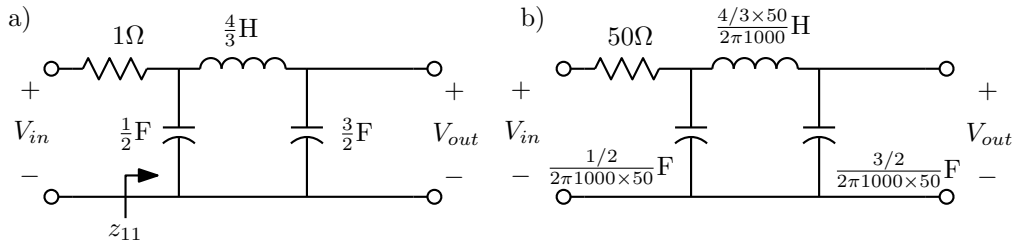


Figura 4.31: Terminação na entrada. a) Filtro normalizado. b) Filtro desnormalizado.

4.2.2 Terminação na saída

Observando a figura nota-se que a admitância vista antes da terminação resistiva na saída é de uma rede LC. Analisando com parâmetros Y:

$$\begin{aligned}
 y_{11}V_1 + y_{12}V_2 &= I_1 \\
 y_{12}V_1 + y_{22}V_2 &= I_2 \\
 V_1 &= V_{in} \\
 I_2 &= -\frac{V_2}{R} \\
 -\frac{V_2}{R} &= y_{21}V_{in} + y_{22}V_2 \\
 \frac{V_2}{V_{in}} &= \frac{-y_{21}}{\frac{1}{R} + y_{22}}
 \end{aligned}$$

A forma obtida para y_{22} é similar à obtida para z_{11} no caso da terminação na entrada. Fazendo as mesmas comparações com a função de transferência de tensão, para numerador par tem-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{V_2}{V_{in}} &= -\frac{y_{21}}{\frac{1}{R} + y_{11}} = \frac{N_e}{D_o + D_e} \\
 \frac{-Ry_{21}}{1 + Ry_{22}} &= \frac{\frac{N_e}{D_o}}{1 + \frac{D_e}{D_o}} \\
 Ry_{22} &= \frac{D_e}{D_o}
 \end{aligned}$$

E para o caso de numerador ímpar:

$$\begin{aligned}
 \frac{V_2}{V_{in}} &= -\frac{y_{21}}{\frac{1}{R} + y_{11}} = \frac{N_o}{D_o + D_e} \\
 \frac{-Ry_{21}}{1 + Ry_{22}} &= \frac{\frac{N_o}{D_e}}{1 + \frac{D_o}{D_e}} \\
 Ry_{22} &= \frac{D_o}{D_e}
 \end{aligned}$$

A síntese é similar à do outro caso. Na verdade, gera a rede dual da que é ligada ao resistor no primeiro caso. Para o exemplo anterior, resulta:

$$Ry_{22}(s) = \frac{2s^2 + 1}{s^3 + 2s}$$

As redes normalizada e desnormalizada são mostradas na figura 4.32. A entrada é colocada em série com o primeiro indutor para que sejam criados os 3 zeros de transmissão no infinito.

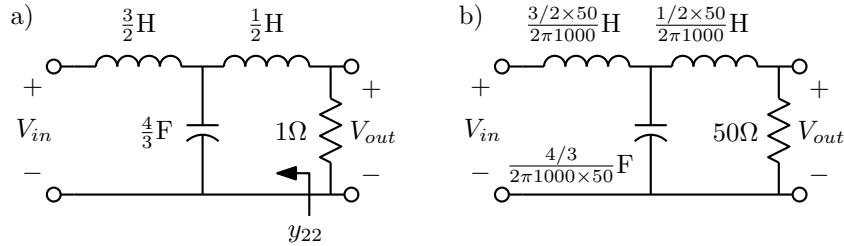


Figura 4.32: Terminação na saída. a) Filtro normalizado. b) Filtro desnormalizado.

4.3 Realização de zeros finitos de transmissão em redes “ladder”

Quando são necessários zeros de transmissão em pares imaginários conjugados, estes podem ser criados pela técnica de deslocamento de zeros por extração parcial de polos. Nesta técnica um bloco que criaria um polo de impedância ou admitância, ou um par conjugado, segundo as expansões de Foster, é extraído parcialmente, deixando o polo ou polos correspondentes ainda presentes na admitância, mas mudando de posição os zeros, inclusive um par imaginário que é movido para a posição dos zeros de transmissão a criar. Os zeros assim criados são então removidos por uma extração completa de um bloco da expansão da outra expansão de Foster. A forma mais comum, para filtros passa-baixas, é a utilização do polo no infinito para esta finalidade. Dois casos duais podem ser identificados, a forma “T” e a forma “π”.

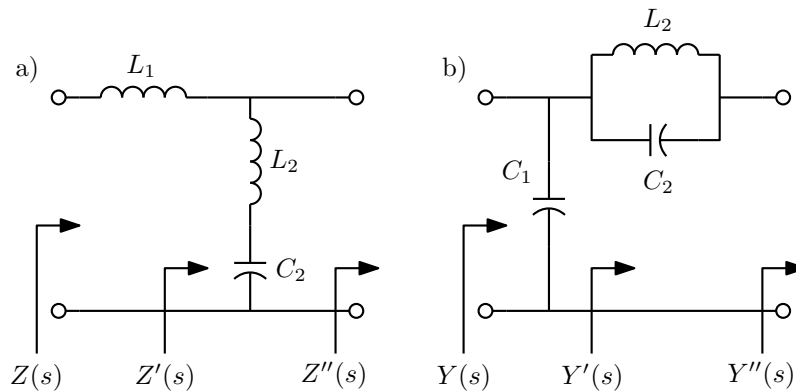


Figura 4.33: Criação de zeros finitos de transmissão. a) Forma T. b) Forma π.

Na forma T, a impedância $Z(s)$ tem polo no infinito, como visto na figura 4.33a. Faz-se o primeiro indutor ter toda a impedância vista na frequência ω_z dos zeros a criar.

$$Z(j\omega_z) = j\omega_z L_1 \Rightarrow L_1 = \frac{Z(j\omega_z)}{j\omega_z}$$

Esta operação é possível se $0 \leq L_1 \leq L_\infty$, onde L_∞ é o resíduo do polo no infinito, valor da indutância série que seria extraída na primeira forma de Foster para $Z(s)$. Se isto não ocorrer, em princípio a operação não pode ser feita.

Retirado L_1 , a impedância restante $Z'(s) = Z(s) - sL_1$ tem zeros em $\pm j\omega_z$, e a admitância $Y'(s) = 1/Z'(s)$ tem polos em $\pm j\omega_z$ que podem ser extraídos como uma seção da segunda forma de Foster, um tanque LC série em paralelo. A expansão de $Y'(s)$ na segunda forma de Foster seria:

$$Y'(s) = \cdots + \frac{2ks}{s^2 + \omega_z^2}$$

$$2k = Y'(s) \left. \frac{s^2 + \omega_z^2}{s} \right|_{s^2 = -\omega_z^2}$$

$$L_2 = \frac{1}{2k}; \quad C_2 = \frac{2k}{\omega_z^2}$$

A admitância restante $Y''(s)$ e a impedância correspondente $Z''(s)$ valem:

$$Y''(s) = Y'(s) - \frac{2ks}{s^2 + \omega_z^2}; \quad Z''(s) = \frac{1}{Y''(s)}$$

A impedância $Z''(s)$ ainda tem polo no infinito, e o processo pode ser repetido para a criação de outro par de zeros, se o grau da impedância, que cai dois graus com a operação, ainda permitir.

A forma π é exatamente o dual. Repetindo as mesmas operações com dualização, a admitância $Y(s)$ tem polo no infinito, como visto na figura 4.33b. Faz-se o primeiro capacitor ter toda a admitância vista na frequência ω_z dos zeros a criar.

$$Y(j\omega_z) = j\omega_z C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{Y(j\omega_z)}{j\omega_z}$$

Esta operação é possível se $0 \leq C_1 \leq C_\infty$, onde C_∞ é o resíduo do polo no infinito, valor da capacitância em paralelo que seria extraída na segunda forma de Foster para $Y(s)$. Se isto não ocorrer, em princípio a operação não pode ser feita.

Retirado C_1 , a admitância restante $Y'(s) = Y(s) - sC_1$ tem zeros em $\pm j\omega_z$, e a impedância $Z'(s) = 1/Y'(s)$ tem polos em $\pm j\omega_z$ que podem ser extraídos como uma seção da primeira forma de Foster, um tanque LC paralelo em série. A expansão de $Z'(s)$ na primeira forma de Foster seria:

$$Z'(s) = \cdots + \frac{2ks}{s^2 + \omega_z^2}$$

$$2k = Z'(s) \left. \frac{s^2 + \omega_z^2}{s} \right|_{s^2 = -\omega_z^2}$$

$$C_2 = \frac{1}{2k}; \quad L_2 = \frac{2k}{\omega_z^2}$$

A impedância restante $Z''(s)$ e a admitância correspondente $Y''(s)$ valem:

$$Z''(s) = Z'(s) - \frac{2ks}{s^2 + \omega_z^2}; \quad Y''(s) = \frac{1}{Z''(s)}$$

A admitância $Y''(s)$ ainda tem polo no infinito, e o processo pode ser repetido para a criação de outro par de zeros, se o grau da impedância, que cai dois graus com a operação, ainda permitir.

As estruturas resultantes ficam com as formas características T ou π como na figura 4.34. Em uma realização prática a forma π seria preferível, devido ao número menor de indutores. Para uma simulação

ativa por equações de estado as redes resultantes são idênticas. É possível também usar outras extrações parciais de polos, como extração do polo em zero (resultam capacitores em série e indutores em paralelo entre os tanques, como em filtros passa-altas gerados por transformação de frequência) ou mesmo pares de polos imaginários, resultando uma estrutura com apenas tanques LC em série e em paralelo. Este último caso é pouco prático, e não pode ser usado com filtros duplamente terminados, pois os divisores de impedâncias nulas ou infinitas em frequências finitas que o método gera não ficam corretos quando as terminações estão presentes. As formas como as mostradas na figura 4.34 realizam também um zero de transmissão no infinito, criados pelo último indutor em série ou pelo primeiro capacitor em //. Formas simplesmente terminadas poderiam omitir estes elementos, e então não ter zeros no infinito (teriam também um grau a menos na função de transferência).

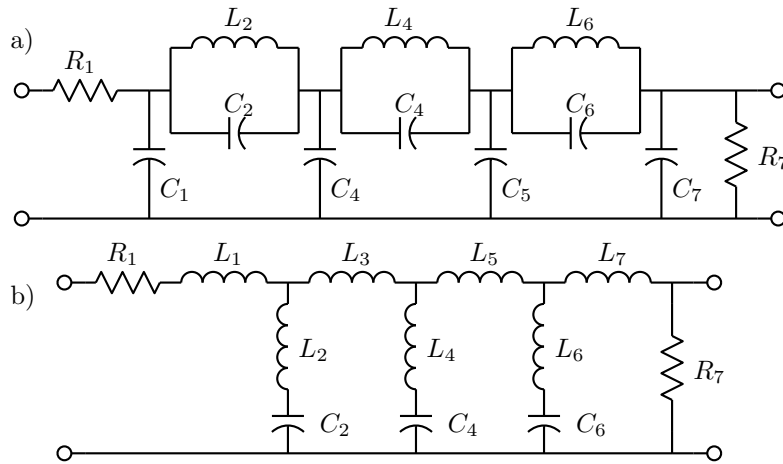


Figura 4.34: Filtros passa-baixas com zeros finitos de transmissão de ordem 7. a) Forma π . b) Forma T.

Exemplo: Para um exemplo bastante completo, seja a realização na forma simplesmente terminada com terminação na saída, nas formas T e π , da função de transferência de tensão:

$$T(s) = \frac{s^4 + 5s^2 + 4}{11s^5 + 8s^4 + 27s^3 + 13s^2 + 12s + 4}$$

Identificando os parâmetros Y, para a realização com terminação na saída primeiramente:

$$T(s) = \frac{N_e(s)}{D_e(s) + D_o(s)} = \frac{N_e(s)/D_o(s)}{D_e(s)/D_o(s) + 1} = \frac{-Y_{21}(s)}{Y_{22}(s) + 1}$$

$$-Y_{21}(s) = \frac{N_e(s)}{D_o(s)} = \frac{s^4 + 5s^2 + 4}{11s^5 + 27s^3 + 12s}; \text{ Zeros a realizar: } \infty, \pm j, \pm 2j$$

$$Y_{22}(s) = \frac{D_e(s)}{D_o(s)} = \frac{8s^4 + 13s^2 + 4}{11s^5 + 27s^3 + 12s}$$

A rede que realiza estes parâmetros pode ser prevista neste ponto, como a forma T da figura 4.35. Tentando a realização dos zeros em $\pm j$ com a extração de L_1 :

$$\frac{1}{Y_{22}}(j) = jL_1 = j \frac{11 - 27 + 12}{8 - 13 + 4} = 4j \Rightarrow L_1 = 4H.$$

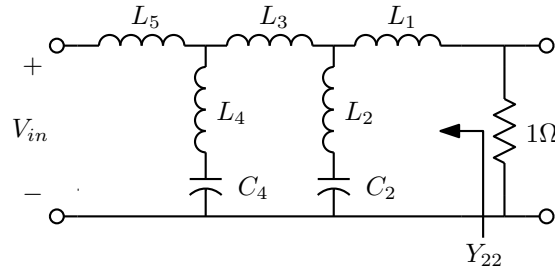


Figura 4.35: Previsão da estrutura para o filtro na forma T com terminação na saída.

Mas observando $\frac{1}{Y_{22}}(s)$ em frequência infinita, $L_{\infty} = \frac{11}{8}$, e com $L_1 > L_{\infty}$ a extração não é possível. Tentando então a realização dos zeros de maior frequência, em $\pm j2$:

$$\frac{1}{Y_{22}}(2j) = 2jL_1 = j \frac{11 \times 32 - 27 \times 8 + 12 \times 2}{8 \times 16 - 13 \times 4 + 4} = 2j \Rightarrow L_1 = 1\text{H}.$$

Como $L_1 < \frac{11}{8}$ a extração é possível. Extraíndo L_1 pela extração parcial do polo no infinito de $\frac{1}{Y_{22}}(s)$:

$$\frac{1}{Y_{22}'}(s) = \frac{11s^5 + 27s^3 + 12s}{8s^4 + 13s^2 + 4} - s = \frac{3s^5 + 14s^3 + 8s}{8s^4 + 13s^2 + 4}$$

onde se observa que o polo no infinito não desapareceu, pois o indutor removido apenas reduziu seu resíduo.

$Y_{22}'(s)$ tem agora polos em $\pm 2j$ criados na extração de L_1 , que podem ser removidos:

$$\begin{aligned} Y_{22}''(s) &= Y_{22}'(s) - \frac{2ks}{s^2 + 4} = \frac{8s^4 + 13s^2 + 4}{(s^2 + 4)(3s^3 + 2s)} - \frac{2ks}{s^2 + 4} \\ 2k &= \frac{s^2 + 4}{s} Y_{22}'(s) \Big|_{s^2 = -4} = \frac{8s^4 + 13s^2 + 4}{s(3s^3 + 2s)} \Big|_{s^2 = -4} = 2 \\ Y_{22}''(s) &= \frac{8s^4 + 13s^2 + 4}{(s^2 + 4)(3s^3 + 2s)} - \frac{2s}{s^2 + 4} = \frac{2s^4 + 9s^2 + 4}{(s^2 + 4)(3s^3 + 2s)} = \frac{2s^2 + 1}{3s^3 + 2s} \end{aligned}$$

O tanque LC extraído tem admitância $\frac{2s}{s^2 + 4} \Rightarrow L_2 = 0.5\text{H}; C_2 = 0.5\text{F}$.

Agora podem ser criados os zeros em $\pm j$ com a extração de L_3 de $\frac{1}{Y_{22}''}$:

$$\frac{1}{Y_{22}''}(j) = jL_3 = j \frac{-3 + 2}{-2 + 1} = j \Rightarrow L_3 = 1\text{H}.$$

A realização é possível, já que $L_3 < L_{\infty} = \frac{3}{2}$. Realizando a extração:

$$\frac{1}{Y_{22}'''}(s) = \frac{1}{Y_{22}''(s)} - sL_3 = \frac{3s^3 + 2s}{2s^2 + 1} - s = \frac{s^3 + s}{2s^2 + 1}$$

$Y_{22}'''(s)$ tem polos em $\pm j$ como desejado. O final da rede pode ser diretamente identificado:

$$Y_{22}'''(s) = \frac{2s^2 + 1}{s(s^2 + 1)} = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s} \Rightarrow L_4 = 1\text{H}; C_4 = 1\text{H}; L_5 = 1\text{H}$$

e a rede final é a da figura 4.36.

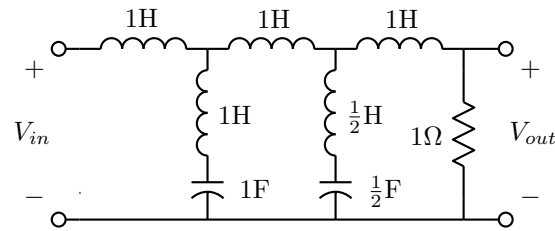


Figura 4.36: Filtro normalizado na forma T com terminação na saída.

Para realizar o mesmo filtro na forma π é necessário primeiramente remover o polo de $\frac{1}{Y_{22}}$ no infinito como indutor em série, para gerar uma admitância com polo no infinito, como requerido pela estrutura. A previsão da estrutura é então como na figura 4.37. Notar que esta estrutura só é possível assim porque o filtro é simplesmente terminado. Um resistor de terminação na entrada aumentaria a ordem para 6.

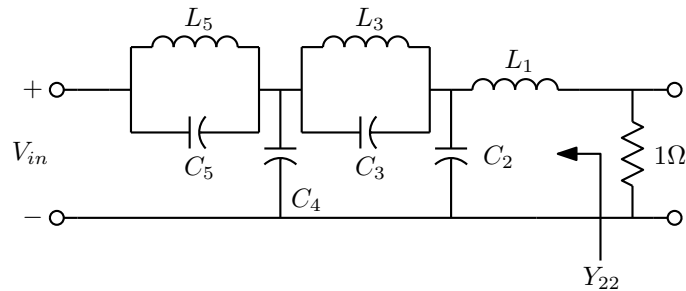


Figura 4.37: Previsão da estrutura para o filtro normalizado na forma π com terminação na saída.

Extraindo então o polo no infinito de $\frac{1}{Y_{22}(s)}$:

$$L_1 = k_\infty = \frac{1}{sY_{22}(s)} \Big|_{s \rightarrow \infty} = \frac{11}{8} \text{ H}$$

$$\frac{1}{Y'_{22}(s)} = \frac{1}{Y_{22}(s)} - sL_1 = \frac{11s^5 + 27s^3 + 12s}{8s^4 + 13s^2 + 4} - \frac{11}{8}s = \frac{\frac{73}{8}s^3 + \frac{13}{2}s}{8s^4 + 13s^2 + 4}$$

A seguir deve ser criado um dos pares de zeros de transmissão. Seja o de frequência mais alta em $\pm 2j$.

$$Y'_{22}(2j) = 2jC_2 = -j \frac{8 \times 16 - 13 \times 4 + 4}{-\frac{73}{8} \times 8 + \frac{13}{2} \times 2} = j \frac{4}{3} \Rightarrow C_2 = \frac{2}{3} \text{ F}$$

A extração é possível pois $C_2 < C_\infty = \frac{64}{73}$ e é positivo. Extraindo C_2 :

$$Y''_{22}(s) = Y_{22}(s) - sC_2 = \frac{8s^4 + 13s^2 + 4}{\frac{73}{8}s^3 + \frac{13}{2}s} - \frac{2}{3}s = \frac{\frac{23}{12}s^4 + \frac{26}{3}s^2 + 4}{\frac{73}{8}s^3 + \frac{13}{2}s}$$

O numerador tem agora obrigatoriamente o fator $s^2 + 4$. Extraindo os polos de $\frac{1}{Y''_{22}(s)}$ em $\pm 2j$, o resíduo vale:

$$2k = \frac{1}{Y_{22}''(s)} \frac{s^2 + 4}{s} \Big|_{s^2=-4} = \frac{\frac{73}{8} \times (-4) + \frac{13}{2}}{\frac{23}{12} \times (-4) + 1} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{1}{Y_{22}'''(s)} = \frac{\frac{73}{8}s^3 + \frac{13}{2}s}{(s^2 + 4)(\frac{23}{12}s^2 + 1)} - \frac{\frac{9}{2}s}{s^2 + 4} = \frac{\frac{1}{2}s^3 + 2s}{(s^2 + 4)(\frac{23}{12}s^2 + 1)} = \frac{\frac{1}{2}s}{\frac{23}{12}s^2 + 1}$$

O tanque extraído tem impedância $\frac{9/2s}{s^2+4} \Rightarrow L_3 = \frac{9}{8}\text{H}; C_3 = \frac{2}{9}\text{F}$.
 Extraíndo agora C_4 para criar os zeros em $\pm j$:

$$Y_{22}'''(j) = jC_4 = -j \frac{-\frac{23}{12} + 1}{\frac{1}{2}} = \frac{11}{6} \Rightarrow C_4 = \frac{11}{6}\text{F}$$

O que resta é a admitância abaixo, apenas um tanque LC:

$$Y_{22}'''' = Y_{22}''' - sC_4 = \frac{\frac{23}{12}s^2 + 1}{\frac{1}{2}s} - \frac{11}{6}s = \frac{s^2 + 1}{\frac{1}{2}s} \Rightarrow L_5 = \frac{1}{2}\text{H}; C_5 = 2\text{F}$$

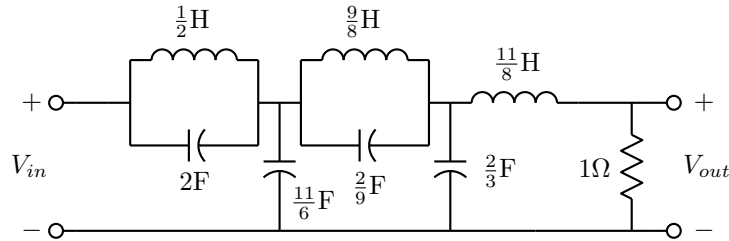


Figura 4.38: Filtro normalizado na forma π com terminação na saída.

É interessante notar o que acontece com os zeros de uma admitância quando os polos são deslocados por uma extração parcial do polo no infinito. No exemplo anterior, na figura 4.35, $\frac{1}{Y_{22}(s)}$ tinha:

$$\text{Zeros: } 0, \pm 0.763j, \pm 1.368j$$

$$\text{Polos: } \pm 0.642j, \pm 1.101j, \infty$$

Com a extração parcial do polo no infinito (L_1 na forma T) a impedância muda para $\frac{1}{Y_{22}(s)} - L_1s$. Os polos são os mesmos, mas os zeros se movem para maior frequência, como mostrado no comportamento da reatância $X_{22}(\omega) = \frac{1}{jY_{22}(j\omega)}$ na figura 4.39, sem ultrapassar o polo imediatamente acima.

Observa-se então que a realização dos zeros em $\pm j$ exigiria um movimento dos zeros em $\pm 0.763j$ até bem próximo dos polos em $\pm 1.101j$, requerendo $L_1 > L_\infty$, enquanto que a realização de zeros acima de $\pm 1.368j$ é sempre possível com $L_1 < L_\infty$. Um mapa completo mostrando o efeito de cada operação pode ser feito como na figura 4.40.

A segunda realização segue o mapa da figura 4.41. A extração do polo no infinito de $\frac{1}{Y_{22}}$ cria polo no infinito em Y_{22}' . A partir daí é montada a rede π .

4.4 Realização de funções de transferência na forma LC duplamente terminada

Filtros passivos são praticamente sempre projetados na forma duplamente terminada, pois esta forma simplifica a conexão ao restante do circuito, e porque estas redes podem apresentar características de

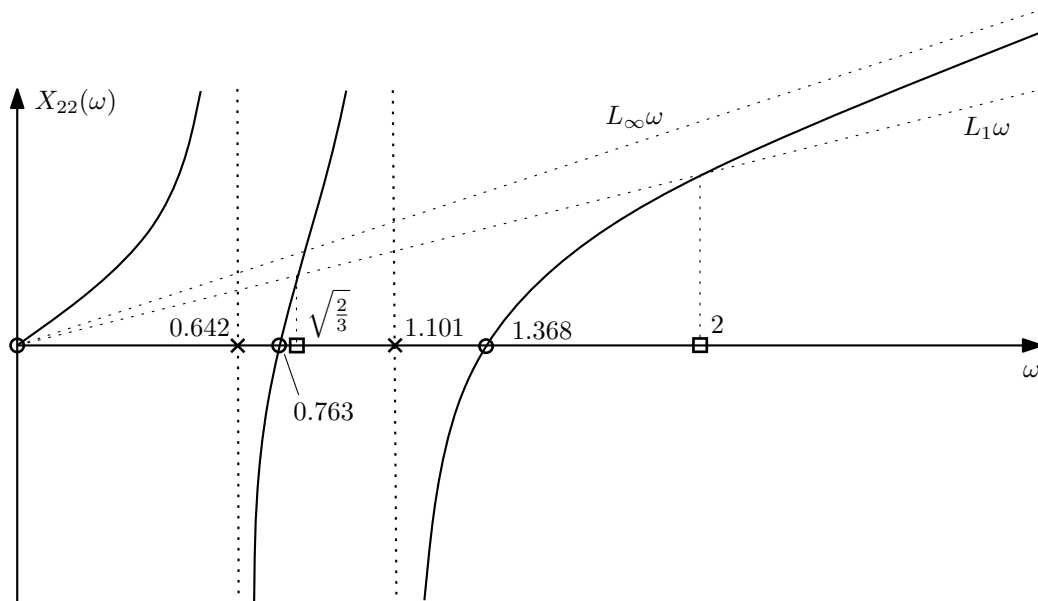


Figura 4.39: Deslocamento de zeros por extração parcial do polo no infinito.

sensibilidade à variação dos parâmetros bem menores que outras formas de realização. Mesmo na construção de filtros ativos, as formas de mais baixa sensibilidade são simulações de filtros passivos duplamente terminados.

O argumento sobre sensibilidade [6] vem da observação de que, em uma rede duplamente terminada é possível ter máxima transferência de potência para a terminação de saída nas frequências onde o módulo da função de transferência é máximo. Em um filtro passa-baixas como os da figura 3.13, com terminações iguais R , ocorre máxima transferência de potência em frequência zero, onde o filtro se reduz a um divisor resistivo com ganho 0.5. Como a potência sobre o resistor de saída não pode ser maior do que a obtida na máxima transferência de potência, $V_{in}^2/(4R)$, os máximos em frequências acima de zero que ocorrem nas aproximações de Chebyshev e elíptica não podem ter ganho maior que 0.5, e nestas aproximações todos os máximos são iguais. Ocorre então máxima transferência de potência em todos os máximos de ganho. Nas aproximações de Butterworth e Chebyshev inversa, ocorre um “máximo múltiplo” de ganho da ordem da aproximação em frequência zero, como se os vários máximos das outras aproximações se juntassem todos ali. Os elementos reativos que formam o circuito entre as terminações são sem perdas, não dissipando nem gerando energia, e então não afetam o valor dos máximos de ganho. Então, se em uma das frequências de máxima transferência de potência ocorrer um erro no valor de um elemento reativo, o ganho não pode aumentar, e fica menor para qualquer direção do erro, para mais ou para menos, como mostrado na figura 4.42. Assim, para uma função de transferência $T(s)$ ⁴:

$$\frac{\partial |T(j\omega)|}{\partial L_i, C_i} = 0$$

Como estas derivadas são funções contínuas, e existem vários máximos próximos (ou um máximo múltiplo), a influência de erros nos valores dos elementos reativos é pequena em toda a banda passante do filtro.

⁴Vale também para indutâncias mútuas M_i .

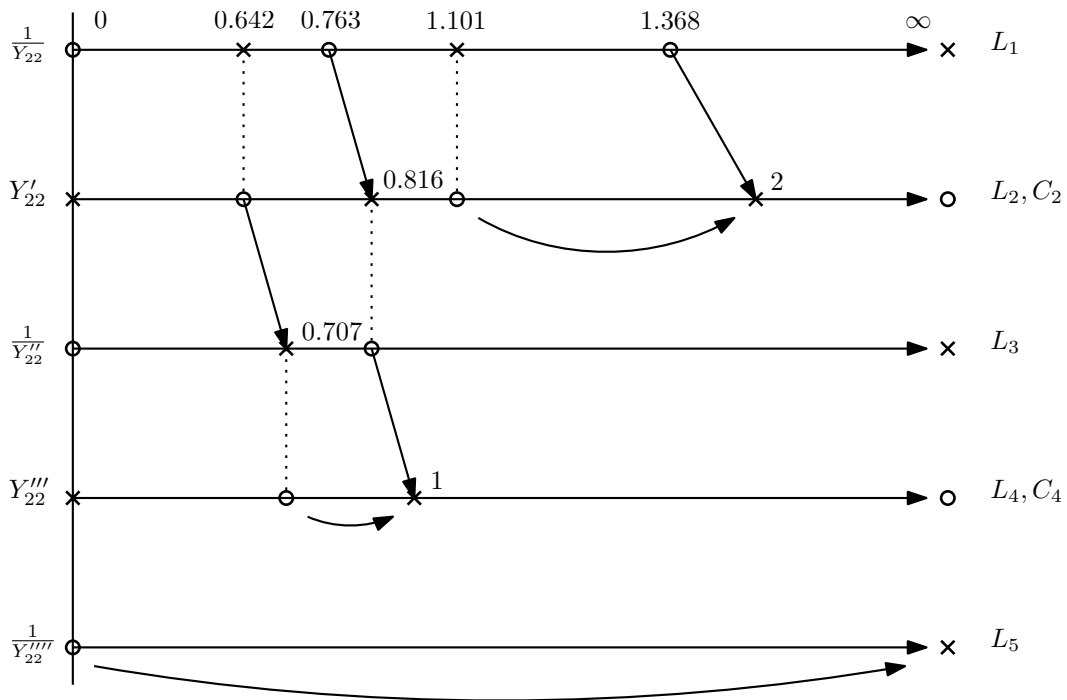


Figura 4.40: Mapa dos deslocamentos de zeros e extrações para a forma T do exemplo.

Nota: A medida chamada de “sensibilidade” é uma medida relativa, dividindo-se a variação da função de transferência pela variação de um parâmetro. A sensibilidade do módulo da função de transferência em relação à variação de um parâmetro x_i é então:

$$S_{x_i}^{|T(j\omega)|} = \frac{x_i}{|T(j\omega)|} \frac{\partial |T(j\omega)|}{\partial x_i}$$

Estas medidas dão números que devem ser menores que 1 para que não haja amplificação de erro. No caso, ficam próximas de zero na banda passante do filtro para os elementos reativos, sendo zero nos máximos de ganho, e dão valores próximos de ± 0.5 para as terminações, com exatamente este valor nos máximos de ganho. Uma discussão mais completa sobre análise de sensibilidades está em um capítulo adiante⁵.

4.4.1 Síntese de redes simétricas⁶

Uma forma relativamente simples de obter uma rede LC duplamente terminada aparece quando a rede admite uma estrutura fisicamente simétrica [12]. Dividindo a rede em duas metades idênticas, com o uso de equivalente Norton na entrada, já que se supõe entrada e saída em tensão, como na figura 4.43, pode-se escrever, para o bloco da esquerda:

- 1) $z_{11}I + z_{12}I_x = V_1$
- 2) $z_{21}I + z_{22}I_x = V_x$

⁵Material opcional.

⁶As seções seguintes não são usualmente estudadas no curso, mas são colocadas aqui para complementar o assunto.

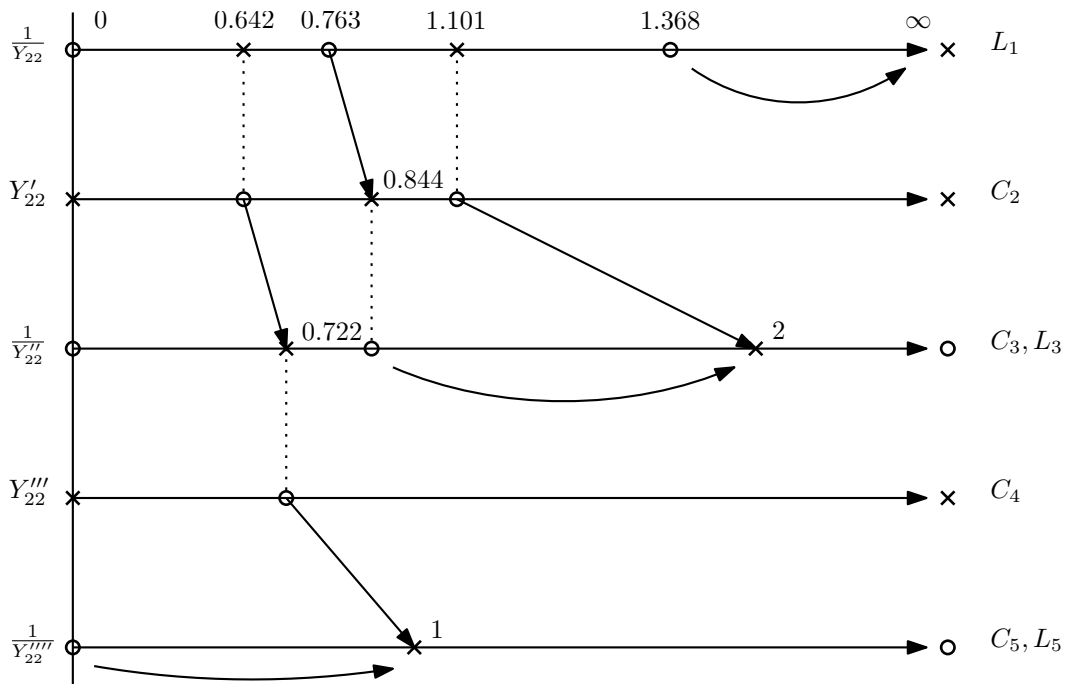


Figura 4.41: Mapa dos deslocamentos de zeros e extrações para a forma π do exemplo.

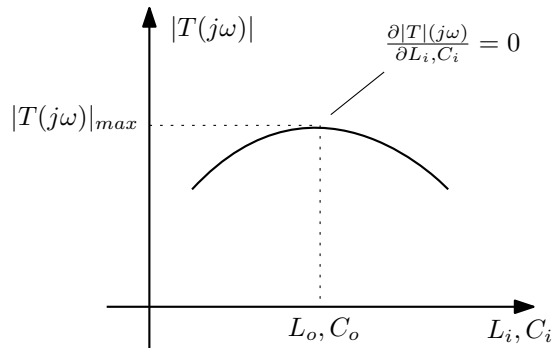


Figura 4.42: Erro devido a um elemento reativo L_i, C_i em torno do valor nominal L_o, C_o em uma frequência de máxima transferência de potência em uma rede LC duplamente terminada.

e para o bloco da direita:

$$3) z_{11}0 - z_{12}I_x = V_o$$

$$4) z_{21}0 - z_{22}I_x = V_x$$

Combinando 3) com 4):

$$5) V_x = \frac{z_{22}}{z_{12}} V_o$$

Substituindo 5) e 3) em 2):

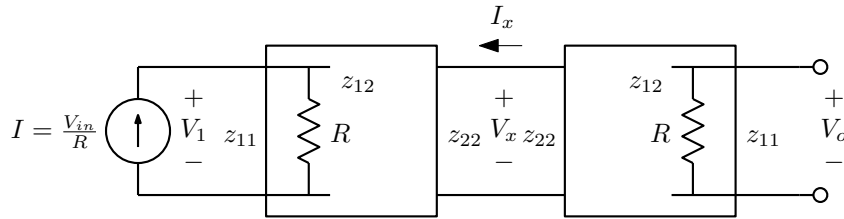


Figura 4.43: Rede simétrica partida em duas metades iguais.

$$z_{21}I = \left(\frac{z_{22}}{z_{12}} + \frac{z_{22}}{z_{12}} \right) V_o \Rightarrow V_o = \frac{z_{21}z_{12}}{2z_{22}}I$$

Como a rede é recíproca, $z_{12} = z_{21}$, e como $I = \frac{V_{in}}{R}$, resulta:

$$T(s) = \frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{z_{12}^2}{2Rz_{22}}$$

Escrevendo $z_{12} = \frac{N_{12}}{D}$ e $z_{22} = \frac{N_{22}}{DD'}$, onde D' tem como raízes os possíveis polos privados de z_{22} (que pertencem só a z_{22} e não nos demais parâmetros z , causados por um ramo em série na porta 2, no centro da rede), tem-se:

$$T(s) = \frac{N_{12}^2 D'}{2RN_{22}D}$$

de onde se conclui que:

- Os polos de $T(s)$ são os zeros e os polos não privados de z_{22} .
- Cada zero de z_{12} causa dois zeros em $T(s)$.
- polos privados de z_{22} criam zeros simples em $T(s)$.

A primeira propriedade diz que para se obter a impedância de meia rede z_{22} basta separar os polos de $T(s)$ em polos e zeros de uma impedância RLCM realizável. A impedância deve então ser expandida de forma a criar os zeros desejados, todos duplos. Zeros simples podem ser gerados pelo polinômio $D'(s)$, como circuito inicial em série com a impedância.

Exemplo: Seja obter um filtro de Butterworth de 3a. ordem normalizado, com corte de 3.0103 dB em 1 rad/s. A função de transferência necessária é:

$$T(s) = \frac{k}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

A impedância de meia rede pode ser então de duas formas, com $R = 1 \Omega$:

$$Z_a(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

$$Z_b(s) = \frac{s^2+s+1}{s+1}$$

A expansão destas impedâncias pode ser feita pelo método “chop-chop”, extraindo-se o que é visto em frequência infinita. No caso, é evidente que as impedâncias podem ser escritas como:

$$Z_a(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{s+1}}$$

$$Z_b(s) = s + \frac{1}{s+1}$$

o que corresponde às impedâncias e redes completas mostradas na figura 4.44.

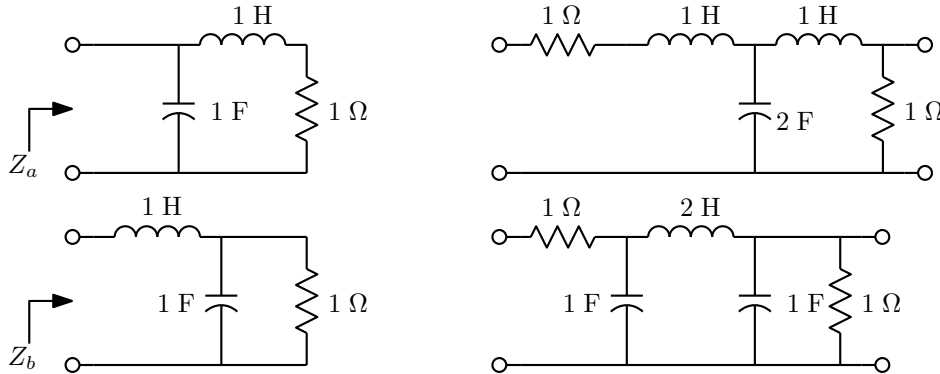


Figura 4.44: Redes simétricas realizando um filtro de Butterworth.

Este método gera os filtros polinomiais de ordem ímpar com zeros de atenuação sobre o eixo imaginário diretamente na forma de redes LC terminadas em resistores. Todos os filtros de Butterworth e de Chebyshev duplamente terminados de ordem ímpar, por exemplo, podem ser obtidos assim. A escolha correta dos polos e zeros da impedância de meia rede sobre um arco de polos parece ser sempre de forma alternada, como na figura 4.45. Para outras aproximações, o processo pode permitir outras soluções, a partir de várias distribuições de polos e zeros gerando impedâncias válidas. Como é possível colocar um tanque LC no centro da rede para ter o polinômio D' , é possível obter também filtros com um par de zeros de transmissão imaginários, como os filtros elípticos ou de Chebyshev inversos de ordem 3. Outras aproximações com zeros finitos de transmissão, de ordem mais alta, exigem zeros duplos.

Nos casos em que existe a realização simétrica LC duplamente terminada, os parâmetros Z da rede LC podem ser obtidos. Uma rede de duas portas ligada a um resistor na porta 2, apresenta a impedância vista pela porta 1:

$$Z_{metade}(s) = \frac{D_z/R + z_{11}}{z_{22}/R + 1}$$

onde $D_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$. Comparando com a impedância de meia rede montada com os polos da função de transferência, que deve resultar em uma razão de polinômios completos (com raízes no SPLE), surgem duas possíveis identificações:

$$Z_{metade}(s) = \frac{N_o + N_e}{D_e + D_o} = \frac{N_o/D_o + N_e/D_o}{D_e/D_o + 1}$$

$$Z_{metade}(s) = \frac{N_e + N_o}{D_o + D_e} = \frac{N_e/D_e + N_o/D_e}{D_o/D_e + 1}$$

de onde surgem duas possíveis identificações:

$$z_{11} = N_e/D_o; \quad z_{22} = RD_e/D_o$$

$$z_{11} = N_o/D_e; \quad z_{22} = RD_o/D_e$$

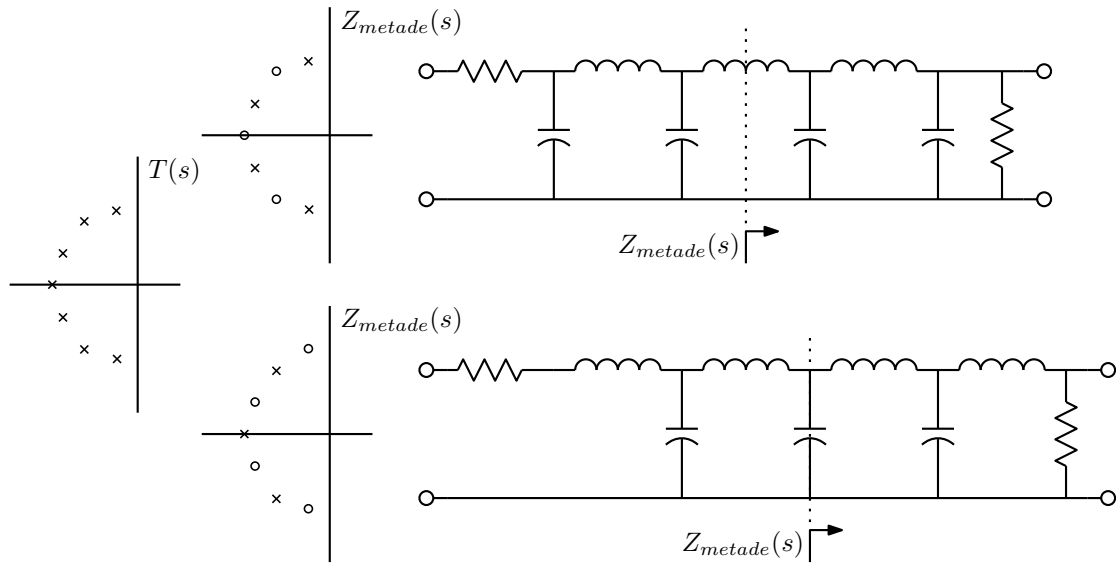


Figura 4.45: Escolhas dos polos e zeros para montar a impedância de meia rede um filtro polinomial de 7a. ordem.

Qual a correta depende da topologia escolhida. Note-se que ainda deve ocorrer que $D_z/R = N_o/D_o$ ou $D_z/R = N_e/D_e$. Nada garante que estas impedâncias sejam realizáveis, pois as partes pares e ímpares vem de polinômios diferentes. No exemplo do filtro de Butterworth anterior, se $Z_a = (s + 1)/(s^2 + s + 1)$ for usada, tem-se que a identificação correta é a primeira, $z_{11} = N_e/D_o = 1/s$ e $z_{22} = D_e/D_o = (s^2 + 1)/s$. Se for usada $Z_b = (s^2 + s + 1)/(s + 1)$, a identificação correta é a mesma, $z_{11} = N_e/D_o = (s^2 + 1)/s$ e $z_{22} = D_e/D_o = 1/s$.

4.4.1.1 Redes simétricas com níveis de impedância diferentes nas duas metades

Observando a dedução acima, e a modificando de forma que os parâmetros Z da rede do lado direito da figura 4.43 sejam multiplicados por um fator k , chega-se à conclusão de que a função de transferência vale:

$$T(s) = \frac{N_{12}^2 D'}{\frac{k+1}{k} R N_{22} D}$$

A síntese é então idêntica à descrita no caso simétrico, apenas com o nível de impedância da metade direita, inclusive a terminação, multiplicado por k . Resulta um filtro idêntico ao simétrico, com ganho multiplicado por $\frac{2k}{k+1}$. Estas redes não tem mais máxima transferência de potência, no caso LC duplamente terminado, e é então de se esperar que apresentem maiores sensibilidades à variação dos componentes.

Exemplo: O filtro de Butterworth normalizado da figura 4.44 com terminação de saída arbitrária R_l fica com a forma da figura 4.46.

Note-se que existem outras soluções, como se verá adiante. Esta forma não se reduz à realização simplesmente terminada.

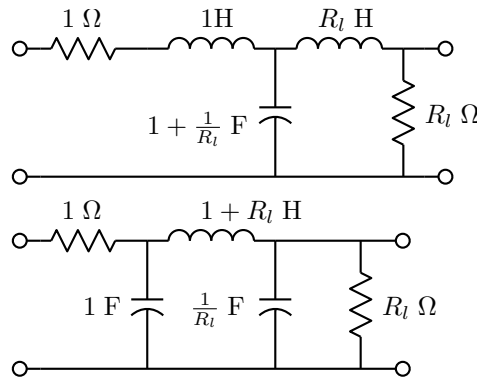


Figura 4.46: Filtros de Butterworth normalizados de ordem 3 com terminação de saída arbitrária.

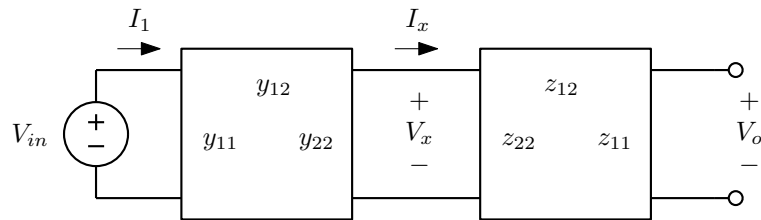


Figura 4.47: Rede antimétrica partida em duas metades duais.

4.4.2 Síntese de redes antimétricas

Uma forma similar a esta leva à realização de redes antimétricas [12], onde uma metade é a dual da outra, de ordem par (figura 4.47). Considerando também $z_{12} = -y_{12} = \frac{N_{12}}{D}$ e $z_{22} = y_{22} = \frac{N_{22}}{DD'}$, para o bloco da esquerda pode-se escrever:

$$\begin{aligned} y_{11}V_{in} + y_{12}V_x &= I_1 \\ y_{12}V_{in} + y_{22}V_x &= -I_x \end{aligned}$$

o que corresponde a fazer, pela dualidade:

$$\begin{aligned} z_{11}V_{in} - z_{12}V_x &= I_1 \\ -z_{12}V_{in} + z_{22}V_x &= -I_x \end{aligned}$$

e para o bloco da direita:

$$\begin{aligned} z_{11}0 + z_{12}I_x &= V_o \\ z_{21}0 + z_{22}I_x &= V_x \end{aligned}$$

Combinando estas relações, a função de transferência fica com a forma:

$$T(s) = \frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{z_{12}^2}{1 + z_{22}^2} = \frac{N_{12}^2 D'^2}{N_{22}^2 + (DD')^2}$$

de onde se conclui que:

- polos privados de z_{22} são zeros duplos de $T(s)$.
- Zeros de z_{12} são zeros duplos de $T(s)$.
- Se $Z_{metade} = A/B$, $T(s)$ tem como polos as raízes de $A^2 + B^2 = (A + jB)(A - jB)$.

A impedância de meia rede é então obtida montando-se o polinômio complexo $A + jB$, ou $A - jB$, a partir de uma raiz de cada par de polos complexos de T , que deve possuir apenas pares de polos complexos para ser realizável desta forma. A impedância a expandir é $Z_{metade} = A/B$. A escolha correta das raízes em um arco de polos é também de forma alternada, começando pelo polo de parte imaginária mais negativa, para gerar B positivo, como mostrado na figura 4.48. Esta forma realiza corretamente todos os filtros polinomiais de ordem par com zeros de atenuação no eixo imaginário, como os filtros de Butterworth e de Chebyshev. Nestes casos também é possível obter os parâmetros da rede LC, da mesma forma feita no caso simétrico.

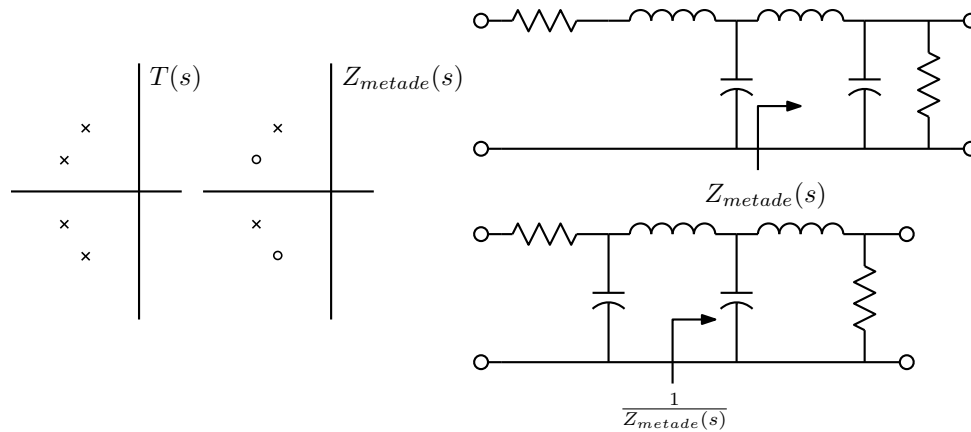


Figura 4.48: Escolha dos polos e zeros para montar a impedância de meia rede em uma rede antissimétrica de 4a. ordem.

Exemplo: Seja obter um filtro de Butterworth de 4a. ordem normalizado, com corte de 3.0103 dB em 1 rad/s. Os polos a realizar estão sobre um círculo de raio unitário, separados por ângulos de 45°:

$$p_{1,2} = -\cos 67.5^\circ \pm j \sin 67.5^\circ = -a_1 \pm jb_1$$

$$p_{3,4} = -\cos 22.5^\circ \pm j \sin 22.5^\circ = -a_2 \pm jb_2$$

O polinômio $A + jB$ vale então:

$$A + jB = (s + a_1 + jb_1)(s + a_2 - jb_2) = s^2 + (a_1 + a_2)s + a_1a_2 + b_1b_2 + j((b_1 - b_2)s + a_2b_1 - a_1b_2)$$

e a impedância de meia rede vale:

$$Z_{metade}(s) = \frac{s^2 + (a_1 + a_2)s + a_1a_2 + b_1b_2}{(b_1 - b_2)s + a_2b_1 - a_1b_2} = \frac{s^2 + 1.3066s + 0.70711}{0.54120s + 0.70711}$$

A realização é facilmente obtida por expansão em fração contínua. A rede obtida e sua dual são então combinadas como na figura 4.49.

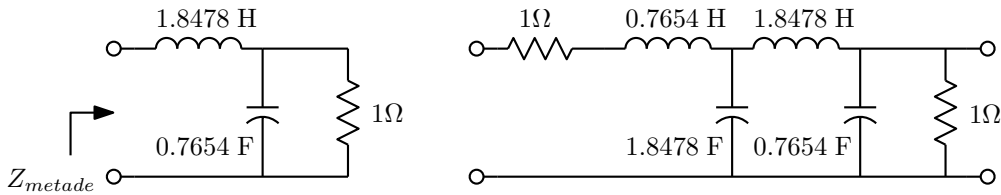


Figura 4.49: Rede antimétrica realizando um filtro de Butterworth de 4a. ordem.

4.4.2.1 Redes simétricas com resistores imaginários

Em [13] é mostrado que as sínteses de filtros com estrutura antimétrica se reduzem ao caso dos filtros com estrutura simétrica se forem admitidos resistores imaginários, em uma outra interpretação do mesmo processo de síntese. É simples verificar que as redes de resistores imaginários da figura 4.50 atuam como inversores de impedância, como se fossem giradores. Se o processo de síntese de redes simétricas for aplicado a um filtro polinomial de ordem par com todos os polos complexos, com polos e zeros da impedância tomados alternadamente ao longo dos polos do filtro, a impedância de meia rede resulta uma razão de polinômios complexos conjugados na forma:

$$Z_m(s) = \frac{A(s) + jB(s)}{A(s) - jB(s)} \text{ ou } Z_m(s) = \frac{A(s) - jB(s)}{A(s) + jB(s)}$$

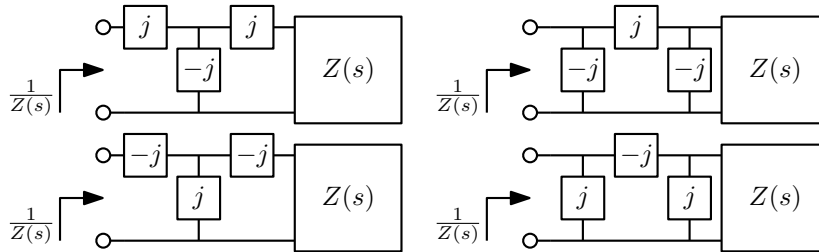


Figura 4.50: Inversores de impedância feitos com resistores imaginários.

Multiplicando $Z_m(s)$ por uma resistência imaginária adequada, $\pm 2j \Omega$ ou $\pm \frac{1}{2}j \Omega$ como na figura 4.51, pode-se criar uma rede tal que quando ligada a outra idêntica gera uma rede simétrica com um dos blocos da figura 4.50 no centro. O girador imaginário pode então ser eliminado pela dualização de uma das metades, gerando uma rede antimétrica.

Exemplo: Seja a realização de um filtro de Chebyshev modificado, com zero de atenuação na origem, de ordem 4, com banda passante de 1 rad/s e “ripple” de 2 dB [13]⁷. Os polos da função de transferência são:

$$-0.123657 \pm 0.951817j; \quad -0.390993 \pm 0.301070j$$

Tomando polos alternados para montar a impedância de meia rede, começando pelo de maior módulo como polo, e multiplicando-a por $-\frac{1}{2}j$, vem:

⁷Exemplo III.5.

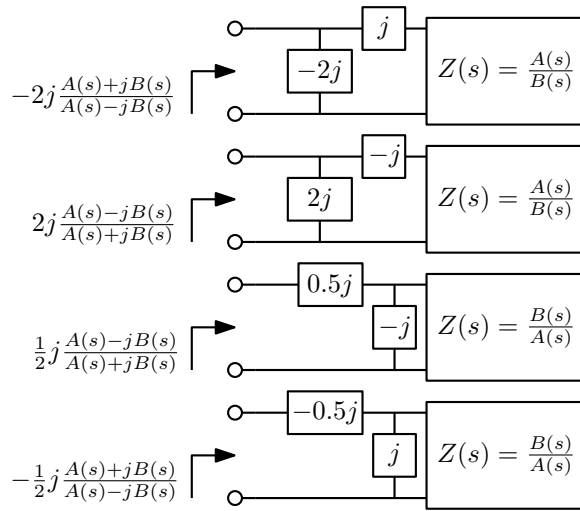


Figura 4.51: Transformações de impedâncias reais por metades de giradores imaginários.

$$Z_{metade}(s) = -\frac{1}{2}j \frac{s^2 + (0.514669 + 0.650747j)s + 0.334919 + 0.334919j}{s^2 + (0.514669 - 0.650747j)s + 0.334919 - 0.334919j}$$

O que resulta na impedância real a realizar:

$$Z'_{metade}(s) = \frac{0.650747s + 0.334919}{s^2 + 0.514669s + 0.334919}$$

As realizações são mostradas na figura 4.52.

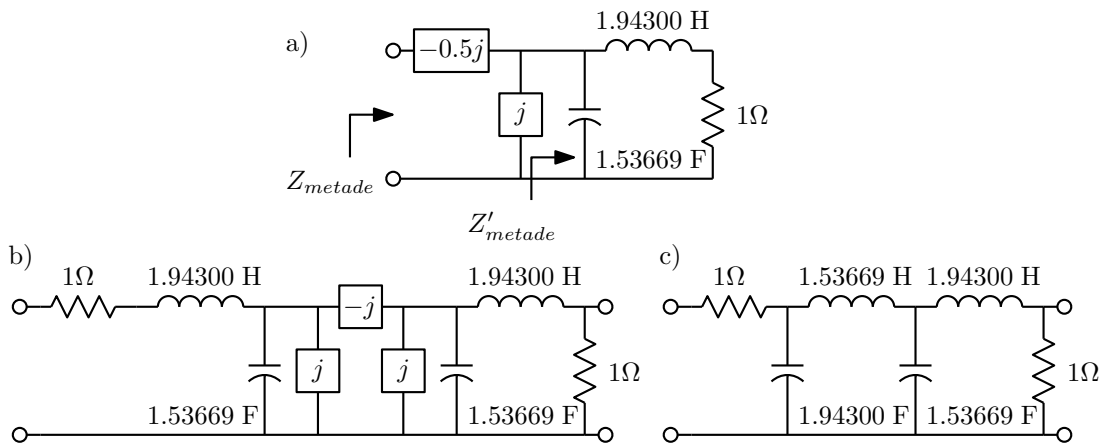


Figura 4.52: a) Impedâncias de meia rede, complexa e real. Realizações do filtro de Chebyshev modificado, com (b) e sem (c) o girador imaginário.

4.4.3 Forma geral da síntese de redes LC duplamente terminadas

A forma geral da síntese, sem exigir simetria ou antimetria, recai também na obtenção dos parâmetros Z ou Y da rede LC, como no caso simplesmente terminado, e em expansão das impedâncias geradas. A dedução do processo [11], um tanto longa, está ligada à teoria das aproximações, envolvendo duas funções:

- A função de transdução $H(s)$, que é o inverso da função de transferência a realizar, escalada para que $\min |H(j\omega)| = 1$.
- A função característica $K(s)$, relacionada com $H(s)$ pela “equação de Feldtkeller”, $|H(j\omega)|^2 = 1 + |K(j\omega)|^2$, ou $H(s)H(-s) = 1 + K(s)K(-s)$.

As duas funções possuem o mesmo denominador $P(s)$, cujas raízes são os zeros finitos de transmissão a realizar. Assim, $H(s) = E(s)/P(s)$ e $K(s) = F(s)/P(s)$, e a relação entre os três polinômios, da equação de Feldtkeller, é $E(s)E(-s) = P(s)P(-s) + F(s)F(-s)$. Com esta equação pode-se obter uma função da outra montando-se $E(s)$ a partir das raízes no SPLE do termo à direita (as raízes de $E(s)$ são os polos a realizar), ou pode-se montar $F(s)$ a partir de metade das raízes de $E(s)E(-s) - P(s)P(-s)$, agora sem restrição de estabilidade e talvez com várias soluções. A geração de aproximações para filtros usa estas mesmas funções, usualmente partindo de $K(s)$, e gerando $H(s)$.

Por exemplo, a aproximação de Butterworth parte de $K(j\omega) = \epsilon\omega^n$, e a aproximação de Chebyshev parte de $K(j\omega) = \epsilon C_n(\omega)^n$, onde $C_n(\omega)$ é o polinômio de Chebyshev de ordem n .

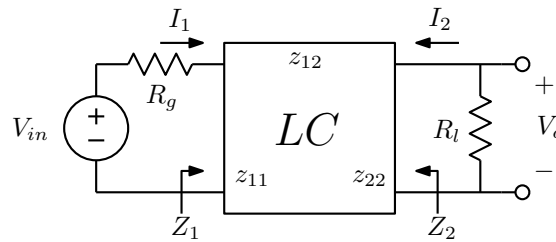


Figura 4.53: Rede LC duplamente terminada.

Os parâmetros Z ou Y da rede LC entre as terminações (ver figura 4.53) podem ser obtidos a partir destas duas funções. Uma análise com parâmetros Z em transformada de Laplace da rede leva a:

$$\begin{aligned} z_{11}I_1 + z_{12}I_2 &= V_{in} - R_g I_1 \\ z_{12}I_1 + z_{22}I_2 &= -I_2 R_l \end{aligned}$$

onde já foi considerado que a rede é recíproca, com $z_{12} = z_{21}$. Resolvendo para I_1 e I_2 :

$$I_1 = V_{in} \frac{z_{22} + R_l}{(z_{11} + R_g)(z_{22} + R_l) - z_{12}^2}; \quad I_2 = -V_{in} \frac{z_{12}}{(z_{11} + R_g)(z_{22} + R_l) - z_{12}^2}$$

Calculando Z_1 e Z_2 , impedâncias vistas nas duas portas da rede LC, incluindo a terminação do outro lado:

$$Z_1 = \frac{V_{in} - R_g I_1}{I_1} = z_{11} - \frac{z_{12}^2}{z_{22} + R_l}; \quad Z_2 = z_{22} - \frac{z_{12}^2}{z_{11} + R_g}$$

onde Z_2 foi obtida simplesmente trocando-se os índices dos parâmetros e a terminação. A função de transdução $H(s)$ é o inverso da função de transferência $V_o(s)/V_{in}(s)$, escalada de forma a que o mínimo de seu módulo quando $s = j\omega$ seja unitário. O fator de escalamento pode ser obtido, no caso de máxima

transferência entre as terminações, considerando-se que a potência máxima entregue à impedância Z_1 , P_{max} , ocorre quando $Z_1(j\omega) = R_g$, e que esta mesma potência é entregue à terminação de saída R_l , já que a rede LC é sem perdas.

$$P_{max} = \frac{V_{in\ rms}^2}{4R_g} = \frac{V_o\ rms^2}{R_l} \Rightarrow \max \left| \frac{V_o}{V_{in}}(j\omega) \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_l}{R_g}}$$

A função $H(s)$ é então:

$$H = \frac{\max |(V_o/V_{in})(j\omega)|}{V_o/V_{in}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_l}{R_g}} \frac{V_{in}}{-I_2 R_l}$$

Substituindo a corrente I_2 calculada tem-se $H(s)$ em função dos parâmetros da rede:

$$H = \frac{(z_{11} + R_g)(z_{22} + R_l) - z_{12}^2}{2\sqrt{R_g R_l} z_{12}}$$

Uma outra relação vem da consideração de que, em uma frequência qualquer, a potência dissipada na terminação de saída vale $P_2 = P_{max} - P_r$, onde P_r é a potência refletida por Z_1 :

$$\frac{P_{max}}{P_2} = \frac{P_r}{P_2} + 1 = \frac{V_{in\ rms}^2 / (4R_g)}{V_o\ rms^2 / R_l} = \frac{R_l}{4R_g} \frac{V_{in\ rms}^2}{V_o\ rms^2} = |H(j\omega)|^2$$

Comparando com a equação de Feldtkeller $|H(j\omega)|^2 = |K(j\omega)|^2 + 1$ vem $|K(j\omega)|^2 = \frac{P_r}{P_2}$. A potência P_r pode ser calculada multiplicando a potência P_{max} pelo quadrado do módulo do coeficiente de reflexão de Z_1 , ρ_1 :

$$P_r = P_{max} \left| \frac{R_g - Z_1(j\omega)}{R_g + Z_1(j\omega)} \right|^2 = P_{max} |\rho_1|^2$$

Portanto:

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{P_{max}}{P_2} |\rho_1(j\omega)|^2 = |H(j\omega)|^2 |\rho_1(j\omega)|^2$$

Usando que $|K(j\omega)|^2 = K(s)K(-s)$ quando $s = j\omega$, e o mesmo para H e ρ_1 :

$$K(s) = H(s)\rho_1(s) = H(s) \frac{R_g - Z_1(s)}{R_g + Z_1(s)}$$

Substituindo Z_1 já calculada a função $K(s)$ é obtida, com uma forma parecida com a de $H(s)$, mas diferente:

$$K = \frac{(R_g - z_{11})(R_l + z_{22}) + z_{12}^2}{2\sqrt{R_g R_l} z_{12}}$$

Ainda se tem duas equações para três incógnitas. A relação que falta é a consideração de que os parâmetros Z são todos de uma rede LC, e portanto funções ímpares de s . Separando as partes par e ímpar de $H(s)$ e $K(s)$:

$$H = \frac{z_{11}z_{22} - z_{12}^2 + R_g R_l}{2\sqrt{R_g R_l} z_{12}} + \frac{R_g z_{22} + R_l z_{11}}{2\sqrt{R_g R_l} z_{12}} = H_o + H_e$$

$$K = \frac{-(z_{11}z_{22} - z_{12}^2) + R_g R_l}{2\sqrt{R_g R_l} z_{12}} + \frac{R_g z_{22} - R_l z_{11}}{2\sqrt{R_g R_l} z_{12}} = K_o + K_e$$

Somando e subtraindo estas funções:

$$H_o + K_o = \frac{\sqrt{R_g R_l}}{z_{12}}; \quad H_o - K_o = \frac{z_{11} z_{22} - z_{12}^2}{\sqrt{R_g R_l} z_{12}}; \quad H_e + K_e = \sqrt{\frac{R_l}{R_g}} z_{22}; \quad H_e - K_e = \sqrt{\frac{R_l}{R_g}} \frac{z_{11}}{z_{12}}$$

É simples então isolar os parâmetros Z:

$$z_{12} = \frac{\sqrt{R_g R_l}}{H_o + K_o}; \quad z_{11} = R_g \frac{H_e - K_e}{H_o + K_o}; \quad z_{22} = R_l \frac{H_e + K_e}{H_o + K_o}; \quad \Delta_z = z_{11} z_{22} - z_{12}^2 = R_g R_l \frac{H_o - K_o}{H_o + K_o}$$

Pode-se também substituir estas expressões nas fórmulas deduzidas para Z_1 e Z_2 , obtendo:

$$Z_1 = R_g \frac{H - K}{H + K}; \quad Z_2 = R_l \frac{H + K_e - K_o}{H - K_e + K_o}$$

Os parâmetros Y podem ser obtidos a partir dos parâmetros Z, tomando formas similares:

$$y_{12} = \frac{1}{\sqrt{R_g R_l}} \frac{1}{H_o - K_o}; \quad y_{11} = \frac{1}{R_g} \frac{H_e + K_e}{H_o - K_o}; \quad y_{22} = \frac{1}{R_l} \frac{H_e - K_e}{H_o - K_o}; \quad \Delta_y = y_{11} y_{22} - y_{12}^2 = \frac{1}{R_g R_l} \frac{H_o + K_o}{H_o - K_o}$$

Considerando que $H = E/P$ e $K = F/P$, e que polinômio $P(s)$ é sempre par, P_e ou ímpar, P_o , já que redes LC em escada somente geram zeros de transmissão em zero ou em pares conjugados imaginários (com outras estruturas LC zeros simétricos em $\pm\sigma$ e em simetria quadrantal $\pm\sigma \pm j\omega$ são também possíveis, mas a restrição de paridade também vale):

$$H_o = \frac{E_e}{P_o} \text{ ou } \frac{E_o}{P_e}; \quad H_e = \frac{E_o}{P_o} \text{ ou } \frac{E_e}{P_e}; \quad K_o = \frac{F_e}{P_o} \text{ ou } \frac{F_o}{P_e}; \quad K_e = \frac{F_o}{P_o} \text{ ou } \frac{F_e}{P_e}$$

Resulta a tabela da figura 4.54, que permite obter os parâmetros Z ou Y da rede LC entre as terminações R_g e R_l , a partir das partes pares e ímpares de $E(s)$ e $F(s)$.

	$P = P_e$	$P = P_o$
$\frac{z_{11}}{R_g}$	$\frac{E_e - F_e}{E_o + F_o}$	$\frac{E_o - F_o}{E_e + F_e}$
$\frac{z_{22}}{R_l}$	$\frac{E_e + F_e}{E_o + F_o}$	$\frac{E_o + F_o}{E_e + F_e}$
$y_{11} R_g$	$\frac{E_e + F_e}{E_o - F_o}$	$\frac{E_o + F_o}{E_e - F_e}$
$y_{22} R_l$	$\frac{E_e - F_e}{E_o - F_o}$	$\frac{E_o - F_o}{E_e - F_e}$

Figura 4.54: Possíveis identificações dos parâmetros da rede LC para a síntese LC duplamente terminada.

Note-se na tabela que se $F(s)$ é puramente ímpar, com $F_e(s) = 0$, com terminações iguais e $P(s)$ par resulta $z_{11} = z_{22}$, e a rede pode ficar simétrica (a simetria pode ser quebrada na realização de zeros finitos de transmissão). Se $F(s)$ é puramente par, com $F_o(s) = 0$, com terminações duais, $R_g = 1/R_l$, e $P(s)$

par, resulta $z_{11} = y_{22}$ e a rede fica antimétrica. Isto acontece em todas as aproximações passa-baixas de Butterworth e Chebyshev, por exemplo.

Das quatro imitâncias possíveis, deve-se escolher uma que seja do grau da estrutura desejada. As subtrações podem cancelar os termos de grau mais alto de $E(s)$ e $F(s)$, gerando redes em que o elemento final não é visto. Com $F(s)$ tendo o coeficiente de grau maior positivo, a escolha que sempre vê toda a rede é a de z_{22} . Se o sinal de $F(s)$ for trocado, y_{22} vê toda a rede (trocar o sinal de $F(s)$ é sempre possível, e gera a rede com estrutura dual). Veja os exemplos da figura 4.55.

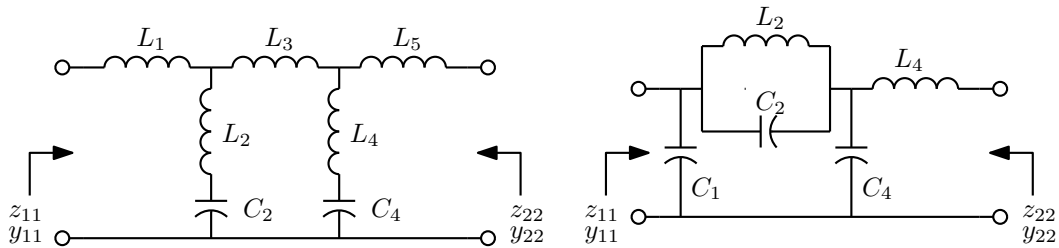


Figura 4.55: Escolha da imitância a expandir na síntese duplamente terminada. Na rede da esquerda z_{11} não gera L_5 , z_{22} não gera L_1 , e y_{11} e y_{22} geram toda a rede. Na rede da direita, de ordem par, z_{11} não gera L_4 , y_{22} não gera C_1 , e y_{11} e z_{22} geram toda a rede.

Exemplo: Para o filtro de Butterworth de terceira ordem com corte de 3.0103 dB em 1 rad/s já realizado em forma simétrica, tem-se $K(j\omega) = \omega^3$, e as funções necessárias são:

$$\begin{aligned} E(s) &= s^3 + 2s^2 + 2s + 1 \\ F(s) &= s^3 \\ P(s) &= 1 \end{aligned}$$

e as impedâncias z_{11} ou z_{22} valem:

$$\frac{z_{11}(s)}{R_g} = \frac{z_{22}(s)}{R_l} = \frac{E_e \mp F_e}{E_o + F_o} = \frac{E_e}{E_o + F_o} = \frac{2s^2 + 1}{2s^3 + 2s}$$

A realização com terminações unitárias é a da figura 4.56. A forma em T é obtida se for usado $K(s) = -s^3$.

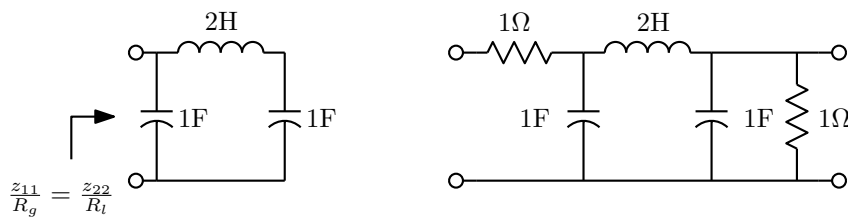


Figura 4.56: Filtro de Butterworth de 3a. ordem realizado pelo método geral para síntese LC duplamente terminada.

Exemplo: Seja obter o filtro de Butterworth de quarta ordem normalizado, já realizado em forma antimétrica anteriormente. Com os polos já listados, e $K(j\omega) = \omega^4$, as funções necessárias são:

$$\begin{aligned} E(s) &= s^4 + 2.6131s^3 + 3.4142s^2 + 2.6131s + 1 \\ F(s) &= s^4 \\ P(s) &= 1 \end{aligned}$$

e a impedância z_{22} , que é de ordem 4, enquanto z_{11} é de ordem 3 devido à subtração dos termos em s^4 , é obtida como:

$$\frac{z_{22}(s)}{R_l} = \frac{E_e + F_e}{E_o + F_o} = \frac{2(s^4 + 1.7071s^2 + 0.5)}{2.6131(s^3 + s)}$$

As terminações são iguais devido ao ganho máximo em frequência zero. Com $R_g = R_l = 1 \Omega$ a rede fica com $z_{22} = y_{11}$, antissimétrica. A expansão de z_{22} na primeira forma de Cauer resulta na estrutura da figura 4.57, que é idêntica à anteriormente obtida (figura 4.49), mas invertida. O filtro realizado é o mesmo, pois a rede é recíproca. A rede anterior poderia ser obtida trocando-se o sinal de $F(s)$.

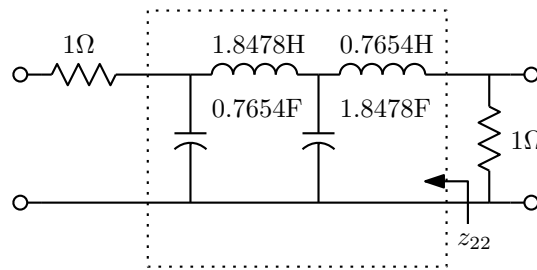


Figura 4.57: Filtro de Butterworth de 4a. ordem realizado pelo método geral para síntese LC duplamente terminada.

Este filtro tem máxima transferência de potência apenas em frequência zero, mas como é maximamente plano, as derivadas do módulo da função de transferência em relação aos valores dos elementos reativos são nulas para derivadas de ordens 1 a 4, para $\omega = 0$.

Exemplo: O filtro polinomial maximamente seletivo é o de Chebyshev, que tem função característica $K(j\omega) = \epsilon C_n(\omega)$, onde ϵ define a atenuação do filtro na borda da banda passante em 1 rad/s, e neste caso também os máximos de atenuação dentro da banda passante. Dada a máxima atenuação na banda passante, A_{max} decibéis, onde $A_{max} = 20 \log |H(j)|$, ϵ é obtido como:

$$|H(j)| = \sqrt{1 + \epsilon^2} \Rightarrow \epsilon = \sqrt{10^{0.1A_{max}} - 1}$$

Para um filtro de Chebyshev de quarta ordem com atenuação máxima de 1 dB, $C_4(\omega) = 8\omega^4 - 8\omega^2 + 1$ e $\epsilon = 0.508847$. Os filtros de Chebyshev de ordem par não apresentam máxima transferência de potência em $\omega = 0$, mas apenas nas ressonâncias na banda passante. As terminações são então necessariamente diferentes. As funções necessárias são então, com $H(s)$ obtida da solução da eq. de Feldtkeller:

$$\begin{aligned} E(s) &= s^4 + 0.95281s^3 + 1.4539s^2 + 0.74262s + 0.27563 \\ F(s) &= s^4 + s^2 + 0.125 \\ P(s) &= 0.24565 \end{aligned}$$

As impedância z_{22} da rede LC é obtida como:

$$\frac{z_{22}(s)}{R_l} = \frac{E_e + F_e}{E_o + F_o} = \frac{2(s^4 + 1.2270s^2 + 0.20031)}{0.95281(s^3 + 0.77940s)}$$

Note-se que $y_{11}R_g$ tem este mesmo valor, o que permitirá calcular as terminações necessárias. A expansão de z_{22} com $R_l = 1 \Omega$ resulta na rede da figura 4.58.

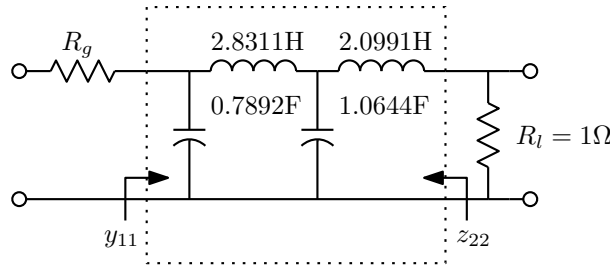


Figura 4.58: Filtro de Chebyshev de 4a. ordem realizado pelo método geral para síntese LC duplamente terminada. $R_g = 2.659723 \Omega$.

A terminação R_g pode ser obtida comparando-se o último elemento gerado pela expansão de z_{22}/R_l , $C_4 = 0.789199 \text{ F}$, com o primeiro elemento que seria gerado pela expansão de $y_{11}R_g$, $C'_1 = 2.099051 \text{ F}$, que são o mesmo capacitor, resultando em $R_g/R_l = C'_1/C_4 = 2.659723 \Omega$. A rede é antissimétrica se os níveis de impedância forem divididos por $\sqrt{R_g/R_l}$.

Exemplo: A aproximação elíptica de ordem par resulta em filtros sem zero de transmissão no infinito. O ganho constante em frequência infinita não pode ser obtido com uma rede LC duplamente terminada. Para isto, a aproximação é modificada para ter dois zeros de transmissão no infinito. Ver a figura 4.59.

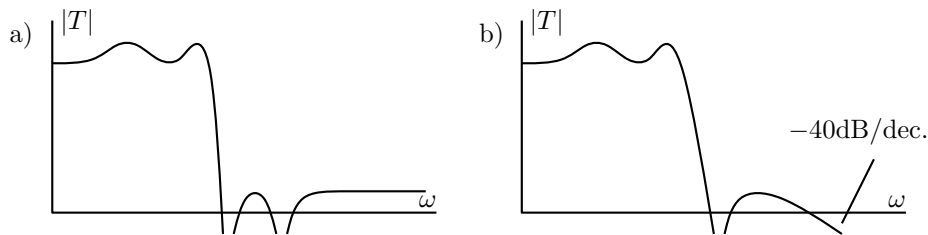


Figura 4.59: a) Filtro elíptico de quarta ordem. b) Versão modificada pelo deslocamento para o infinito do segundo par de zeros de transmissão.

Com especificações $A_{max} = 1 \text{ dB}$, $A_{min} = 40 \text{ dB}$ e corte em 1 rad/s , os polinômios da aproximação são obtidos como⁸:

$$P(s) = 0.0989(s^2 + 3.0096) \quad \text{zeros em } \pm 1.7348j$$

$$F(s) = s^4 + 1.053s^2 + 0.1514$$

$$E(s) = s^4 + 0.943s^3 + 1.495s^2 + 0.788s + 0.334$$

Com $R_l = 1 \Omega$, a terminação de entrada pode ser obtida observando-se que a impedância $Z_1(j\omega) = R_g$ em frequência zero. Resulta $R_g = \frac{E(0)+F(0)}{E(0)-F(0)} = 2.6597 \Omega$. z_{22} vale:

$$z_{22} = \frac{2(s^4 + 1.272s^2 + 0.242)}{0.942(s^3 + 0.836)}$$

⁸Estes filtros podem ser calculados pelo programa Elelsim.

A rede pode ser obtida pelo processo de deslocamento de zeros, resultando na estrutura da figura 4.60a. Naquele caso, os zeros finitos foram criados imediatamente pela extração do indutor de 1.774H. É possível também extrair primeiramente toda a indutância vista em frequência infinita como 2.122H, e então criar os zeros na forma π . Note-se que as duas versões são duais uma da outra, com diferentes níveis de impedância. Se for usado $F(s)$ negativo, as redes são geradas de forma invertida se $R_g = 1 \Omega$, e na forma dual se $R_g = 1/2.6597 \Omega$.

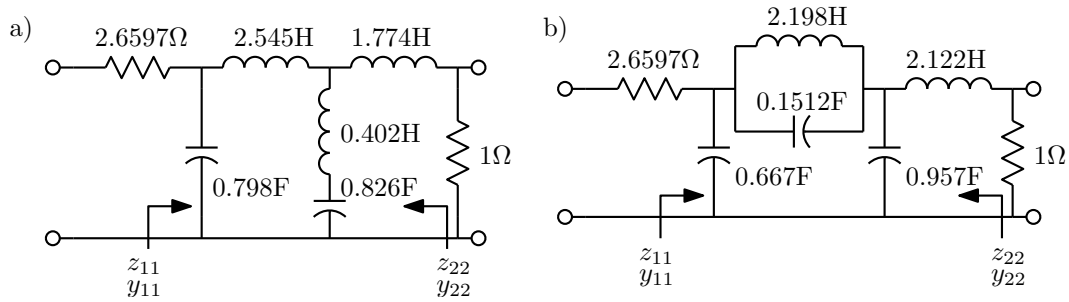


Figura 4.60: a) Filtro na forma T. b) Filtro na forma π .

O processo de deslocamento de zeros para redes duplamente terminadas é um pouco mais restrito que no caso das redes simplesmente terminadas. A estrutura da figura 4.37 não poderia ser usada, pois a inclusão de duas terminações aumentaria em um a ordem de complexidade da rede. O último passo da expansão tem que ser sempre uma extração completa de polo, no infinito naquele caso.

Exemplo: É interessante ver como explorar o processo de síntese na realização do filtro elíptico de quarta ordem normal, sem zeros de transmissão no infinito, que não tem solução LC duplamente terminada. Com as mesmas especificações de $A_{max} = 1 \text{ dB}$ e $A_{min} = 40 \text{ dB}$, corte em 1 rad/s, os polinômios necessários são obtidos como⁹:

$$P(s) = 0.0100005(s^4 + 15.0183s^2 + 32.1957) \quad \text{zeros em } \pm 3.5253j, \pm 1.6096j$$

$$F(s) = s^4 + 1.071s^2 + 0.1638$$

$$E(s) = 1.00005(s^4 + 0.9391s^3 + 1.5137s^2 + 0.8037s + 0.3612)$$

Seja usar $R_g = 1 \Omega$. A outra terminação vale $R_l = 1/2.65972 = 0.375979 \Omega$, e a impedância z_{22} é:

$$z_{22} = R_l \frac{E_e + F_e}{E_o + F_o} = \frac{0.7520(s^4 + 1.2925s^2 + 0.2625)}{0.9392(s^3 + 0.8559s)}$$

A expansão desta impedância, com deslocamentos de zeros para criar os dois zeros de transmissão, primeiramente o de maior frequência, produz a rede da figura 4.61a. Esta rede não pode estar completa, pois com duas terminações ela é de ordem 5. Considerando então a expansão de z_{11} :

$$z_{11} = R_g \frac{E_e - F_e}{E_o + F_o} = \frac{0.00005(s^4 + 8848.65s^2 + 3948.20)}{0.9392(s^3 + 0.8559s)}$$

A expansão com a geração dos zeros, começando pelo de menor frequência, gera a estrutura da figura 4.61b, aceitando-se o indutor negativo gerado pelo primeiro deslocamento. O resto da rede é idêntica à gerada por z_{22} . A realização completa é portanto a da figura 4.61c.

⁹Os cálculos devem ser feitos com mais dígitos que os mostrados.

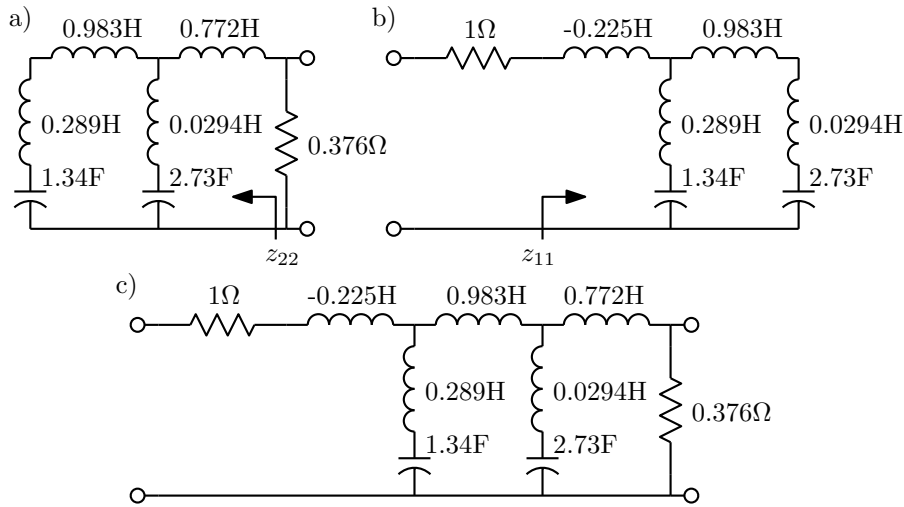


Figura 4.61: a) Expansão de z_{22} . b) Expansão de z_{11} . c) Filtro completo.

O indutor negativo com aquele valor particular é o que permite reduzir a ordem do circuito. É simples verificar a equivalência da rede da figura 4.61c com a da figura 4.62. O circuito indutivo foi separado em dois “Ts” de indutores e convertido em dois transformadores, que resultam com acoplamento cerrado. Assim, a ordem do circuito cai para 4, e em alta frequência a estrutura se reduz a dois transformadores ideais em cascata entre as terminações, produzindo o ganho constante em frequência infinita da aproximação elíptica.

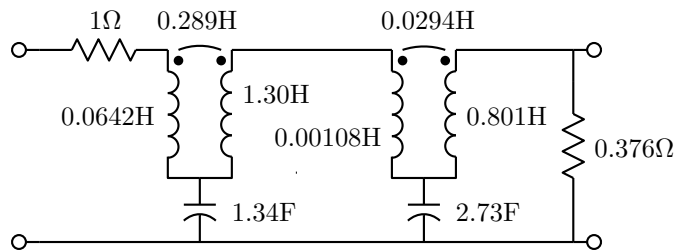


Figura 4.62: a) Rede RLCM duplamente terminada que realiza um filtro elíptico de quarta ordem. Os dois transformadores tem $k = 1$.

As expansões de y_{11} ou de y_{22} geram a rede completa, desde que se ignore o fato da impedância a expandir não ter polo no infinito para o deslocamento de zeros e se aceite elementos negativos. Note-se que a rede de transformadores apresenta um curto-circuito em alta-frequência para estes parâmetros, correspondendo aos polos de admitância no infinito deles.

$$y_{11} = \frac{1}{R_g} \frac{E_e + F_e}{E_o - F_o} = \frac{2.00005(s^4 + 1.2925s^2 + 0.2625)}{0.9392(s^3 + 0.8559s)}$$

$$y_{22} = \frac{1}{R_l} \frac{E_e - F_e}{E_o - F_o} = \frac{0.000133(s^4 + 8848.65s^2 + 3948.20)}{0.9392(s^3 + 0.8559s)}$$

O ganho CC do filtro vale $\frac{R_l}{R_l + R_g} = 0.273$, ou -11.27 dB. O ganho em alta frequência pode ser

obtido passando-se R_l através dos dois transformadores ideais, fazendo um divisor resistivo com R_g e multiplicando o ganho de tensão do divisor pelos ganhos de tensão dos transformadores. Considerando os quatro indutores como $L_1 - L_4$ da esquerda para a direita resulta:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(\infty) = \frac{R_l'}{R_g + R_l'} n_1 n_2; \quad n_1 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}; \quad n_2 = \sqrt{\frac{L_4}{L_3}}; \quad R_l' = \frac{R_l}{n_1^2 n_2^2}$$

A avaliação numérica resulta em 0.00307, ou -50.27 dB, dando a diferença correta de 39 dB abaixo do ganho CC.

4.4.4 Realização com terminações arbitrárias

A realização duplamente terminada normal resulta em filtros LC duplamente terminados com máxima transferência de potência nos zeros de atenuação, e isto força a relação entre as terminações. É possível, entretanto, obter realizações com terminações escolhidas arbitrariamente, abrindo mão da máxima transferência de potência (e das baixas sensibilidades que ela causa). Notando que a função de transdução é definida por $H(s) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_l}{R_g}} \frac{1}{A_v(s)}$, escala-se $H(s)$ de forma que $|H(j\omega)| > 1$, com o fator de escalamento para um filtro passa-baixas sendo:

$$H(0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_l}{R_g}} \frac{1}{\frac{R_l}{R_g + R_l}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{R_l}{R_g}} + \sqrt{\frac{R_g}{R_l}} \right)$$

A seguir calcula-se uma nova função característica, resolvendo a equação de Feldtkeller para $K(s)$. Como $F(s)$ não tem restrição de estabilidade, as raízes de $F(s)F(-s)$ podem ser escolhidas de várias formas, levando a diferentes realizações.

Exemplo: Seja obter realizações para o filtro normalizado de Butterworth de ordem 3 com banda passante de 3.0103 dB até 1 rad/s, similares às da figura 4.46, para o caso de $R_g = 1 \Omega$ e $R_l = 2 \Omega$. $H(s) = E(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$ deve ser multiplicada por $\frac{1}{2} (\sqrt{2} + \sqrt{1/2}) = 0.1060660172$. Note-se que é o mesmo fator para a rede invertida. A escolha dos sinais das raízes de $F(s)$ decide qual das formas é obtida. As raízes de $F(s)F(-s)$ são obtidas como:

$$\begin{aligned} &\pm 0.34668 \pm 0.60047j \\ &\pm 0.69336 \end{aligned}$$

Tomando todas no SPLD ou deixando apenas a raiz real no SPLD, são obtidos duas possíveis $F(s)$:

$$\begin{aligned} F(s) &= 1.0607(s^3 - 1.3867s^2 + 0.96150s + 0.33333) \\ F(s) &= 1.0607(s^3 - 0.33333) \end{aligned}$$

As duas correspondentes impedâncias $z_{22} = R_l \frac{E_e + F_e}{E_o + F_o}$ são obtidas como:

$$\begin{aligned} z_{22}(s) &= \frac{1.3010(s^2 + 1.0871)}{2.1213(s^3 + 1.4807s)} \\ z_{22}(s) &= \frac{4.2426(s^2 + 0.33333)}{2.1213(s^3 + s)} \end{aligned}$$

A figura 4.63 mostra as duas realizações. A segunda corresponde à da figura 4.46, a primeira é diferente, e é a que tende à forma simplesmente terminada da figura 4.31a se $R_l \rightarrow \infty$. As outras escolhas das raízes de $F(s)$ geram as mesmas redes invertidas, e se o sinal de $F(s)$ for trocado são obtidas as formas duais.

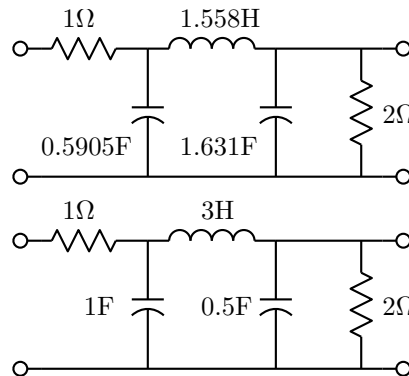


Figura 4.63: Filtros de Butterworth de ordem 3 com terminações arbitrariamente escolhidas.

Este mesmo procedimento se aplica também a redes de ordem par, o que não ocorre com o procedimento baseado em redes simétricas.

4.4.5 Realização em “lattice”

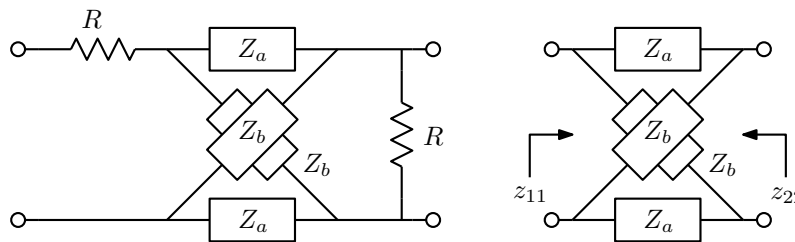


Figura 4.64: Estrutura em “lattice” LC duplamente terminada, e a rede LC entre as terminações com seus parâmetros Z .

Uma outra forma para realização de redes LC duplamente terminadas é a da “lattice”, ou treliça, mostrada na figura 4.64. É uma realização adequada apenas para filtros balanceados, ou com entrada ou saída suspensa, pois não tem terra comum à entrada e à saída. É simples ver que os parâmetros Z da rede LC entre as terminações são:

$$z_{11} = z_{22} = \frac{1}{2}(Z_a + Z_b); \quad z_{21} = z_{12} = \frac{1}{2}(Z_b - Z_a)$$

Daí vem:

$$Z_a = z_{11} - z_{12}; \quad Z_b = z_{11} + z_{12}$$

Estas fórmulas levam a cancelamentos polo-zero em Z_a e Z_b . Uma dedução com estes cancelamentos já feitos parte da fatoração do polinômio $F(s) + P(s) = h(s)a(s)$, onde $h(s)$ é polinômio de Hurwitz e $a(s)$ é polinômio anti-Hurwitz (todas as raízes no SPLD) [11]. Daí, para $P(s)$ par:

$$\frac{Z_a}{R} = \frac{-a_o}{a_e}; \quad \frac{Z_b}{R} = \frac{h_e}{h_o}$$

e para $P(s)$ ímpar:

$$\frac{Z_a}{R} = \frac{-a_o}{a_e}; \quad \frac{Z_b}{R} = \frac{h_o}{h_e}$$

Exemplo: Seja o simples filtro de Butterworth de ordem 3 com $A_{max} = 3.0103$ dB em 1 rad/s já conhecido, que tem $F(s) = s^3$, $E(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$ e $P(s) = 1$. Usando as primeiras fórmulas, os parâmetros Z são:

$$\frac{z_{11}}{R} = \frac{E_e - F_e}{E_o + F_o} = \frac{2s^2 + 1}{2s^3 + 2s}; \quad \frac{z_{12}}{R} = \frac{1}{E_o + F_o} = \frac{1}{2s^3 + 2s}$$

e então:

$$Z_a = z_{11} - z_{12} = R \frac{2s^2}{2s^3 + 2s} = R \frac{s}{s^2 + 1}; \quad Z_b = z_{11} + z_{12} = R \frac{2s^2 + 2}{2s^3 + 2s} = R \frac{1}{s}$$

Usando as fórmulas com os cancelamentos feitos, $F(s) + P(s) = s^3 + 1$ e então $h(s)a(s) = (s + 1)(s^2 - s + 1)$. O resultado obtido é o mesmo. A estrutura em “lattice” é mostrada na figura 4.65.

$$\frac{Z_a}{R} = \frac{-a_o}{a_e} = \frac{s}{s^2 + 1}; \quad \frac{Z_b}{R} = \frac{h_e}{h_o} = \frac{1}{s}$$

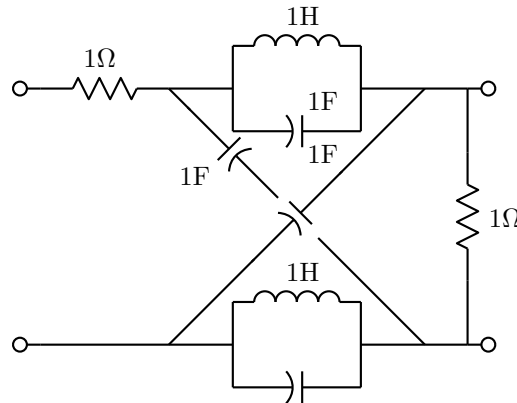


Figura 4.65: Filtro normalizado de Butterworth de ordem 3 realizado em “lattice” LC duplamente terminada.

É interessante observar as frequências naturais desta rede, que é de ordem 5. Três delas são os polos do filtro, em -1 e $\frac{-1 \pm \sqrt{3}j}{2}$. As outras duas são imaginárias, em $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}j$. O circuito ideal pode oscilar nesta frequência, mantendo tensões nulas sobre os resistores.

A realização em “lattice” normalmente apenas realiza aproximações de ordem ímpar, devido à simetria¹⁰. Não existe a restrição de os zeros de transmissão estarem sobre o eixo imaginário, sendo possível a realização de zeros em pares reais simétricos ou em quadras de zeros complexos com simetria real e imaginária. Zeros assim mantém o numerador da função de transferência como polinômio par ou ímpar.

Exemplo: Seja realizar o filtro passa-tudo:

$$T(s) = \frac{P(s)}{E(s)} = -\frac{(s-1)(s^2-s+1)}{(s+1)(s^2+s+1)} = -\frac{s^3-2s^2+2s-1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

¹⁰É possível obter “lattices” com resistores imaginários que realizam filtros de ordem par [13].

Como os zeros tem que ter simetria no eixo real, é necessário duplicar os polos. $F(s)$ é nulo, pois $|H(j\omega)| = 1$. Assim:

$$\begin{aligned} P(s) &= -(s^3 - 2s^2 + 2s - 1)(s^3 + 2s^2 + 2s + 1) \\ E(s) &= (s^3 + 2s^2 + 2s + 1)^2 \\ F(s) &= 0 \end{aligned}$$

$F(s) + P(s) = (-s^3 + 2s^2 - 2s + 1)(s^3 + 2s^2 + 2s + 1) = a(s)h(s)$ já é obtido fatorado como a síntese requer. Como $P(s)$ é par:

$$\frac{Z_a}{R} = -\frac{a_o}{a_e} = \frac{s^3 + 2s}{2s^2 + 1}; \quad \frac{Z_b}{R} = \frac{h_e}{h_o} = \frac{2s^2 + 1}{s^3 + 2s}$$

A realização com terminações unitárias é mostrada na figura 4.66. As frequências naturais da estrutura são os três pólos do filtro, -1 e $\frac{-1 \pm \sqrt{3}j}{2}$, duplicados, e mais três pares no eixo imaginário, em $\pm j$ e $\frac{3 \pm \sqrt{5}j}{2}$, que aparecem cancelados por zeros correspondentes na função de transferência. O ganho de tensão vale $|T(j\omega)| = \frac{1}{2}$, e como ocorre sempre máxima transferência de potência, as impedâncias vistas pelas terminações são constantes, iguais a elas. As sensibilidades do módulo da função de transferência em relação aos valores de todos os elementos reativos valem 0 para qualquer frequência. Estas redes podem ser ligadas diretamente em cascata com realizações terminadas, omitindo-se uma das terminações, servindo como terminações. Podem também ser ligadas diretamente em cascata, umas fazendo as terminações das outras.

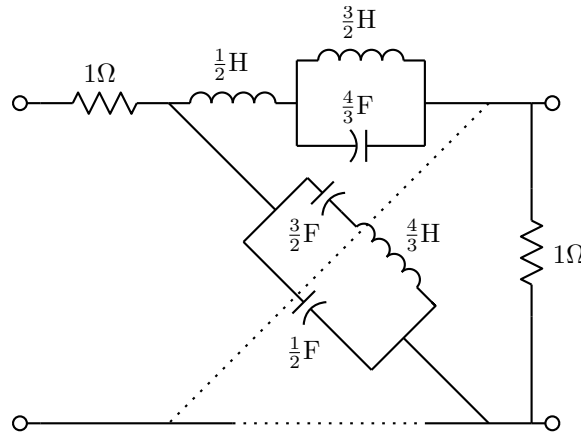


Figura 4.66: Filtro passa-tudo em “lattice” LC duplamente terminada.

4.4.6 “Lattice” de resistência constante

O tipo de estrutura obtido no exemplo anterior é conhecido como “lattice” de resistência constante, onde $Z_a Z_b = R^2$, que realiza filtros passa-tudo. Com esta condição e a simetria, é simples verificar que:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{(z_{11} + R)^2 - z_{12}^2}{2Rz_{12}} = \frac{R + Z_a}{R - Z_a} \\ Z_1 = Z_2 &= z_{11} - \frac{z_{12}^2}{z_{11} + R} = R \end{aligned}$$

Verificando no exemplo, com $R = 1 \Omega$:

$$H(s) = -\frac{s^2 + 2s^2 + 2s + 1}{s^3 - 2s^2 + 2s - 1} = \frac{1 + \frac{s^3+2s}{2s^2+1}}{1 - \frac{s^3+2s}{2s^2+1}} \Rightarrow Z_a = \frac{s^3 + 2s}{2s^2 + 1}; \quad Z_b = \frac{2s^2 + 1}{s^3 + 2s}$$

Também é possível uma realização com dois blocos em cascata. Para o mesmo exemplo, com terminações unitárias, segue a solução abaixo e a realização da figura 4.67. As frequências naturais desta rede são novamente os três polos do filtro duplicados e mais três pares imaginários, agora em $\pm j$ e $\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}j$.

$$H(s) = -\frac{s+1}{s-1} \frac{s^2+s+1}{s^2-s+1} = \left(\frac{1+s}{1-s}\right) \left(\frac{1+\frac{s}{s^2+1}}{1-\frac{s}{s^2+1}}\right) \Rightarrow Z_{a1} = s; \quad Z_{a2} = \frac{s}{s^2+1}$$

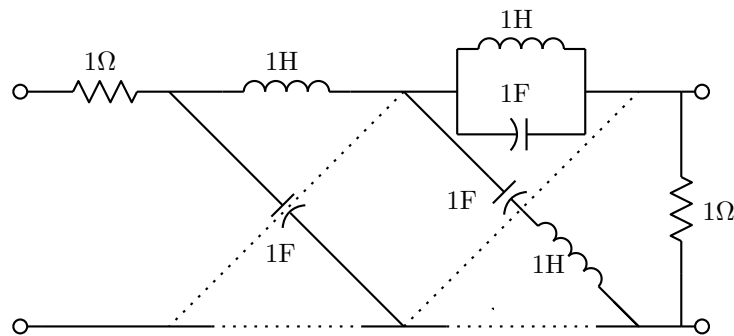


Figura 4.67: Filtro passa-tudo em cascata de “lattices” LC duplamente terminadas.

4.4.7 “Lattices” desbalanceadas

A rede “lattice” apresenta inconvenientes, como excessivo número de elementos e falta de referência comum entre entrada e saída. Estes podem ser eliminados pelo desbalanceamento da rede, o que pode ser feito a partir do “Teorema da biseção” de Bartlett e Brune [11]. O teorema diz que uma rede simétrica de duas portas tem um equivalente em “lattice” onde uma das impedâncias é obtida da metade da rede simétrica com todos os terminais de conexão entre as metades em aberto e a outra da mesma rede com todos os terminais de conexão em curto-circuito. Ver a figura 4.68. O teorema é facilmente verificado observando-se o comportamento das redes com excitações iguais e simétricas (uma positiva e a outra negativa) nas duas portas.

A realização em “lattice” de filtros usuais passa-baixas de ordem ímpar, resulta em duas impedâncias com diferença de grau de 1, que podem ser expandidas em escada em formas similares, com uma das expansões tendo um elemento a mais. Um filtro passa-baixas de ordem 7, por exemplo, gera estruturas como as da figura 4.69a. Com a identificação dos elementos como mostrado na figura, pode ser identificado que as duas redes são obtidas da “meia rede” mostrada, com os terminais da direita em aberto e em curto-circuito. O teorema da biseção diz então que a “lattice” pode ser desbalanceada na forma também mostrada na figura [13].

Esta realização é similar à de uma “ladder” de ordem 7 na forma π , onde em vez dos dois capacitores em paralelo com os indutores laterais se coloca um capacitor da entrada para a saída e um indutor em série com os dois capacitores centrais, formando uma estrutura com redes π e T de capacitores e indutores, uma dentro da outra. A estrutura é simétrica, enquanto a da “ladder” usualmente não é, devido aos zeros de transmissão em três frequências diferentes. Esta rede é prática apenas para filtros com alta

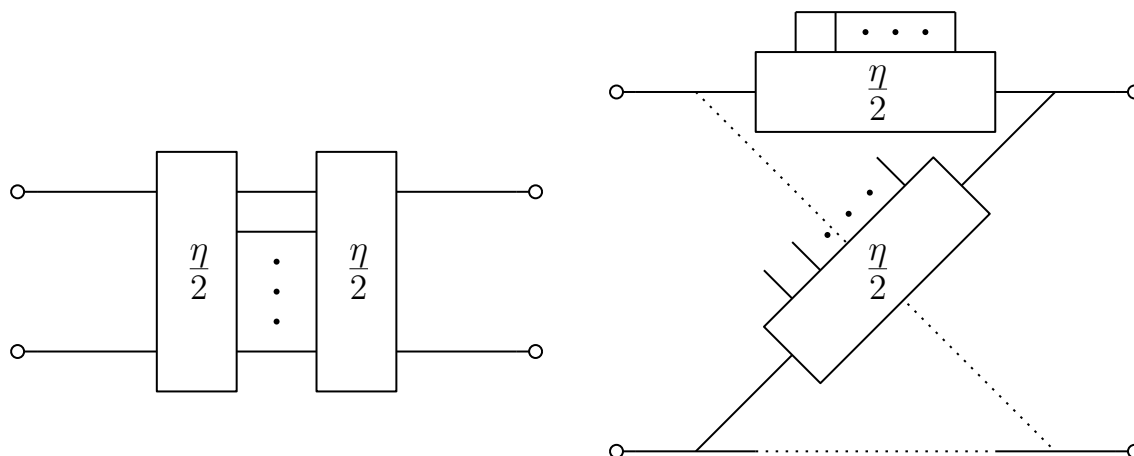


Figura 4.68: Equivalências do teorema da biseção.

seletividade, com pequeno valor de A_{min} , que podem ser irrealizáveis por “ladder”. Para filtros mais normais os elementos que acoplam as extremidades podem ficar pequenos demais. A rede também pode servir para realizar zeros de transmissão em pares simétricos reais ou em quadras com simetria. Filtros passa-tudo, entretanto, não são realizáveis desta forma.

Exemplo: Seja projetar o filtro elíptico normalizado, com $A_{min} = 40$ dB e $A_{max} = 1$ dB, com borda da banda passante em $\omega_p = 1$ rad/s. As redes “ladder” e “lattice” desbalanceada que o realizam são mostradas na figura 4.70¹¹. Para comparar a qualidade das duas realizações, uma série de simulações é feita, com os elementos variando de 5% aleatoriamente, no que se chama de “análise de Monte Carlo”. A figura 4.71 mostra os resultados¹². A rede em “lattice” desbalanceada é um pouco mais sensível à variação dos elementos na banda de rejeição. Embora não se veja bem na figura, ela é um pouco menos sensível no início da banda passante.

¹¹O programa Eletsim também projeta estas redes.

¹²Análises feitas com o programa IFFT.

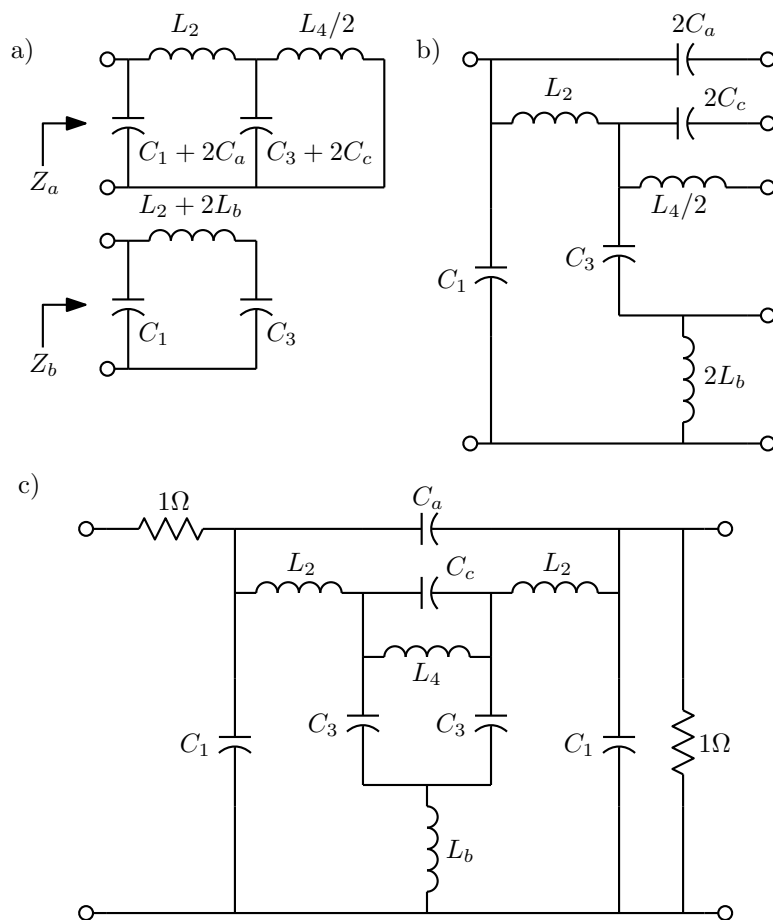


Figura 4.69: a) Realização das impedâncias da ‘lattice’ para um filtro passa-baixas de ordem 7. b) ‘Meia rede’ de onde podem ser obtidas. c) ‘Lattice’ desbalanceada.

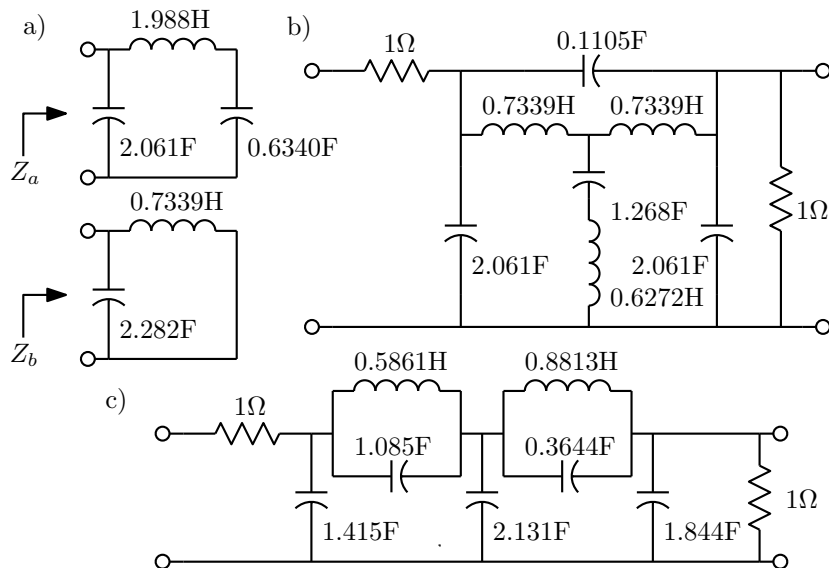


Figura 4.70: Realizações de um filtro elíptico de ordem 5. a) Impedâncias da “lattice”. b) “Lattice” desbalanceada. c) “Ladder”.

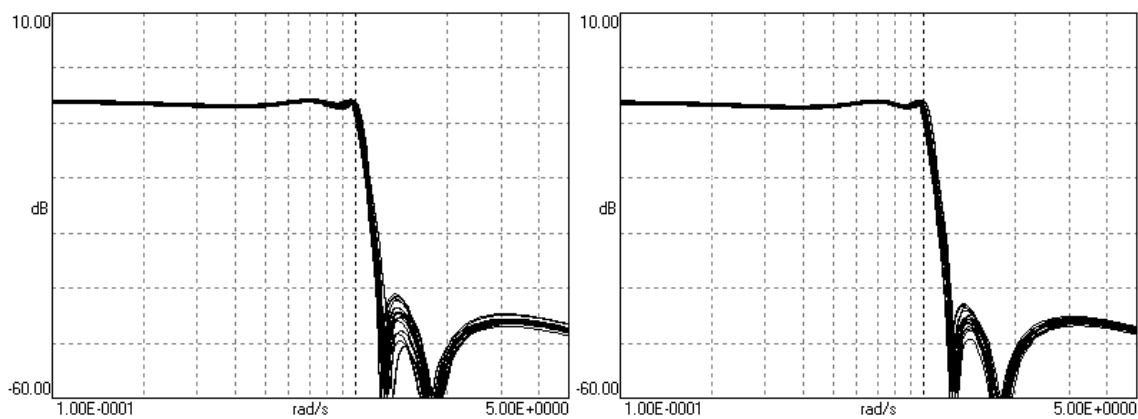


Figura 4.71: Comparação de análises de Monte Carlo das realizações. Esquerda: “lattice” desbalanceada. Direita: “Ladder”.

Capítulo 5

Aproximações

ESTA seção descreve em maior detalhe as aproximações para filtros citadas sumariamente nas seções anteriores, ainda sem pretender ser um tratamento completo do assunto. São mais detalhadamente descritas as aproximações para filtros em que apenas o módulo da função de transferência é importante. Algum material é depois incluído sobre aproximações visando outros aspectos, como a linearidade da fase. Como é simples a geração de filtros de outros tipos a partir de aproximações passa-baixas normalizadas, apenas estas são consideradas. Pequenas tabelas de filtros são também listadas para os filtros descritos, apenas como exemplo, pois é fácil encontrar tabelas bem mais completas, como em [14], e programas de síntese para as aproximações descritas¹.

5.1 Aproximação por função característica

Para filtros de módulo, apenas a forma de $|T(j\omega)|$ é importante. Esta função é entretanto difícil de manipular diretamente, pois tem o dobro da ordem de $T(s)$ e uma raiz quadrada. Um método mais simples para a geração de $T(s)$ vem da definição de duas funções:

- Função de transdução, ou de atenuação, $H(s)$, inverso de $T(s)$ escalada para que $\min |H(j\omega)| = 1$.
- Função característica $K(s)$, tal que $|H(j\omega)|^2 = 1 + |K(j\omega)|^2$, ou $H(s)H(-s) = 1 + K(s)K(-s)$ (equação de Fel'dtkeller).

Os gráficos da figura 5.1 mostram as relações entre estas funções. Para um filtro com A_{max} e A_{min} especificados, $|K(j\omega)|$ varia entre 0 e ϵ na banda passante, e é maior que $\epsilon\alpha^2$ na banda de rejeição². Considerando a equação $|H(j\omega)|^2 = 1 + |K(j\omega)|^2$, os parâmetros ϵ e α são obtidos como:

$$20 \log \sqrt{1 + \epsilon^2} = A_{max} \Rightarrow \epsilon = \sqrt{10^{0.1A_{max}} - 1}$$
$$20 \log \sqrt{1 + \epsilon^2\alpha^4} = A_{min} \Rightarrow \alpha^2 = \sqrt{\frac{10^{0.1A_{min}} - 1}{10^{0.1A_{max}} - 1}}$$

A função $K(j\omega)$ é da mesma ordem da aproximação e relativamente simples de tratar. Ela pode ser simplesmente uma razão de polinômios de ω do tipo, no caso das figuras 5.1 e 5.2, com 5 parâmetros a determinar para a aproximação de ordem 5:

¹As tabelas foram geradas pelo programa Eletsim.

²Esta definição para a banda de rejeição permite unificar o tratamento das várias aproximações, como se verá.

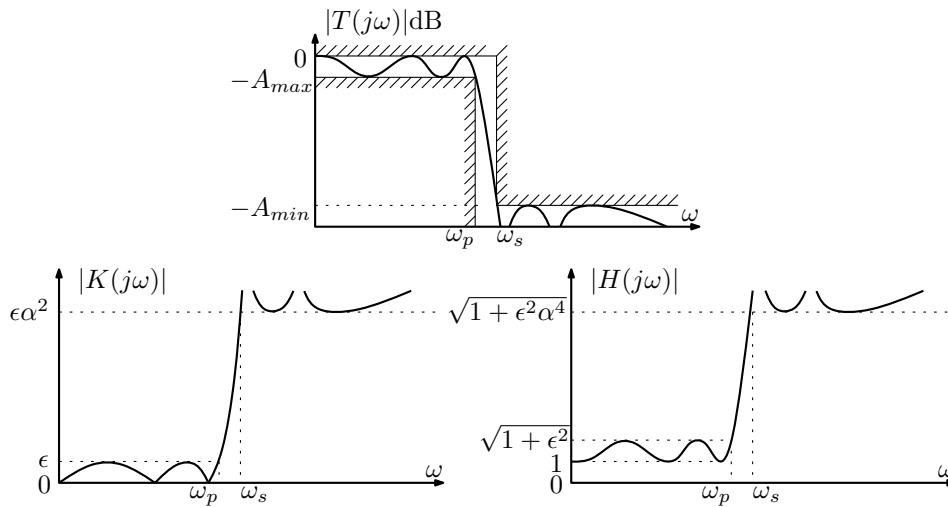


Figura 5.1: Relações entre o módulo da função de transferência $T(j\omega)$ e as funções $|H(j\omega)|$ e $|K(j\omega)|$.

$$K(j\omega) = k_0 \frac{\omega(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}{(\omega^2 - \omega_3^2)(\omega^2 - \omega_4^2)}$$

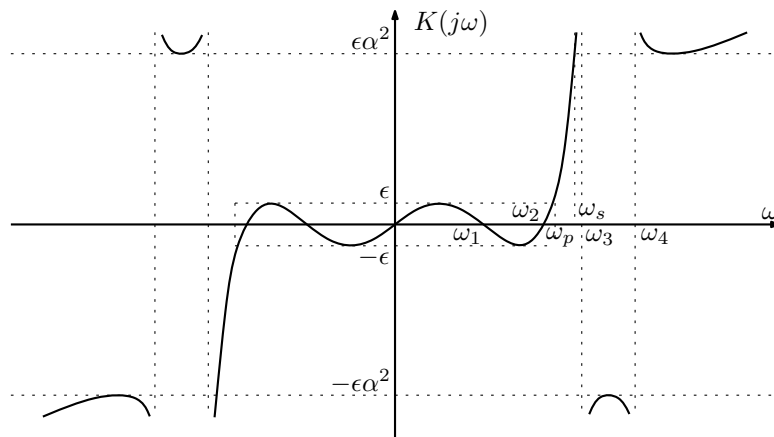


Figura 5.2: Gráfico de $K(j\omega)$.

Obtida $K(j\omega)$ por algum método, $K(s)$ é obtida fazendo-se $\omega = -js$, e ignorando possível termo multiplicativo $\pm j$ que aparece em ordens ímpares. Já se viu que o sinal de $K(s)$ pode ser qualquer. Como $K(s)$ é uma razão de polinômios, tem-se as relações já vistas no caso da síntese LC duplamente terminada:

$$K(s) = \frac{F(s)}{P(s)}; \quad H(s) = \frac{E(s)}{P(s)}; \quad E(s)E(-s) = F(s)F(-s) + P(s)P(-s)$$

A equação é resolvida achando-se as raízes de $F(s)F(-s) + P(s)P(-s)$, escolhendo as raízes no

semiplano lateral esquerdo para raízes de $E(s)$, e montando o polinômio $E(s)$ com uma constante multiplicativa satisfazendo a equação. Note-se que o polinômio de onde se acha as raízes é sempre par, e então pode ser reduzido a um polinômio com os mesmos coeficientes e metade da ordem, completo, que tem como raízes os quadrados das raízes a encontrar. O filtro desejado tem então a função de transferência, escalada para máximo módulo unitário, $T(s) = 1/H(s) = P(s)/E(s)$.

As aproximações clássicas podem ser classificadas em três casos básicos, dependendo da forma de $|K(j\omega)|$:

- Aproximações polinomiais, ou “só polos”. $K(j\omega)$ é um polinômio de ω que varia entre ± 1 para ω na banda passante (entre $\omega = \pm 1$ na versão normalizada). Este caso é o das aproximações de Butterworth e de Chebyshev.

$$K(j\omega) = \epsilon M(\omega)$$

- Aproximações polinomiais inversas. $K(\omega)$ é o proporcional ao inverso de um polinômio de $1/\omega$ definido como acima. Com esta normalização, o início da banda de rejeição fica onde $M(\omega) = \pm 1$. Gera as aproximações de Chebyshev inversas.

$$K(j\omega) = \frac{\epsilon\alpha^2}{M(1/\omega)} = \frac{\epsilon\alpha^2\omega^n}{M_r(\omega)}$$

onde $M_r(\omega) = \omega^n M(1/\omega)$ é o polinômio $M(\omega)$ com os coeficientes em ordem inversa. Idem para $Q_r(\omega)$ abaixo.

- Aproximações racionais simétricas. $K(j\omega)$ é proporcional à razão entre um polinômio de ω e o inverso do mesmo polinômio de $1/\omega$. Coloca o centro da banda de transição em $\omega = 1$ rad/s, onde $Q(\omega)/Q(1/\omega) = 1$, e zeros de transmissão e de atenuações em frequências inversas uma da outra. Gera as aproximações elípticas.

$$K(j\omega) = \frac{\epsilon\alpha Q(\omega)}{\omega^n Q(1/\omega)} = \frac{\epsilon\alpha Q(\omega)}{Q_r(\omega)}$$

5.1.1 Aproximação de Butterworth

A aproximação de Butterworth³ é uma aproximação polinomial onde, na forma normalizada com $\omega_s = 1$ rad/s e para ordem n :

$$K(j\omega) = \epsilon\omega^n$$

Resulta uma banda passante maximamente plana com atenuação A_{max} em $\omega_s = 1$ rad/s, como na figura 5.3. Os polos da função de transferência são as raízes no SPLE do polinômio:

$$E(s)E(-s) = 1 + \epsilon^2(-s^2)^n$$

que ficam distribuídas na metade esquerda de um círculo de raio $\epsilon^{-1/n}$ centrado no plano complexo, como mostrado na figura 5.4.

³S. Butterworth, “On the theory of filter amplifiers”, *Experimental wireless & the wireless engineer*, Vol. 7, pp. 536–541, outubro de 1930.

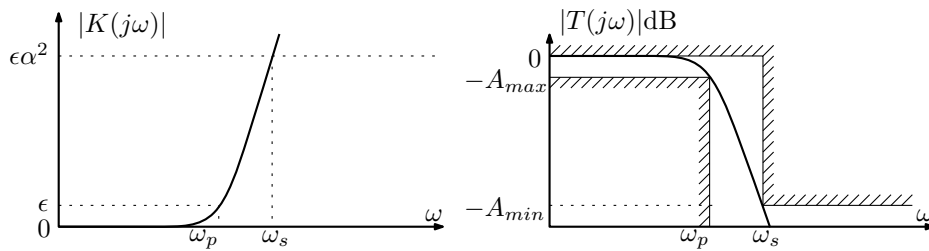


Figura 5.3: Função característica e módulo da função de transferência para a aproximação de Butterworth.

$$s_i = \sigma_i + j\omega_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sigma_i = -\sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{2i-1}{n} \right) \epsilon^{-\frac{1}{n}}$$

$$\omega_i = \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{2i-1}{n} \right) \epsilon^{-\frac{1}{n}}$$

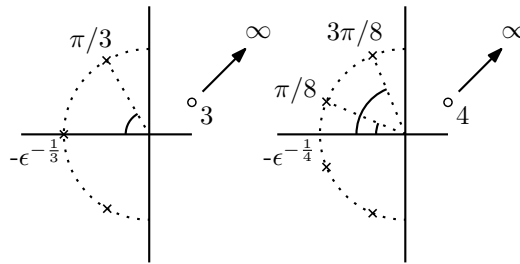


Figura 5.4: Polos e zeros para aproximações de Butterworth ímpares (ordem 3) e pares (ordem 4).

A ordem necessária é obtida a partir da atenuação no início da banda de rejeição normalizada:

$$A_{min} \leq 10 \log(1 + \epsilon^2 \omega_s^{2n})$$

$$\omega_s^{2n} \geq \frac{10^{0.1A_{min}} - 1}{\epsilon^2} = \alpha^4$$

$$2n \log \omega_s \geq 4 \log \alpha$$

$$n \geq \frac{2 \log \alpha}{\log \omega_s}$$

A tabela 5.1 lista $E(s)$ para $P(s) = 1$ para os primeiros filtros de Butterworth com $A_{max} = 3.0103$ dB ($\epsilon = 1$), os polos com suas frequências de ressonância e fatores de qualidade (ω/Q), e realizações LC duplamente terminadas normalizadas. Outros valores de A_{max} resultam em versões escaladas em frequência destes.

5.1.2 Aproximação de Chebyshev

A aproximação de Chebyshev é uma aproximação polinomial onde, na forma normalizada com $\omega_s = 1$ rad/s e para ordem n :

Tabela 5.1: Filtros normalizados de Butterworth com $A_{max} = 3.0103$ dB e $\omega_p = 1$ rad/s.

Polinômios E(s)								
n	a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7
1	1.00000	1.00000						
2	1.00000	1.41421	1.00000					
3	1.00000	2.00000	2.00000	1.00000				
4	1.00000	2.61313	3.41421	2.61313	1.00000			
5	1.00000	3.23607	5.23607	5.23607	3.23607	1.00000		
6	1.00000	3.86370	7.46410	9.14162	7.46410	3.86370	1.00000	
7	1.00000	4.49396	10.09783	14.59179	14.59179	10.09783	4.49396	1.00000

Polos							
n	re/im 1	w/Q 1	re/im 2	w/Q 2	re/im 3	w/Q 3	re/im 4
1	-1.00000						
2	-0.70711	1.00000					
	0.70711	0.70711					
3	-0.50000	1.00000	-1.00000				
	0.86603	1.00000					
4	-0.38268	1.00000	-0.92388	1.00000			
	0.92388	1.30656	0.38268	0.54120			
5	-0.30902	1.00000	-0.80902	1.00000	-1.00000		
	0.95106	1.61803	0.58779	0.61803			
6	-0.25882	1.00000	-0.70711	1.00000	-0.96593	1.00000	
	0.96593	1.93185	0.70711	0.70711	0.25882	0.51764	
7	-0.22252	1.00000	-0.62349	1.00000	-0.90097	1.00000	-1.00000
	0.97493	2.24698	0.78183	0.80194	0.43388	0.55496	

Ladder LC d. t.								
n	Rg/R1	L/C 1	L/C 2	L/C 3	L/C 4	L/C 5	L/C 6	L/C 7
1	1.00000							
	1.00000	2.00000						
2	1.00000		1.41421					
	1.00000	1.41421						
3	1.00000		2.00000					
	1.00000	1.00000		1.00000				
4	1.00000		1.84776		0.76537			
	1.00000	0.76537		1.84776				
5	1.00000		1.61803		1.61803			
	1.00000	0.61803		2.00000		0.61803		
6	1.00000		1.41421		1.93185		0.51764	
	1.00000	0.51764		1.93185		1.41421		
7	1.00000		1.24698		2.00000		1.24698	
	1.00000	0.44504		1.80194		1.80194		0.44504

$$K(j\omega) = \epsilon C_n(\omega)$$

onde $C_n(\omega)$ é o polinômio de Chebyshev de ordem n , definido como $C_n(\omega) = \cos(n \cos^{-1} \omega)$. Estes polinômios oscilam maximamente entre ± 1 para ω entre ± 1 , como mostrado na figura 5.6 para as primeiras ordens. Resultam aproximações com oscilação (“ripple”) máxima na banda passante e a maior seletividade possível (mínima razão ω_s/ω_p) para aproximações polinomiais, dado A_{max} . Os casos de ordem par não tem ganho máximo em $\omega = 0$, requerendo terminações diferentes na realização LC duplamente terminada.

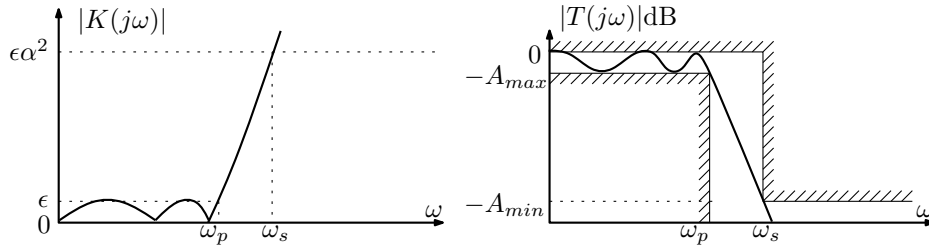


Figura 5.5: Função característica e módulo da função de transferência para a aproximação de Chebyshev (ordem 5).

Lista dos primeiros polinômios de Chebyshev e da fórmula de recursão que os gera:

$$\begin{aligned} C_0(\omega) &= 1 \\ C_1(\omega) &= \omega \\ C_2(\omega) &= 2\omega^2 - 1 \\ C_3(\omega) &= 4\omega^3 - 3\omega \\ C_4(\omega) &= 8\omega^4 - 8\omega^2 + 1 \\ C_5(\omega) &= 16\omega^5 - 20\omega^3 + 5\omega \\ C_6(\omega) &= 32\omega^6 - 48\omega^4 + 18\omega^2 - 1 \\ C_{n+1}(\omega) &= 2\omega C_n(\omega) - C_{n-1}(\omega) \end{aligned}$$

Os polos da função de transferência são então as raízes no SPLE do polinômio:

$$E(s)E(-s) = 1 + \epsilon^2 C_n^2(-js)$$

que são obtidas, pela definição de C_n , como as soluções de $\cos(n \cos^{-1}(-js)) = \pm j/\epsilon$. Identificando $n \cos^{-1}(-js) = a + jb$ vem $\pm j/\epsilon = \cos(a + jb) = \cos a \cos jb - \sin a \sin jb = \cos a \cosh b - j \sin a \sinh b$. Igualando as partes real e imaginária vem $\cos a \cosh b = 0$ e $\sin a \sinh b = \mp 1/\epsilon$. Como $\cosh x \geq 1$ a igualdade dos valores reais dá valores para a . E usando que para estes valores $\sin a = \pm 1$, os valores de b são obtidos da igualdade dos valores imaginários. Tem-se então:

$$\begin{aligned} n \cos^{-1}(-js) &= a + jb \\ a &= \frac{\pi}{2}(2i - 1), \quad i = 1, \dots, 2n \\ b &= \mp \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} \end{aligned}$$

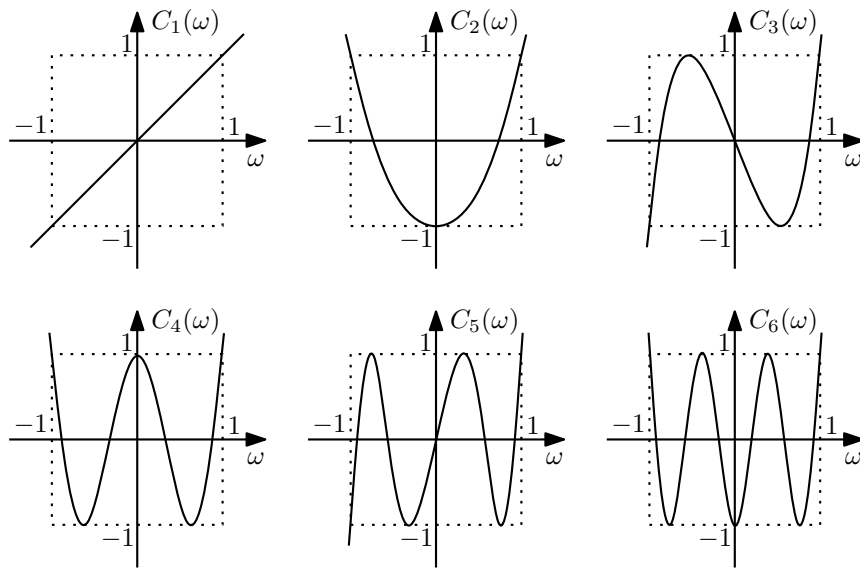


Figura 5.6: Polinômios de Chebyshev.

de onde se obtém os polos da aproximação, a parte das raízes no SPLE, como:

$$s_i = \sigma_i + j\omega_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sigma_i = -\sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{2i-1}{n} \right) \sinh \left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} \right)$$

$$\omega_i = \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{2i-1}{n} \right) \cosh \left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon} \right)$$

Notar que estes polos são os mesmos da aproximação de Butterworth, multiplicados por fatores que os posicionam sobre a metade esquerda de uma elipse no plano complexo, com focos em $\pm j$. A ordem necessária é obtida, observando-se que, para $\omega > 1$, $\cos^{-1} \omega = j \cosh^{-1} \omega$ e $C_n(\omega) = \cos(nj \cosh^{-1} \omega) = \cosh(n \cosh^{-1} \omega)$, como:

$$A_{min} \leq 10 \log(1 + \epsilon^2 C_n(\omega_s)^2)$$

$$C_n(\omega_s)^2 \geq \frac{10^{0.1A_{min}} - 1}{\epsilon^2} = \alpha^4$$

$$\cosh(n \cosh^{-1} \omega_s) \geq \alpha^2$$

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \alpha^2}{\cosh^{-1} \omega_s}$$

Comparando com a aproximação de Butterworth com as mesmas especificações na banda passante, tem-se, para $\omega \gg \omega_s$:

Butterworth: $|H(j\omega)| \approx \sqrt{\epsilon^2 \omega^{2n}} = \epsilon \omega^n$, ou: $20 \log \epsilon \omega^n$ dB

Chebyshev: $|H(j\omega)| \approx \sqrt{\epsilon^2 (2^{n-1} \omega^n)^2} = \epsilon 2^{n-1} \omega^n$, ou: $20 \log \epsilon \omega^n + 6.0206(n-1)$ dB

de onde se vê que a aproximação de Chebyshev atenua $2(n-1)$ vezes mais que a de Butterworth em alta frequência.

Exemplo: Seja obter e comparar os filtros de Butterworth e de Chebyshev com $A_{max} = 1$ dB que tem $A_{min} > 40$ dB em $\omega_s = 2$ rad/s. Pelas fórmulas, com $\epsilon = 0.508847$ e $\alpha = 14.0183$, para a ordem tem-se:

$$\text{Butterworth: } n \geq \frac{2 \log \alpha}{\log \omega_s} = 7.618 \implies n = 8$$

$$\text{Chebyshev: } n \geq \frac{\cosh^{-1} \alpha^2}{\cosh^{-1} \omega_s} = 4.536 \implies n = 5$$

Os polos necessários são obtidos das fórmulas como abaixo. A figura 5.7 compara as magnitudes dos dois filtros.

Butterworth		Chebyshev	
s1=	-0.2122815785 1.0672115631j	s1=	-0.0894583622 0.9901071120j
s2=	-0.6045267895 0.9047382769j	s2=	-0.2342050328 0.6119198477j
s3=	-0.9047382769 0.6045267895j	s3=	-0.2894933412 0.0000000000j
s4=	-1.0672115631 0.2122815785j	s4=	-0.2342050328 -0.6119198477j
s5=	-1.0672115631 -0.2122815785j	s5=	-0.0894583622 -0.9901071120j
s6=	-0.9047382769 -0.6045267895j		
s7=	-0.6045267895 -0.9047382769j		
s8=	-0.2122815785 -1.0672115631j		

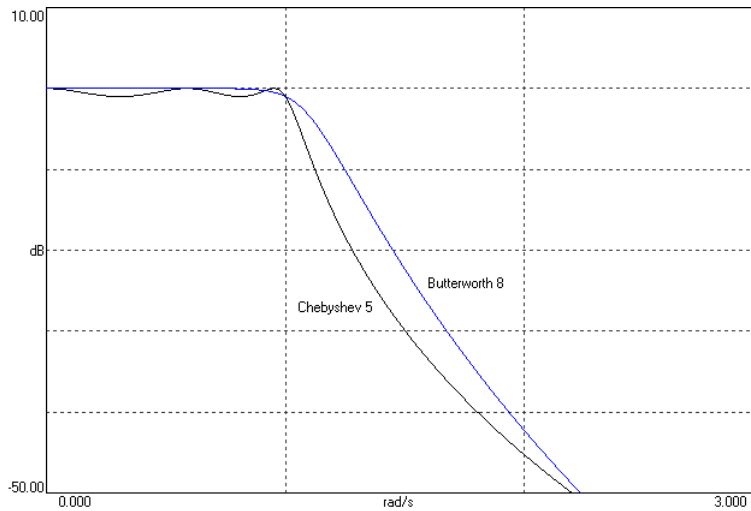


Figura 5.7: Módulos dos filtros de Butterworth (ordem 8) e de Chebyshev (ordem 5), com $A_{max} = 1$ dB, $\omega_p = 1$ rad/s e $\omega_s > 2$ rad/s.

A tabela 5.2 lista $E(s)$ para $P(s) = a_0$ para os primeiros filtros de Chebyshev com $A_{max} = 1$ dB, os polos com suas frequências de ressonância e fatores de qualidade (w/Q), e realizações LC duplamente terminadas normalizadas⁴. As terminações dos casos de ordem par são uma inversa da outra, gerando redes antimétricas. Filtros com diferentes valores de A_{max} são diferentes, não podendo ser obtidos por simples escalamento em frequência, como nos de Butterworth.

⁴Notar que o caso de ordem 3 dá praticamente dois capacitores de 2 F e um indutor de 1 H. Daria exatamente isto com $A_{max} = 0.96910013008$ dB, correspondendo a ganho mínimo na banda passante de $\sqrt{0.8}$.

Tabela 5.2: Filtros normalizados de Chebyshev com $A_{max} = 1$ dB e $\omega_p = 1$ rad/s.

Polinômios E(s)								
n	a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7
1	1.96523	1.00000						
2	1.10251	1.09773	1.00000					
3	0.49131	1.23841	0.98834	1.00000				
4	0.27563	0.74262	1.45392	0.95281	1.00000			
5	0.12283	0.58053	0.97440	1.68882	0.93682	1.00000		
6	0.06891	0.30708	0.93935	1.20214	1.93082	0.92825	1.00000	
7	0.03071	0.21367	0.54862	1.35754	1.42879	2.17608	0.92312	1.00000

Polos							
n	re/im 1	w/Q 1	re/im 2	w/Q 2	re/im 3	w/Q 3	re/im 4
1	-1.96523						
2	-0.54887	1.05000					
	0.89513	0.95652					
3	-0.24709	0.99710	-0.49417				
	0.96600	2.01772					
4	-0.13954	0.99323	-0.33687	0.52858			
	0.98338	3.55904	0.40733	0.78455			
5	-0.08946	0.99414	-0.23421	0.65521	-0.28949		
	0.99011	5.55644	0.61192	1.39879			
6	-0.06218	0.99536	-0.16988	0.74681	-0.23206	0.35314	
	0.99341	8.00369	0.72723	2.19802	0.26618	0.76087	
7	-0.04571	0.99633	-0.12807	0.80837	-0.18507	0.48005	-0.20541
	0.99528	10.89866	0.79816	3.15586	0.44294	1.29693	

Ladder LC d. t.								
n	Rg/R1	L/C 1	L/C 2	L/C 3	L/C 4	L/C 5	L/C 6	L/C 7
1	1.00000							
	1.00000	1.01769						
2	1.63087		1.11716					
	0.61317	1.11716						
3	1.00000		0.99410					
	1.00000	2.02359		2.02359				
4	1.63087		1.73596		1.28708			
	0.61317	1.28708		1.73596				
5	1.00000		1.09111		1.09111			
	1.00000	2.13488		3.00092		2.13488		
6	1.63087		1.80069		1.87840		1.32113	
	0.61317	1.32113		1.87840		1.80069		
7	1.00000		1.11151		1.17352		1.11151	
	1.00000	2.16656		3.09364		3.09364		2.16656

5.1.3 Aproximação de Chebyshev inversa

Esta aproximação usa também os polinômios de Chebyshev, na forma polinomial inversa:

$$K(j\omega) = \frac{\epsilon\alpha^2}{C_n(1/\omega)} = \frac{\epsilon\alpha^2\omega^n}{C_{nr}(\omega)}$$

onde $C_{nr}(\omega) = \omega^n C_n(1/\omega)$ é o polinômio $C_n(\omega)$ com os coeficientes em ordem inversa.

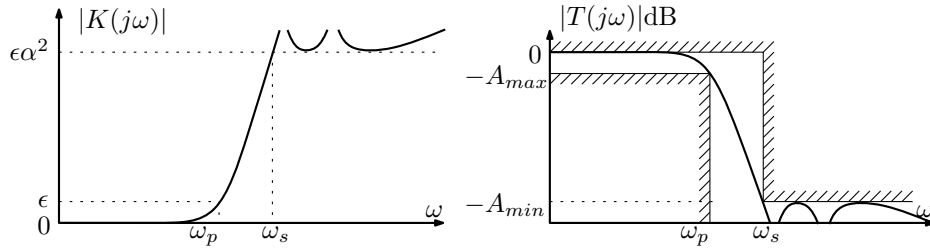


Figura 5.8: Função característica e módulo da função de transferência para a aproximação de Chebyshev inversa (ordem 5).

Resulta uma banda passante maximamente plana, como na aproximação de Butterworth, e bandas de rejeição começando em $\omega_s = 1$ rad/s, com zeros de transmissão nos inversos das raízes dos polinômios de Chebyshev. A banda passante termina onde $K(j\omega) = \epsilon$, ou:

$$\omega_p = \frac{1}{C_n^{-1}(\alpha^2)} = \frac{1}{\cosh\left(\frac{1}{n} \cosh^{-1}(\alpha^2)\right)}$$

A seletividade é idêntica à da aproximação de Chebyshev da mesma ordem, o que pode ser verificado calculando-se a razão ω_p/ω_s para as duas aproximações, que resulta a mesma pois $\omega_s_{cheb} = 1/\omega_p_{chebinv}$.

Os zeros de transmissão ficam nas frequências onde $C_n(1/\omega_z) = \cos(n \cos^{-1}(1/\omega_z)) = 0$, com um no ∞ para ordens ímpares:

$$\omega_{zi} = \pm \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2i-1}{n}\right)}, \quad i = 1, \dots, [n/2]$$

Os polos são as raízes no SPLÉ do polinômio:

$$E(s)E(-s) = (\epsilon\alpha^2)^2(-js)^{2n} + (-js)^{2n}C_n\left(\frac{j}{s}\right)^2 \rightarrow C_n\left(\frac{j}{s}\right) = \pm j\epsilon\alpha^2$$

Pela similaridade com o caso da aproximação de Chebyshev, os polos agora são os inversos dos polos da aproximação de Chebyshev, com ϵ substituído por $1/(\epsilon\alpha^2)$. Eles ficam em uma curva parecida com um círculo deslocado para a esquerda do plano complexo:

$$s_i = \sigma_i + j\omega_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{2i-1}{n}\right) \sinh\left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \epsilon\alpha^2\right) + j \cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{2i-1}{n}\right) \cosh\left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \epsilon\alpha^2\right)}$$

Assim tem-se $\omega_s=1$ rad/s. Para escalar para $\omega_p = 1$ rad/s basta dividir os polos e zeros por ω_p .

Exemplo: Seja obter a aproximação de Chebyshev inversa de ordem 7, com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB. Aplicando as fórmulas acima se obtém:

```

Polos:
s1= -0.1126869110 -0.7723365609j
s2= -0.3979883757 -0.7807026928j
s3= -0.8517902506 -0.6416936535j
s4= -1.2029810719 0.0000000000j
s5= -0.8517902506 0.6416936535j
s6= -0.3979883757 0.7807026928j
s7= -0.1126869110 0.7723365609j
Zeros:
wz1= 1.0257168633j
wz2= 1.2790480077j
wz3= 2.3047648710j

```

A frequência do fim da banda passante fica em $\omega_p = 0.72108498251$ rad/s. Dividindo polos e zeros por ω_p para ter a banda passante terminando em 1 rad/s tem-se:

```

Polos:
s1= -0.1562741060 -1.0710756424j
s2= -0.5519299187 -1.0826777866j
s3= -1.1812619473 -0.8899001770j
s4= -1.6682930599 0.0000000000j
s5= -1.1812619473 0.8899001770j
s6= -0.5519299187 1.0826777866j
s7= -0.1562741060 1.0710756424j
Zeros:
wz1= 1.4224632161j
wz2= 1.7737826175j
wz3= 3.1962458335j

```

Este filtro não tem realização convencional em “ladder” LC duplamente terminada, pois não é possível criar os zeros de transmissão por extração parcial do polo no infinito de imitância de porta com elementos positivos. Existe, entretanto, uma realização em “lattice” desbalanceada como a da figura 4.69⁵:

```

C1= 0.36073 F
Ca= 0.00655 F
L2= 0.95299 H
Lb= 0.09400 H
C3= 0.98614 F
Cc= 0.89736 F
L4= 0.78777 H

```

A tabela 5.3 lista alguns filtros de Chebyshev inversos com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB. Os correspondentes polos e zeros estão na tabela 5.4. Como os casos de ordem par não tem zeros de transmissão no infinito, impedindo realizações normais na forma LC duplamente terminada, nestes casos os últimos dois zeros de transmissão foram deslocados para o infinito⁶. Filtros com diferentes valores de A_{max} são versões escaladas em frequência, como nos de Butterworth. Filtros com diferentes valores de A_{min} tem que ser completamente recalculados.

5.1.4 Aproximação elíptica

Também conhecidas como aproximações de Cauer⁷ ou de Zolotarev⁸, são aproximações racionais simétricas, como a da figura 5.1, onde a banda passante tem oscilações semelhantes à da aproximação de

⁵Cálculos com os programas Cheby e Eletsim. Notar a alta dispersão de valores característica desta realização.

⁶É possível realizar esta operação com uma “transformação de Moebius” sobre o filtro original [11] ou pelo processo geral de síntese por otimização descrito adiante.

⁷Wilhelm Cauer, “Siebhaltungen”, V. D. I. Verlag, 1931.

⁸E.I. Zolotarev, “Application of elliptic functions to questions of functions deviating least and most from zero”, Izvestiya Imp. Akad. Nauk, 1877.

Tabela 5.3: Filtros normalizados Chebyshev inverso com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB. Os casos de ordem par foram modificados para terem dois zeros de transmissão no infinito, e no caso de ordem 7 a atenuação foi aumentada até o valor limite onde ainda existe a realização LC duplamente terminada, onde C_1 desaparece, com $A_{min} = 41.9339$ dB. Os filtros estão escalados para $\omega_p = 1$ rad/s.

Polinômios E(s)								
n	a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7
1	1.96523	1.00000						
2	1.96523	1.98254	1.00000					
3	2.07715	3.16076	2.51675	1.00000				
4	2.26632	4.58302	4.93504	3.14167	1.00000			
5	3.04698	6.94291	9.08203	7.50204	3.87456	1.00000		
6	3.88544	10.18551	15.54645	15.56495	10.59695	4.60368	1.00000	
7	5.90721	16.34397	27.75084	31.58163	25.71075	14.66932	5.41710	1.00000
Polinômios P(s)								
n	cte	a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6
1	1.96523	1.00000						
2	1.96523	1.00000						
3	0.11193	18.55796		1.00000				
4	0.30109	7.52696		1.00000				
5	0.09014	33.80118		13.00023		1.00000		
6	0.27582	14.08687		7.96184		1.00000		
7	0.07945	74.34779		64.70096		16.08738		1.00000
Ladder LC d. t.								
n	Rg/Rl	L/C 1	L/C 2	L/C 3	L/C 4	L/C 5	L/C 6	L/C 7
1	1.00000							
	1.00000	1.01769						
2	1.00000		1.00881					
	1.00000	1.00881						
3	1.00000		1.52168					
	1.00000	0.76084	0.03541	0.76084				
4	1.00000		1.47566	0.09588	0.54657			
	1.00000	0.63660		1.38562				
5	1.00000		1.02900		1.24962			
	1.00000	0.28421	0.27046	1.55924	0.08507	0.43518		
6	1.00000		0.71035		1.65069	0.19453	0.26042	
	1.00000	0.03496	0.53044	1.61799		0.96850		
7	1.00000		0.62804		1.21654		0.92226	
	1.00000	0.00000	0.48400	1.25647	0.38853	1.23631	0.10151	0.27400

Tabela 5.4: Filtros normalizados Chebyshev inverso com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB, polos e zeros.

Polos							
n	re/im 1	w/Q 1	re/im 2	w/Q 2	re/im 3	w/Q 3	re/im 4
1	-1.96523						
2	-0.99127	1.40187					
	0.99127	0.70711					
3	-0.60121	1.25713	-1.31434				
	1.10405	1.04551					
4	-0.41431	1.18427	-1.15653	1.27119			
	1.10943	1.42922	0.52761	0.54957			
5	-0.28108	1.13658	-0.94610	1.28873	-1.42019		
	1.10127	2.02178	0.87506	0.68107			
6	-0.21342	1.10699	-0.74059	1.24457	-1.34784	1.43073	
	1.08622	2.59349	1.00024	0.84026	0.47992	0.53075	
7	-0.16085	1.08357	-0.56201	1.21000	-1.17356	1.45454	-1.62425
	1.07156	3.36820	1.07156	1.07649	0.85932	0.61971	
Zeros							
n	w1	w2	w3				
1							
2							
3	4.30789						
4	2.74353						
5	3.06709	1.89557					
6	2.30389	1.62909					
7	3.26832	1.81378	1.45454				

Chebyshev, e a banda de rejeição tem oscilações similares à da aproximação de Chebyshev inversa. Na forma normalizada o centro geométrico da banda de transição fica em $\omega = 1$ rad/s, e os zeros de atenuação e transmissão ficam em frequências umas inversas das outras. A aproximação pode ser caracterizada apenas por um polinômio $Q_n(\omega)$ ⁹, com $K(j\omega)/\epsilon$ sendo uma “função racional de Chebyshev”.

$$K(j\omega) = \frac{\epsilon\alpha Q_n(\omega)}{\omega^n Q_n(1/\omega)} = \frac{\epsilon\alpha Q_n(\omega)}{Q_{nr}(\omega)}$$

Estas aproximações são as de maior seletividade possível, dada a ordem e as atenuações A_{max} e A_{min} .

Exemplo: No caso de ordem 5, com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB, resultam $\epsilon = 0.508847$ e $\alpha = 14.0183$, e o polinômio $Q_5(\omega)$, com $Q_5(1) = 1$, vale:

$$Q_5(\omega) = 7.31150\omega^5 - 8.53064\omega^3 + 2.21915\omega$$

Assim, $K(j\omega)$ fica com a forma:

$$K(j\omega) = \frac{\epsilon\alpha Q_5(\omega)}{\omega^5 Q_5(1/\omega)} = 0.508847 \times 14.0183 \frac{7.31150\omega^5 - 8.53064\omega^3 + 2.21915\omega}{2.21915\omega^4 - 8.53064\omega^3 + 7.31150}$$

O gráfico desta função é como a figura 5.2, com $\omega_p = 1/\omega_s$, e $K(j) = \epsilon\alpha$. Montando $K(s)$ girando as singularidades de $K(j\omega)$ para o eixo imaginário¹⁰ e obtendo $E(s)$ se obtém os polinômios da aproximação:

$$F(s) = s^5 + 1.16674s^3 + 0.303515s$$

$$P(s) = 0.0425497(s^4 + 3.84411s^2 + 3.29473)$$

$$E(s) = s^5 + 0.836458s^4 + 1.51567s^3 + 0.839356s^2 + 0.530659s + 0.140190$$

A função é usualmente reescalada em frequência de forma a fazer $\omega_p = 1$ rad/s, o que não foi feito no caso. As curvas do filtro são como as da figura 5.1.

Os casos de ordem par não tem ganho máximo em $\omega = 0$ nem zeros de transmissão no infinito. A tabela 5.5 lista exemplos de filtros elípticos com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB, escalados para $\omega_p = 1$ rad/s. Os correspondentes polos e zeros estão na tabela 5.6. As terminações são diferentes, como nos filtros de Chebyshev, nos casos de ordem par, e são normalizadas com valores inversos. As redes não são fisicamente simétricas ou antimétricas devido aos tanques LC criando os zeros de transmissão imaginários, mas elas são eletricamente simétricas para ordens ímpares e antimétricas para ordens pares. Os casos de ordem par foram modificados para terem dois zeros de transmissão no infinito, como feito para os filtros Chebyshev inverso. Para estas aproximações, filtros com diferentes especificações de atenuação na banda passante ou na de rejeição são diferentes e precisam ser completamente recalculados.

As figuras 5.9 e 5.10 mostram as curvas de módulo para os filtros dos tipos Butterworth, Chebyshev, Chebyshev inverso e elíptico para $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB. Os filtros estão exatamente como saem das aproximações, sem correções para realizabilidade como rede passiva. Assim, os filtros de Butterworth e Chebyshev são exatamente os das tabelas, mas os de Chebyshev inverso e os elípticos de ordens pares estão sem zeros de transmissão no infinito, e o filtro de Chebyshev inverso de ordem 7 é o do exemplo que não tem realização em “ladder” normal. A notar, o aumento da atenuação dos filtros de Chebyshev em relação ao de Butterworth e as seletividades idênticas dos filtros de Chebyshev e Chebyshev inverso. Os filtros de ordem 1 são iguais nos quatro casos.

⁹A obtenção analítica deste polinômio dados apenas a ordem, ϵ e α é um tanto complexa e não será estudada aqui por enquanto, mas ele pode ser obtido facilmente por otimização numérica como descrito a seguir, ou a partir da seletividade, como visto adiante. Estes polinômios são diferentes para diferentes valores de $\epsilon\alpha$.

¹⁰Basta colocar todos os sinais positivos.

Tabela 5.5: Filtros normalizados elípticos com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB. Os casos de ordem par foram modificados para terem dois zeros de transmissão no infinito. Os filtros estão escalados para $\omega_p = 1$ rad/s.

Polinômios E(s)								
n	a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7
1	1.96523	1.00000						
2	1.10251	1.09773	1.00000					
3	0.52652	1.24338	0.97824	1.00000				
4	0.33389	0.78812	1.49460	0.94264	1.00000			
5	0.22985	0.78813	1.12923	1.84712	0.92340	1.00000		
6	0.18044	0.52941	1.35729	1.44413	2.19522	0.91665	1.00000	
7	0.16409	0.61549	1.12573	2.27761	1.87481	2.66453	0.91245	1.00000
Polinômios P(s)								
n	cte	a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6
1	1.96523	1.00000						
2	0.98261	1.00000						
3	0.06920	7.60846		1.00000				
4	0.09888	3.00956		1.00000				
5	0.04697	4.89329		4.68475		1.00000		
6	0.06685	2.40575		3.15939		1.00000		
7	0.04342	3.77933		7.76932		5.04161		1.00000
Ladder LC d. t.								
n	Rg/Rl	L/C 1	L/C 2	L/C 3	L/C 4	L/C 5	L/C 6	L/C 7
1	1.00000							
	1.00000	1.01769						
2	1.63087		1.11716					
	0.61317	1.11716						
3	1.00000		0.90421					
	1.00000	1.90941	0.14536	1.90941				
4	1.63087		1.56041	0.24659	1.08802			
	0.61317	1.30096		1.34747				
5	1.00000		0.58608		0.88163			
	1.00000	1.41517	1.08537	2.13067	0.36440	1.84422		
6	1.63087		0.69866		1.61193	0.45769	0.98137	
	0.61317	0.71306	1.11803	1.41622		1.16268		
7	1.00000		0.45393		0.32951		0.85560	
	1.00000	1.20109	1.70759	1.20355	2.73822	1.64784	0.44218	1.81054

Tabela 5.6: Filtros normalizados elípticos com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB, polos e zeros.

Polos							
n	re/im 1	w/Q 1	re/im 2	w/Q 2	re/im 3	w/Q 3	re/im 4
1	-1.96523						
2	-0.54887	1.05000					
	0.89513	0.95652					
3	-0.22726	1.00267	-0.52372				
	0.97657	2.20599					
4	-0.11423	0.99816	-0.35709	0.57890			
	0.99160	4.36919	0.45564	0.81057			
5	-0.04992	0.99945	-0.21911	0.77275	-0.38534		
	0.99820	10.01033	0.74103	1.76340			
6	-0.02684	0.99959	-0.12766	0.86922	-0.30383	0.48889	
	0.99923	18.62364	0.85980	3.40434	0.38302	0.80456	
7	-0.01134	0.99986	-0.06014	0.94231	-0.20591	0.71891	-0.35765
	0.99980	44.06782	0.94039	7.83392	0.68879	1.74566	

Zeros			
n	w1	w2	w3
1			
2			
3	2.75834		
4	1.73481		
5	1.76429	1.25381	
6	1.37083	1.13147	
7	1.62579	1.13583	1.05276

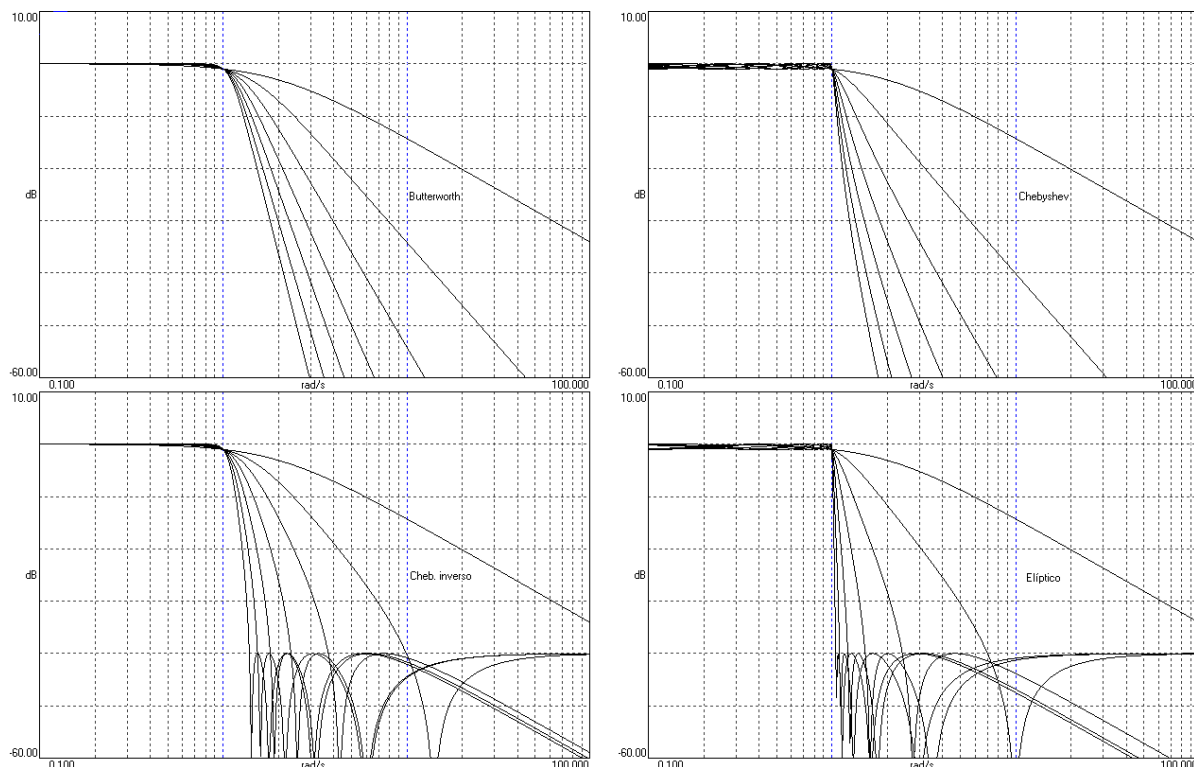


Figura 5.9: Curvas de módulo para quatro aproximações clássicas, para $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB, de ordens 1 a 7.

5.1.4.1 Formulação clássica das aproximações elípticas

A forma adotada aqui para as aproximações racionais simétricas parte das atenuações A_{max} e A_{min} e da ordem, deixando a seletividade do filtro resultante, $\xi = \omega_s/\omega_p$, que é única dados estes parâmetros, não especificada. A formulação clássica usa a seletividade e as atenuações para encontrar a ordem mínima necessária, e então deixa livre uma das atenuações, usualmente A_{min} . Na maior parte dos textos a síntese analítica vai apenas até a síntese da função característica $K(j\omega)$, resolvendo o passo final pela formulação geral usando a equação de Feldtkeller¹¹ As fórmulas necessárias são aqui apresentadas sem provas, mas são verificadas com exemplos.

A formulação primeiramente determina a ordem necessária por¹²:

$$n \geq \frac{K(\frac{1}{\xi})K'(\frac{1}{\alpha^2})}{K'(\frac{1}{\xi})K(\frac{1}{\alpha^2})}$$

onde $K(k)$ e $K'(k)$ são as integrais elípticas completas de primeira espécie, normal e complementar¹³:

¹¹Expressões para os polos da aproximação, raízes de $E(s)$, são conhecidas, em várias formas diferentes, nem todas exatas (uma formulação bem prática: A. Antoniou, "Digital signal processing, signals, systems, and filters", Mcgraw-Hill, 2006), e vários sistemas de matemática computacional fazem todo o cálculo. O programa Elliptic foi escrito para realizar os cálculos, usando a biblioteca Amath, disponível em http://www.wolfgang-ehrhhardt.de/amath_functions.html.

¹²É comum se ver na literatura $L = \alpha^2$, "fator de discriminação".

¹³Essas funções são simples de avaliar por métodos recursivos e estão disponíveis na maior parte dos programas de cálculo. Há alguma inconsistência no uso de k ou k^2 na literatura das funções elípticas. No sistemas Matlab e Octave por exemplo,

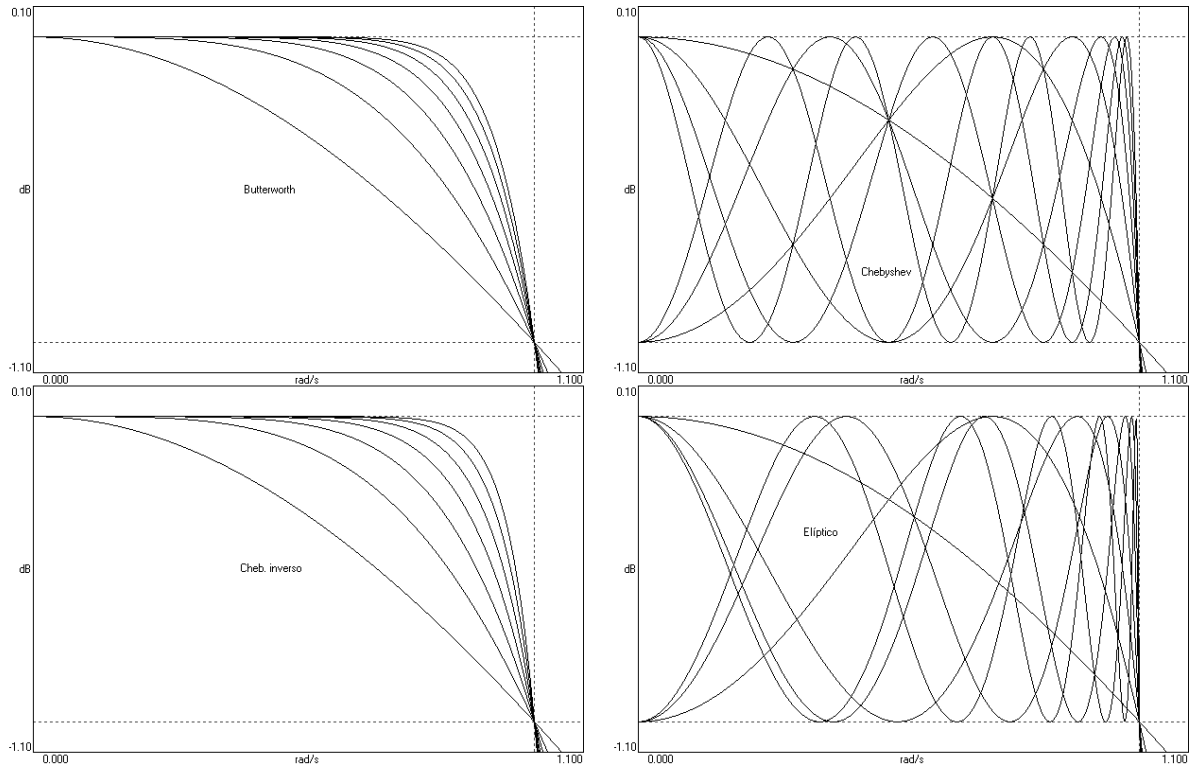


Figura 5.10: Curvas de módulo na banda passante para quatro aproximações clássicas, para $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB, de ordens 1 a 7.

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}; \quad K'(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 \phi}}$$

Com a ordem arredondada para cima, os zeros da função $K(j\omega)$ (para ordens ímpares há mais um em $\omega = 0$) são dadas por:

$$\omega_{zi} = \pm \operatorname{sn} \left(\frac{2i}{n} K(k); k \right), \quad i = 1, \dots, [n/2] \quad \text{para } n \text{ ímpar}$$

$$\omega_{zi} = \pm \operatorname{sn} \left(\frac{2i - 1}{n} K(k); k \right), \quad i = 1, \dots, n/2 \quad \text{para } n \text{ par}$$

onde $k = 1/\xi$ ($K(k)$ é uma integral elíptica, não confundir com $K(j\omega)$) e os polos ficam nas frequências $\omega_{pi} = \xi/\omega_{zi}$. $\operatorname{sn}(u; m)$ é a função seno elíptico de Jacobi. As fórmulas colocam a borda da banda passante em $\omega_p = 1$ rad/s e deixam livre A_{min} , maior ou igual à especificada¹⁴. A constante que multiplica $K(j\omega)$ com estas raízes pode ser obtida da relação $K(j) = \pm\epsilon$. O valor da A_{min} resultante pode ser obtido do valor da função característica no centro da banda de transição, resolvendo-se a relação $K(j\sqrt{\xi}) = \pm\epsilon\alpha$ para α , tendo-se então $A_{min} = 10 \log(1 + \epsilon^2\alpha^4)$ dB¹⁵.

o argumento da função K , $\operatorname{ellipke}(m)$ e das funções de Jacobi como sn , cn , dn , $\operatorname{ellipj}(u, m)$, é $m = k^2$.

¹⁴É possível resolver numericamente a equação do grau para ξ e então obter A_{min} exatamente.

¹⁵Nos filtros elípticos projetados desta forma, para dado A_{min} existe uma A_{max} que minimiza o fator de qualidade dos

Os polos da aproximação, raízes de $E(s)$ são dados pelas expressões¹⁶, que usam várias funções elípticas de Jacobi e integrais elípticas, também com $k = \frac{1}{\xi}$:

$$s_i = \frac{-\operatorname{cn}(f; k) \operatorname{dn}(f; k) \operatorname{sn}(v_0; \sqrt{1-k^2}) \operatorname{cn}(v_0; \sqrt{1-k^2}) \pm j \operatorname{sn}(f; k) \operatorname{dn}(v_0; \sqrt{1-k^2})}{1 - \operatorname{dn}^2(f; k) \operatorname{sn}^2(v_0; \sqrt{1-k^2})}$$

$$f = K(k) \frac{2i+1}{n} \quad i = 0, \dots, n/2 - 1 \text{ para } n \text{ par}$$

$$f = K(k) \frac{2i+2}{n} \quad i = 0, \dots, (n-1)/2 - 1 \text{ para } n \text{ ímpar}$$

$$\text{Polo real para } n \text{ ímpar: } s_r = \frac{-\operatorname{sn}(v_0; \sqrt{1-k^2}) \operatorname{cn}(v_0; \sqrt{1-k^2})}{1 - \operatorname{sn}^2(v_0; \sqrt{1-k^2})}$$

$$\text{onde } v_0 = \frac{K(k) \operatorname{sc}^{-1}\left(\frac{1}{\epsilon}; \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^4}}\right)}{nK\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}$$

Exemplo: Seja obter novamente o filtro elíptico de ordem 5 com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB, mas agora com borda da banda passante em $\omega_p = 1$ rad/s. Continua-se com $\epsilon = 0.508847$ e $\alpha = 14.0183$, e precisa-se da seletividade. Pode-se usar o polinômio $Q(\omega)$ calculado no exemplo anterior e resolver $K(j\omega_p) = \epsilon$, ou $\alpha Q(\omega_p) = \omega_p^5 Q(1/\omega_p)$, encontrando $\omega_p = 0.905847$ rad/s, e assim $\xi = \omega_s/\omega_p = 1/\omega_p^2 = 1.218682$. A ordem do filtro correspondente é então confirmada como esperado:

$$n = \frac{K\left(\frac{1}{\xi}\right)K'\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{K'\left(\frac{1}{\xi}\right)K\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)} = \frac{2.03781 \times 6.66706}{1.72983 \times 1.57081} = 5.00000$$

Os zeros não nulos de $K(j\omega)$ são, para $k = 1/\xi = 0.820560$:

$$\omega_{z1} = \pm \operatorname{sn}\left(\frac{2}{5}K(k); k\right) = \pm 0.690750$$

$$\omega_{z2} = \pm \operatorname{sn}\left(\frac{4}{5}K(k); k\right) = \pm 0.971985$$

A função característica é então:

$$K(j\omega) = k_0 \frac{\omega(\omega^2 - \omega_{z1}^2)(\omega^2 - \omega_{z2}^2)}{(\omega^2 - \xi^2\omega_{z1}^{-2})(\omega^2 - \xi^2\omega_{z2}^{-2})}$$

Fazendo $K(j) = \epsilon$:

$$k_0 = \epsilon \frac{(1 - \xi^2\omega_{z1}^{-2})(1 - \xi^2\omega_{z2}^{-2})}{(1 - \omega_{z1}^2)(1 - \omega_{z2}^2)} = 21.2891$$

Substituindo os valores numéricos e girando os polos e zeros para o eixo imaginário ($\omega = s/j$) tem-se imediatamente a função característica $K(s) = F(s)/P(s)$. A solução da equação de Feldtkeller gera o polinômio $E(s)$:

polos do filtro, se a seletividade ξ for mantida, possivelmente reduzindo problemas de construção. Neste caso os polos do filtro ficam sobre um círculo no SPLE, com raio igual a $\sqrt{\omega_s\omega_p}$. Estes filtros são obtidos quando $\epsilon = 1/\alpha$, mas requerem bem pequena A_{max} para A_{min} grande, por exemplo $A_{max} = 0.000434316$ dB para $A_{min} = 40$ dB para um filtro de qualquer ordem. Ver: D.M. Rabrenovic e M.D. Lutovac, "Elliptic filters with minimal Q-factors", Electronics Letters, Vol. 30, No. 3, fevereiro de 1994.

¹⁶A função $\operatorname{sc}^{-1}(x, k)$ equivale à integral elíptica de primeira espécie incompleta $F(\arctan(x), k)$.

$$\begin{aligned}
F(s) &= s^5 + 1.42189s^3 + 0.450775s \\
P(s) &= 0.0469722(s^4 + 4.68475^2 + 4.89330) \\
E(s) &= s^5 + 0.923399s^4 + 1.84712s^3 + 1.12923s^2 + 0.788127s + 0.229849
\end{aligned}$$

Os polos são obtidos das expressões analíticas, com $v_0 = 0.370497$, como:

$$\begin{aligned}
s_{1,5} &= -0.219107 \pm j0.741034 \\
s_{2,4} &= -0.0499207 \pm j0.998198 \\
s_3 &= -0.385344
\end{aligned}$$

o que resulta no mesmo $E(s)$ ¹⁷. São estas as funções listadas na tabela 5.5 para o caso de ordem 5.

Exemplo: Para verificar o que acontece quando a ordem é arredondada, seja obter um filtro elíptico com as mesmas especificações do anterior, mas com $\omega_s = 1.15$ rad/s. Tem-se então $\xi = 1.15$, e a ordem necessária vale:

$$n \geq \frac{K(\frac{1}{\xi})K'(\frac{1}{\alpha^2})}{K'(\frac{1}{\xi})K(\frac{1}{\alpha^2})} = \frac{2.16767 \times 6.66706}{1.68244 \times 1.57081} = 5.46847 \implies n = 6$$

A aplicação das fórmulas resulta em:

$$\begin{aligned}
&\text{Zeros de atenuação, zeros de } K(j\omega): \\
&\omega_{z1} = \pm 0.348073; \quad \omega_{z2} = \pm 0.818184; \quad \omega_{z3} = \pm 0.983604 \\
&\text{Zeros de transmissão, raízes de } P(s): \\
&z_{1,6} = \pm j3.30391; \quad z_{2,5} = \pm j1.40555; \quad z_{3,4} = \pm j1.16917 \\
&k_0 = 191.165; \quad v_0 = 0.328424 \\
&\text{Polos, raízes de } E(s): \\
&s_{1,6} = -0.299908 \pm j0.379209 \\
&s_{2,5} = -0.129504 \pm j0.851196 \\
&s_{3,4} = -0.0292337 \pm j0.998817
\end{aligned}$$

Fazendo a montagem dos polinômios da aproximação:

$$\begin{aligned}
F(s) &= s^6 + 1.75806s^4 + 0.845971s^2 + 0.0784662 \\
P(s) &= 0.00523091(s^6 + 14.2583s^4 + 39.1870s^2 + 29.4784) \\
E(s) &= s^6 + 0.917291s^5 + 2.17911s^4 + 1.42881s^3 + 1.33151s^2 + 0.514556s + 0.173014
\end{aligned}$$

A curva de módulo fica como na figura 5.11. O filtro tem a banda passante com $A_{max} = 1$ dB terminando em 1 rad/s, e a banda de rejeição começando em 1.15 rad/s, com a atenuação mínima¹⁸:

$$\epsilon\alpha = k_0 \frac{\prod_{i=1}^3 (\xi - \omega_{zi}^2)}{\prod_{i=1}^3 \left(\xi - \left(\frac{\xi}{\omega_{zi}} \right)^2 \right)} \therefore \alpha = 19.3826 \therefore A_{min} = 45.6283 \text{ dB}$$

¹⁷A constante que multiplica $P(s)$, no caso $1/k_0$, poderia também ser obtida de $E(0)/P(0) = 1$, ou de $E(0)/P(0) = \sqrt{1 + \epsilon^2}$ para ordens pares.

¹⁸No caso, como a ordem é par, o ganho para $\omega = \infty$ vale $A_{min} = 20 \log(k_0) = 45.6283$ dB.

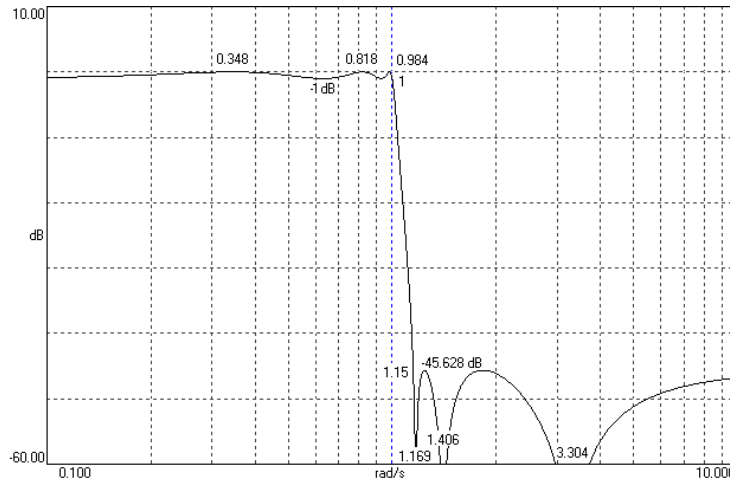


Figura 5.11: Curva de módulo para o filtro elíptico de ordem 6 do exemplo, com atenuações e zeros de atenuação e transmissão mostrados.

5.1.5 Generalização das aproximações por função característica

O caso geral das aproximações descritas é o em que a função característica é descrita por dois polinômios $X(\omega)$ e $Y(\omega)$, do mesmo grau:

$$K(j\omega) = \frac{\epsilon\alpha X_n(\omega)}{\omega^n Y_n(1/\omega)} = \frac{\epsilon\alpha X_n(\omega)}{Y_{nr}(\omega)}$$

O número de raízes em 0 de $X_n(\omega)$ é o número de zeros de atenuação em zero, e o número de raízes em 0 de $Y_n(\omega)$ é o número de zeros de transmissão no infinito. As aproximações são obtidas com $K(j) = \epsilon\alpha X(1)/Y(1)$, o que coloca o centro da banda de transição em $\omega = 1$ rad/s se $X_n(1) = Y_n(1) = 1$. Se $X_n(1) = 1$ e $Y_n(1) = \alpha$ tem-se $\omega_p = 1$ rad/s, e se $X_n(1) = \alpha$ e $Y_n(1) = 1$ tem-se $\omega_s = 1$ rad/s. Assim, a aproximação de Butterworth é obtida com $X_n(\omega) = \omega^n$ e $Y_n(\omega) = \alpha\omega^n$, a de Chebyshev com $X_n(\omega) = C_n(\omega)$ e $Y_n(\omega) = \alpha\omega^n$, a de Chebyshev inversa com $X_n(\omega) = \alpha\omega^n$ e $Y_n(\omega) = C_n(\omega)$, e a elíptica com $X_n(\omega) = Y_n(\omega) = Q_n(\omega)$. Outras aproximações, e também estas, podem ser obtidas pela variação no número de zeros de transmissão em zero e do número de zeros de transmissão no infinito, e pela otimização numérica dos polinômios $X_n(\omega)$ e $Y_n(\omega)$ de forma a gerar a forma desejada para $K(j\omega)$ ¹⁹.

5.1.5.1 Obtenção da função característica por otimização

Um método que obtém numericamente $K(j\omega)$ para as aproximações clássicas e muitas variações, descrito em [13], é o seguinte: Seja o número de zeros de atenuação da aproximação na origem, p_x , o número de raízes na origem de $X_n(\omega)$, e o número de zeros de transmissão no infinito, p_y , o número de raízes na origem de $Y_n(\omega)$. Com isto, e dado o grau da aproximação, n , $X_n(\omega)$ possui $m_x = (n - p_x)/2 + 1$, e $Y_n(\omega)$ $m_y = (n - p_y)/2 + 1$ coeficientes a serem determinados. Na banda passante, a função $K(j\omega)/\epsilon = \alpha X_n(\omega)/Y_{nr}(\omega)$ possui $m_x - 1$ valores extremos f_{xk} a serem determinados, cada um ocorrendo em uma frequência ω_{xk} , $0 \leq \omega < 1$ (um em 0 somente se $p_x = 0$, quando não há zero de atenuação na origem). Cada valor $f_{xk} = \pm 1$ produz um ponto na frequência ω_{xk} onde a atenuação na banda passante vale A_{max} dB, e cada mudança de sinal entre f_{xk} sucessivos produz zeros de atenuação entre frequências ω_{xk}

¹⁹O programa Eletsim faz estas otimizações, na forma descrita a seguir.

sucessivas, com máxima transferência de potência possível na realização LC duplamente terminada. As características na banda de rejeição podem ser especificadas da mesma forma, mas usando-se a função $\alpha Y_n(\omega)/X_{nr}(\omega)$, que possui $m_y - 1$ valores extremos f_{yk} a serem especificados, cada um ocorrendo em uma frequência ω_{yk} , $0 \leq \omega < 1$ (um em 0 somente se $p_y = 0$, quando não há zero de transmissão no infinito, caso irrealizável em rede LC duplamente terminada). Cada valor $f_{yk} = \pm 1$ produz um ponto na frequência $1/\omega_{yk}$, onde a atenuação vale A_{min} dB, e cada troca de sinal entre f_{yk} sucessivos produz zeros de transmissão entre duas frequências $1/\omega_{yk}$ sucessivas. Valores $f_{xk} = 0$ produzem zeros duplos de atenuação e valores $f_{yk} = 0$ produzem zeros duplos de transmissão. Valores f_{xk} produzindo qualquer atenuação A_{pk} na banda passante podem ser calculados por $f_{xk} = \pm \frac{1}{\epsilon} \sqrt{10^{0.1A_{pk}} - 1}$, e valores f_{yk} produzindo qualquer atenuação A_{rk} na banda de rejeição podem ser calculados por $f_{yk} = \pm \epsilon \alpha^2 / \sqrt{10^{0.1A_{rk}} - 1}$.

Seja uma aproximação de ordem n . A função $K(j\omega)/\epsilon$ desejada tem a forma:

$$\frac{\alpha X_n(\omega)}{Y_{nr}(\omega)} = \frac{ax_n\omega^n + ax_{n-2}\omega^{n-2} + \dots + ax_{p_x+2}\omega^{p_x+2} + ax_{p_x}\omega^{p_x}}{ay_{p_y}\omega^{n-p_y} + ay_{p_y+2}\omega^{n-p_y-2} + \dots + ay_{n-2}\omega^2 + ay_n}$$

Como aproximação inicial, pode ser usado para $X_n(\omega)$ o polinômio $\omega^{p_x-1}C_{n-p_x+1}(\omega)$ para n ímpar ou $\omega^{p_x}C_{n-p_x}(\omega)$ para n par, onde $C_k(\omega)$ o polinômio de Chebyshev de ordem k . Para $Y_n(\omega)$ usa-se uma aproximação semelhante, com p_y no lugar de p_x . O algoritmo para a determinação dos coeficientes \vec{a}_x e \vec{a}_y de $X_n(\omega)$ e $Y_n(\omega)$ e das frequências $\vec{\omega}_x$ e $\vec{\omega}_y$ é:

1. Achar ω_{xk} , $k = 1, \dots, m_x - 1$, as $m_x - 1$ raízes imediatamente menores que 1 do polinômio $Y_{nr}(\omega)X'_n(\omega) - X_n(\omega)Y'_{nr}(\omega)$, zeros da derivada de $\alpha X_n(\omega)/Y_{nr}(\omega)$ em relação a ω para $0 \leq \omega < 1$.
2. Resolver o sistema de equações lineares dado por: $\alpha X_n(\omega_{xk}) = f_{xk}Y_{nr}(\omega_{xk})$, $k = 1, \dots, m_x - 1$; $X_n(1) = 1$, para encontrar os novos coeficientes de $X_n(\omega)$.
3. Trocando $X_n(\omega)$ com $Y_n(\omega)$, $\vec{\omega}_x$ com $\vec{\omega}_y$, \vec{f}_x com \vec{f}_y e m_x com m_y , repetir (1) e (2).
4. Repetir (1), (2) e (3) até a convergência.

A convergência é um pouco demorada, mas segura, havendo apenas limites de ordem devidos a acumulação de erro numérico. As restrições sobre os valores dos f_{xk} e f_{yk} para a convergência do algoritmo são de que três valores sucessivos não podem estar em ordem crescente ou decrescente, e dois valores sucessivos não devem ser iguais ou o sistema (2) torna-se singular na convergência. Isto inclui os valores de $\alpha X_n(\omega)/Y_{nr}(\omega)$ e $\alpha Y_n(\omega)/X_{nr}(\omega)$ em $\omega = 0$ (0, se $p_{x,y} > 0$) e $\omega = 1$ (α , já que $X(1) = Y(1) = 1$). Apesar disto, aproximações com zeros de atenuação ou transmissão com multiplicidade maior que 2 no eixo $j\omega$, podem ser obtidas com precisão satisfatória especificando-se múltiplos f_{xk} ou f_{yk} seguidos como 0.

O método permite a geração numérica das complexas aproximações elípticas, e permite facilmente a modificação de aproximações de Chebyshev inversas e elípticas de ordem par para terem dois zeros de transmissão no infinito, permitindo realizações normais LC duplamente terminadas. É também simples modificar aproximações de Chebyshev e elípticas de ordem par para que tenham dois zeros de atenuação em zero, permitindo terminações iguais na rede LC que realiza o filtro. Em [13] o método foi desenvolvido para a realização de filtros com estruturas LC dup. term. simétricas e antimétricas, o que pode ser feito gerando zeros de transmissão duplos no eixo imaginário, de forma que tanques LC nas duas metades da rede sejam iguais ou duais.

Exemplo: Seja obter um filtro similar a um filtro elíptico de quinta ordem, com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB, que normalmente apresentaria zeros de atenuação em zero e em duas frequências na banda passante (os zeros de $K(j\omega)$ na figura 5.2), com uma modificação que gere zeros duplos de atenuação na borda da banda passante. Isto gera também, em uma realização LC duplamente terminada, zeros duplos

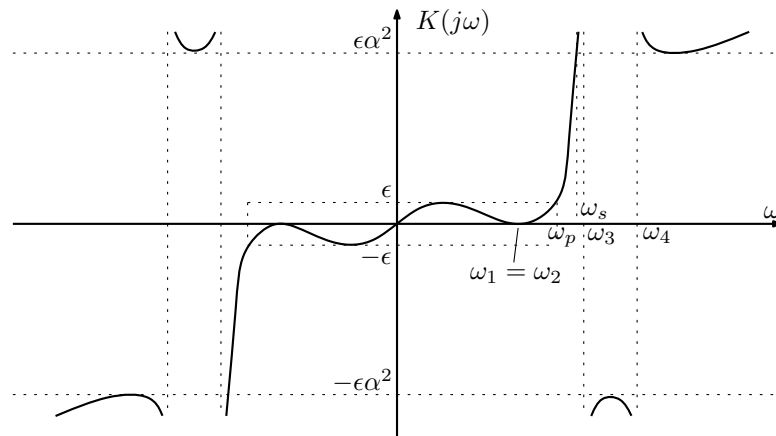


Figura 5.12: Gráfico de $K(j\omega)$ que gera zeros duplos de atenuação na borda da banda passante.

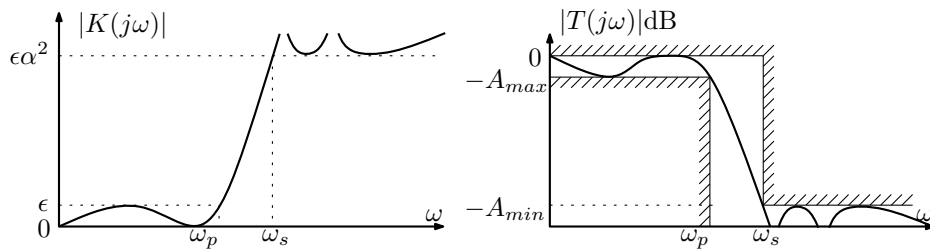


Figura 5.13: Função característica e módulo da função de transferência para a aproximação com zeros duplos de atenuação na borda da banda passante (ordem 5).

de sensibilidade em relação aos elementos reativos nesta frequência. A função característica necessária tem a aparência da figura 5.12, resultando em filtros como o da figura 5.13.

No método de otimização, são especificados $\vec{f}_x = (1, 0)$ e $\vec{f}_y = (1, -1)$. As atenuações geram $\epsilon = 0.508847$ e $\alpha = 14.0183$. Ao fim do processo, normalizando-se a borda da banda passante para $\omega_p = 1$ rad/s, os polinômios da aproximação são obtidos como:

$$\begin{aligned}
 F(s) &= s^5 + 1.53203s^3 + 0.586780s \\
 P(s) &= 0.0512808(s^4 + 5.44322s^2 + 6.54134) \\
 E(s) &= s^5 + 1.15978s^4 + 2.20326s^3 + 1.52363s^2 + 1.08592 + 0.335446
 \end{aligned}$$

A síntese da rede leva à estrutura da figura 5.14. Uma comparação da curva de módulo com a de um filtro elíptico convencional é mostrada na figura 5.15.

O mesmo tipo de modificação pode ser feito nos filtros racionais de ordem maior que 3. A tabela 5.7 lista os polinômios, polos e zeros e realizações para alguns destes filtros. Os filtros de ordem par foram feitos com zeros duplos de transmissão no infinito.

Os métodos analíticos permitem a obtenção das aproximações com grande precisão, evitando os passos numericamente críticos de fatoração polinomial na equação de Feldkeller e na otimização numérica da função característica. Problemas numéricos começam a ocorrer, entretanto, apenas para ordens muito maiores que as úteis em aplicações reais, tornando a síntese numérica perfeitamente aceitável para qual-

Tabela 5.7: Filtros racionais assimétricos com zeros duplos de atenuação na borda da banda passante, normalizados com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB.

Polinômios E(s)								
n	a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7
4	0.63249	1.37452	2.10394	1.43721	1.00000			
5	0.33545	1.08592	1.52363	2.20326	1.15978	1.00000		
6	0.23149	0.66360	1.62800	1.72374	2.42437	1.04438	1.00000	
7	0.18675	0.69167	1.25397	2.47582	2.03920	2.78672	0.96869	1.00000

Polos							
n	re/im 1	w/Q 1	re/im 2	w/Q 2	re/im 3	w/Q 3	re/im 4
4	-0.20636	1.05483	-0.51224	0.75396			
	1.03444	2.55577	0.55323	0.73594			
5	-0.08777	1.02333	-0.27712	0.86311	-0.42999		
	1.01956	5.82970	0.81741	1.55726			
6	-0.04613	1.01193	-0.15416	0.92041	-0.32189	0.51658	
	1.01088	10.96829	0.90741	2.98516	0.40403	0.80240	
7	-0.01951	1.00515	-0.07032	0.96573	-0.21157	0.73599	-0.36589
	1.00496	25.76041	0.96317	6.86673	0.70493	1.73934	

Polinômios P(s)								
n	cte	a0	a1	a2	a3	a4	a5	a6
4	0.13983	4.03127		1.00000				
5	0.05128	6.54134		5.44322		1.00000		
6	0.07359	2.80370		3.41602		1.00000		
7	0.04437	4.20946		8.36104		5.23557		1.00000

Zeros			
n	w1	w2	w3
4	2.00780		
5	1.91105	1.33833	
6	1.43005	1.17088	
7	1.66013	1.15675	1.06840

Ladder LC d. t.								
n	Rg/R1	L/C 1	L/C 2	L/C 3	L/C 4	L/C 5	L/C 6	L/C 7
4	1.63087		1.72857	0.15650	0.70977			
	0.61317	0.85328		1.58506				
5	1.00000		0.63004		0.85796			
	1.00000	1.05383	0.88615	2.49647	0.31915	1.43622		
6	1.63087		0.71625		1.67543	0.44174	0.82467	
	0.61317	0.55970	1.01837	1.54969		1.10696		
7	1.00000		0.42717		0.40223		0.81016	
	1.00000	1.05182	1.74952	1.35279	2.17799	1.68321	0.44786	1.67993

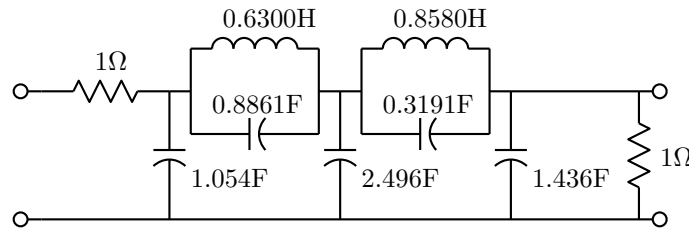


Figura 5.14: Rede “ladder” LC duplamente terminada realizando um filtro com zeros duplos de atenuação na borda da banda passante.

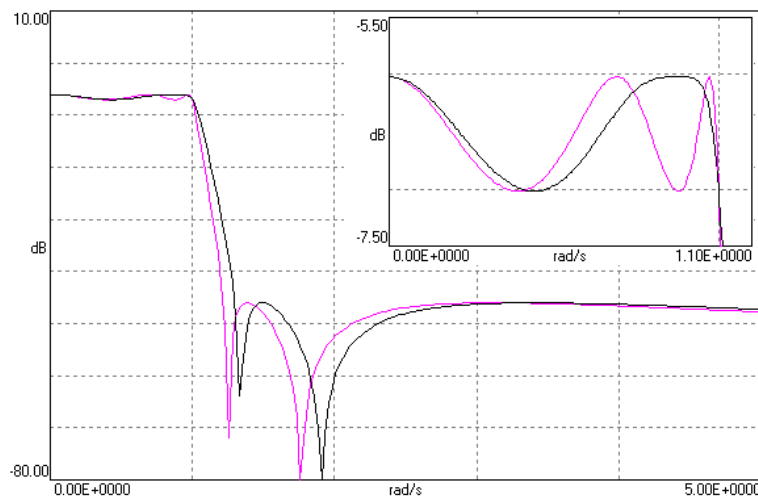


Figura 5.15: Curva de módulo do filtro da figura 5.14, comparada com a de um filtro elíptico de ordem 5, com detalhe da banda passante.

quer caso prático.

5.1.6 Casadores de impedância

A técnica de síntese duplamente terminada pode ser usada para a geração de casadores de impedância ótimos. Seja obter uma rede LC que “case” resistências R_1 e R_2 em uma faixa larga de frequências. Deseja-se que as resistências R_1 e R_2 observem impedâncias iguais a elas, exatamente, em uma frequência ω_0 , e em uma faixa ao redor tão precisamente quanto possível. Isto pode ser conseguido com uma função característica como a da figura 5.16, no caso de ordem 4, que é da forma:

$$K(j\omega) = \epsilon \left(\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1 \right)^2$$

Com maiores potências do termo multiplicando ϵ , casadores mais perfeitos são obtidos. O caso de ordem 2 recai no conhecido “L-match”. Considerando as duas resistências e o circuito casador, tem-se uma rede LC duplamente terminada com máxima transferência de potência em ω_0 . O ganho de tensão nesta frequência é o máximo em redes assim, $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$. O ganho em $\omega = 0$ é o do divisor resistivo, $\frac{R_2}{R_1 + R_2}$.

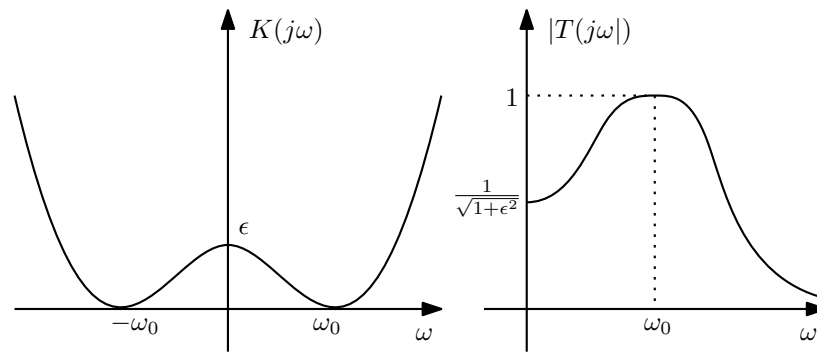


Figura 5.16: Função característica e módulo da função de transferência $T(s) = \frac{1}{H(s)}$ para um casador de impedâncias.

Da função $|T(j\omega)|$, a razão entre os dois ganhos se associa com ϵ :

$$\sqrt{1 + \epsilon^2} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}}{\frac{R_2}{R_1 + R_2}} \quad \therefore \quad \epsilon = \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}}{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}\right)^2 - 1} = \frac{R_2 - R_1}{2\sqrt{R_1 R_2}}$$

Exemplo: Seja obter um casador de ordem 4 normalizado de 1Ω com 16Ω em 1 rad/s . Resulta $\epsilon = 1.875$. As funções requeridas para a aproximação e realização são então obtidas a partir de $K(j\omega) = \epsilon(\omega^4 - 2\omega^2 + 1)$:

$$\begin{aligned} F(s) &= -1.875(s^4 + 2s^2 + 1) \\ P(s) &= 1 \\ E(s) &= 1.875(s^4 + 1.0827s^3 + 2.5861s^2 + 1.3645s + 1.1333) \end{aligned}$$

A função para a síntese da rede pode ser z_{11}/R_1 , notando que o sinal de $F(s)$ foi usado negativo para se ter a estrutura desejada, que para $R_1 = 1 \Omega$ dá:

$$z_{11} = \frac{E_e - F_e}{E_o + F_o} = \frac{3.75(s^4 + 2.2931s^2 + 1.0667)}{2.0301(s^3 + 1.2603s)}$$

A rede obtida pela expansão de z_{11} na primeira forma de Cauer é a da figura 5.17. A figura também mostra os módulos das funções de transferência, em escala linear. Observa-se para a saída o máximo de ganho 2 em 1 rad/s , maximamente plano nas vizinhanças, e na entrada o ganho 0.5 na mesma frequência e próximo disto nas vizinhanças com derivada nula, indicando máxima transferência de potência e casamento de impedâncias preciso até segunda ordem. O filtro realiza zeros duplos de atenuação em 1 rad/s .

A razão das resistências determina também a banda passante do casador. O corte de 3.0103 decibéis ocorre quando $|H(j\omega)| = \sqrt{2}$, ou $1 + |K(j\omega)|^2 = 2$. Resultam que os limites da banda passante ficam em $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 \pm \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}}$, no caso em 0.5193 e 1.315 rad/s .

5.2 Outras aproximações

Em filtros processando sinais onde a forma de onda é importante (como vídeo, dados), e não apenas o espectro de frequências (como áudio), é importante manter os diferentes componentes de frequência do

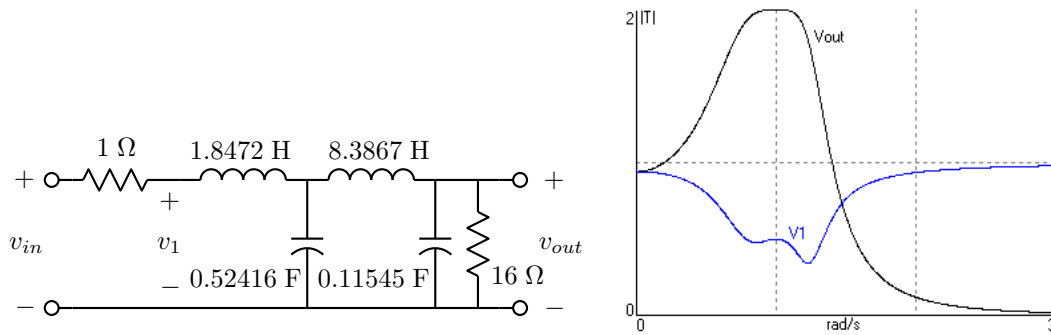


Figura 5.17: Casador de impedâncias 1:16 e módulos das funções de transferência obtidas.

sinal filtrado com suas relações originais de atraso e de fase. Um filtro ideal deveria portanto atrasar igualmente todos os sinais na sua banda passante, o que se consegue fazendo com que a fase da função de transferência seja proporcional à frequência, ou, que o filtro tenha “fase linear”. Nas aproximações de módulo estudadas este aspecto é ignorado, e então os filtros podem distorcer severamente as formas de onda filtradas. É possível entretanto gerar aproximações em que o que se procura obter é a linearidade da fase. Como a fase é uma função inconveniente de tratar numericamente, pode-se trabalhar com sua derivada negativa, o atraso de grupo $T_G(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \angle T(j\omega)$. Para $T(s)$ sendo uma razão de polinômios de s , $T_G(\omega)$ é uma razão de polinômios de ω também. Se a fase for linear, o atraso de grupo é idêntico ao atraso da função de transferência. Algumas aproximações e técnicas de aproximar a fase linear são descritas a seguir.

5.2.1 Aproximação de Bessel

A aproximação de Bessel [11] gera filtros com atraso de grupo maximamente plano. Ela é uma aproximação polinomial, onde o polinômio $E(s)$, para atraso de grupo unitário, é um dos polinômios abaixo. $P(s)$ é uma constante, igual ao coeficiente de grau 0 de $E(s)$. Não há controle sobre a forma da curva de módulo, que resulta com queda monotônica. O atraso de grupo mantido unitário em $\omega = 0$ aumenta a frequência da borda da banda passante conforme o grau.

$$E_1(s) = s + 1$$

$$E_2(s) = s^2 + 3s + 3$$

$$E_3(s) = s^3 + 6s^2 + 15s + 15$$

$$E_4(s) = s^4 + 10s^3 + 45s^2 + 105s + 105$$

$$E_5(s) = s^5 + 15s^4 + 105s^3 + 420s^2 + 945s + 945$$

$$E_n(s) = (2n - 1)E_{n-1}(s) + s^2E_{n-2}(s)$$

A dedução formal da aproximação é um tanto complexa, mas não é difícil encontrar os primeiros casos, com ajuda de um programa de cálculo algébrico. Seja por exemplo o caso de terceira ordem. Deseja-se uma função de transferência da forma:

$$T(s) = \frac{c}{s^3 + as^2 + bs + c}$$

Substituindo $s = j\omega$ e calculando a fase vem:

$$\angle(\omega) = \tan^{-1} \frac{c\omega(\omega^2 - b)}{c(c - a\omega^2)}$$

E o atraso de grupo vale:

$$T_G(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\angle(\omega) = \frac{a\omega^4 + (ab - 3c)\omega^2 + bc}{\omega^6 + (a^2 - 2b)\omega^4 + (b^2 - 2ac)\omega^2 + c^2}$$

A primeira condição a ser satisfeita pelos coeficientes a , b e c é de que $T_G(0) = 1$, resultando em $b = c$. As condições seguintes são que deve-se ter o máximo número de derivadas de T_G em relação a ω nulas para $\omega = 0$ ²⁰. A primeira derivada é naturalmente sempre nula, pois a função é par. A segunda derivada vale:

$$\frac{d^2 T_G}{d\omega^2}(0) = \frac{2(3abc - b^3 - 3c^2)}{c^3}$$

A terceira derivada também é sempre nula, e a quarta derivada vale:

$$\frac{d^4 T_G}{d\omega^4}(0) = \frac{24(5a^2bc^2 - 5ac(b^3 + c^2 + b^2(b^3 + 5c^2)))}{c^5}$$

Basta então substituir $c = b$ na segunda derivada, obtendo $b = 3a - 3$, e com as duas substituições na quarta derivada vem $a = 6$. Tem-se então o resultado final da tabela acima:

$$T(s) = \frac{15}{s^3 + 6s^2 + 15s + 15}$$

5.2.2 Aproximação com atraso de grupo tipo Chebyshev

Analogamente ao feito para filtros de módulo, pode-se derivar uma série de aproximações onde o atraso de grupo oscila entre dois limites, como acontece com o módulo nos filtros de Chebyshev. As referências estão em [11]. Uma aproximação muito semelhante especifica desvio máximo da fase linear. Tabelas para estes filtros podem ser encontradas em [14]. Estes filtros apresentam melhor seletividade que os de Bessel e fase linear em faixa mais ampla, como pode ser visto na comparação entre um filtro de Bessel e um com erro “equiripple” de fase de 0.5° , mostrado na figura 5.18.²¹

5.2.3 Aproximação com atraso de grupo plano e zeros de transmissão finitos

Como zeros de transmissão no eixo imaginário não afetam a fase, a menos de invertê-la na passagem por eles, podem ser incluídos diretamente nos filtros polinomiais de Bessel e de atraso de grupo tipo Chebyshev sem afetar as características de atraso de grupo. O problema é apenas de localizá-los de forma a gerar atenuação com limite constante A_{min} na banda de rejeição. Também há referências a esta aproximação em [11].

²⁰ Aí um programa de cálculo algébrico é necessário.

²¹ As tabelas no livro de Zverev sempre colocam a atenuação na borda da banda passante $\omega_p = 1$ rad/s em 3.0103 dB. Daí os filtros de Bessel estão escalados em relação aos discutidos aqui. As tabelas listam também realizações LC dup. term. com terminações diferentes.

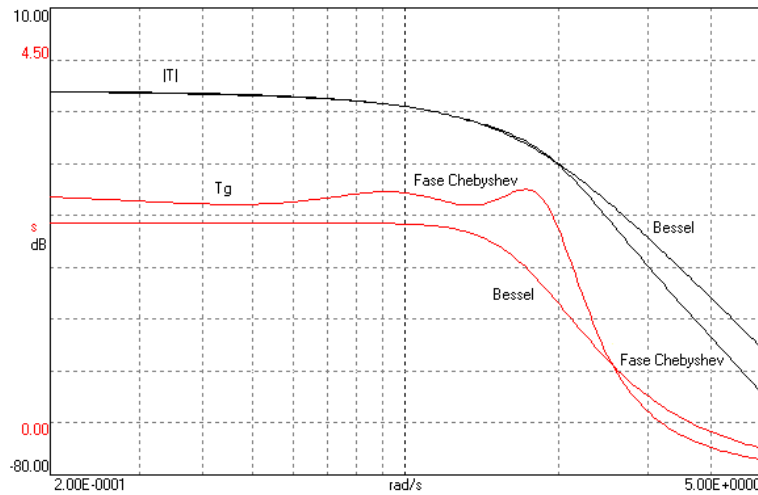


Figura 5.18: Curvas de módulo e atraso de grupo para um filtro de Bessel e um de fase linear com “ripple” de fase tipo Chebyshev de 0.5° .

5.2.4 Realização destes filtros

Como estas aproximações são especificadas diretamente por $H(s)$, podem ser diretamente realizadas em redes LC simplesmente terminadas, mas a realização duplamente terminada requer o cálculo de $K(s)$ a partir da equação de Feldtkeller. Como $K(s)$ não tem restrições de estabilidade, várias soluções podem existir na escolha das raízes de $F(s)$ entre as de $F(s)F(-s) = E(s)E(-s) + P(s)P(-s)$, levando a várias possíveis realizações.

Exemplo: Seja projetar um filtro de Bessel normalizado de ordem 5 em forma LC duplamente terminada. $E(s)$ e $P(s)$ são obtidos imediatamente da lista acima, e $F(s)$, da solução da equação de Feldtkeller, pode ter as raízes:

$$\begin{aligned} & \pm 2.54456 \pm 3.52462j \\ & 0 \\ & \pm 3.88052 \pm 1.26895j \end{aligned}$$

É possível escolher as raízes em um dos semiplanos ou um par em cada semiplano, levando a quatro possibilidades para $F(s)$ que são:

$$\begin{aligned} -2.5 \pm 3.5j, -3.9 \pm 1.3j : F(s) &= s^5 + 12.8502s^4 + 75.0632s^3 + 231.495s^2 + 315s \\ +2.5 \pm 3.5j, -3.9 \pm 1.3j : F(s) &= s^5 + 2.67192s^4 - 3.93042s^3 + 61.8372s^2 + 315s \\ -2.5 \pm 3.5j, +3.9 \pm 1.3j : F(s) &= s^5 - 2.67192s^4 - 3.93042s^3 - 61.8372s^2 + 315s \\ +2.5 \pm 3.5j, +3.9 \pm 1.3j : F(s) &= s^5 - 12.8502s^4 + 75.0632s^3 - 231.495s^2 + 315s \end{aligned}$$

Note-se que $F(s)$ não é puramente par ou ímpar, $K(j\omega)$ é complexo, e existe apenas um zero simples de atenuação no eixo imaginário, em zero. Com terminações iguais unitárias, a síntese usando os dois primeiros $F(s)$ gera as estruturas da figura 5.19. Os dois últimos são $F(-s)$ dos primeiros, e geram as mesmas redes invertidas. Com $-F(s)$ se obtém as formas duais. As estruturas não são simétricas.

Note-se que é inútil tentar obter filtros passa-altas, passa-faixa ou rejeita-faixa com fase linear a partir de transformações destes filtros, pois as características de fase ficam distorcidas pelas transforma-

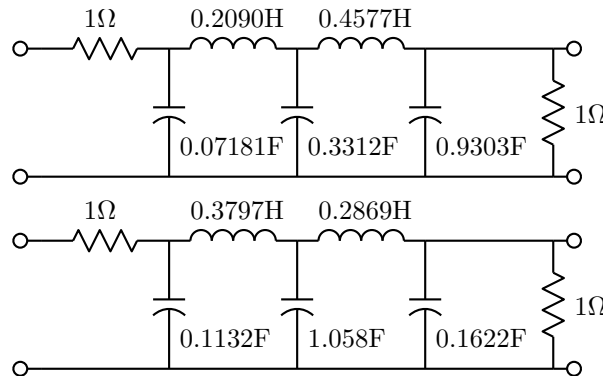


Figura 5.19: Redes “ladder” LC duplamente terminadas realizando filtros normalizados de Bessel.

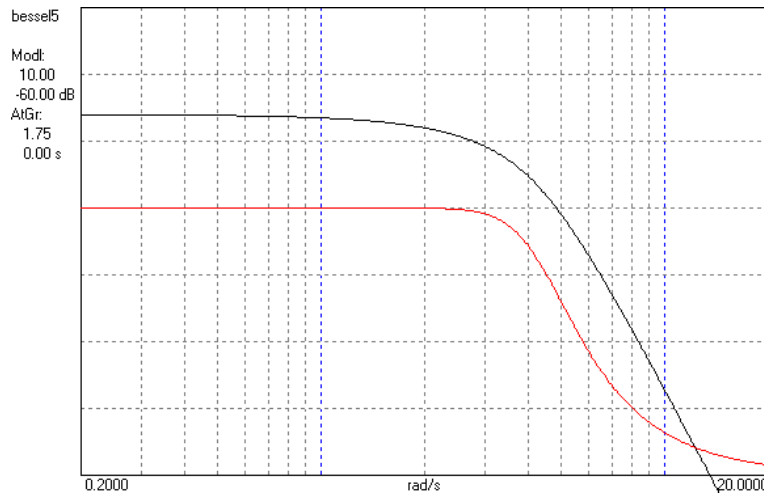


Figura 5.20: Curvas de módulo e de atraso de grupo para os filtros da figura 5.19.

ções. O mesmo acontece com filtros digitais, ou filtros chaveados como os discutidos adiante, onde as transformações de s para Z distorcem a escala de frequências²².

5.2.5 Equalizadores de fase

Uma forma de obter filtros com curvas de módulo ótimas e fase linear é colocar em cascata filtros convencionais de módulo e filtros “passa-tudo”, que tem polos e zeros em posições simétricas no plano complexo. Estes filtros tem módulo constante com a frequência mas fase que varia, igual ao dobro da fase de um filtro passa-baixas com os mesmos polos. É possível então obter um filtro com a curva de módulo do filtro original, e a curva de fase sendo a soma das curvas de fase do filtro de módulo e do filtro passa-tudo. O atraso de grupo se soma também, e se procura obter da composição uma curva de atraso de grupo maximamente plana, ou, mais usualmente, que varia entre dois limites dentro da banda

²²Para uma alternativa, ver: J-P Thiran, “Recursive digital filters with maximally flat group delay”, IEEE Trans. on Circuit Theory, vol. CT-18, No. 6, novembro de 1971.

passante. A aproximação para filtros equalizadores é obrigatoriamente por otimização numérica, embora soluções quase ótimas sejam bastante fáceis de se obter por tentativas. A realização passiva de filtros passa-tudo não pode ser feita em “ladder” devido aos zeros no semiplano lateral direito, mas realizações passivas em “lattice” LC duplamente terminada [11] são possíveis. Estas realizações exigem dobrar a ordem da estrutura, duplicando todos os polos, e realizando zeros em pares reais simétricos ou grupos de quatro em simetria quadrantal, cancelando os polos duplicados. Realizações ativas são sempre possíveis, evitando estas complicações.

Exemplo: O filtro normalizado da figura 5.21 é um filtro elíptico de quarta ordem com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB realizado em forma LC simplesmente terminada (que permite ganho constante no infinito) conectado a um equalizador de fase dimensionado para gerar um filtro com “ripple” uniforme de fase na banda passante. O equalizador baseado em giradores é de quarta ordem, e apresenta impedância de entrada constante de 1Ω , servindo de terminação para o filtro²³.

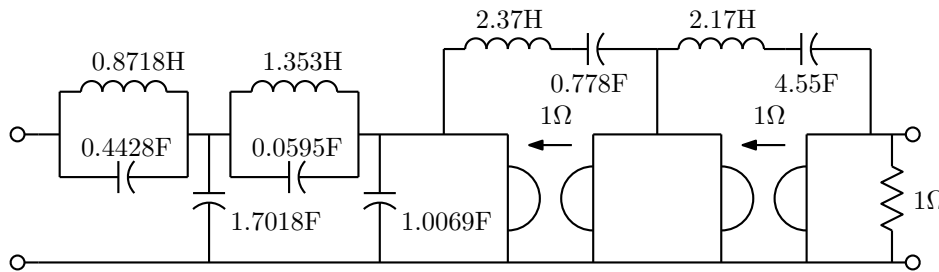


Figura 5.21: Rede “ladder” LC simplesmente terminada ligada a um equalizador de fase.

Os polos e zeros do filtro completo, contando os do filtro e do equalizador, são:

Polos:	Zeros:
$-0.211 \pm 0.706j$	$\pm 3.525j$
$-0.105 \pm 0.994j$	$\pm 1.610j$
$-0.230 \pm 0.220j$	$+0.230 \pm 0.220j$
$-0.364 \pm 0.479j$	$+0.211 \pm 0.706j$

A figura 5.22 mostra as curvas de módulo e atraso de grupo, para a saída normal do filtro, antes do equalizador, e a para a saída equalizada.

5.3 Redes de múltipla ressonância

Uma técnica especial que pode ser incluída na classe das aproximações é a do projeto de geradores de pulsos, que usam funções de transferência especialmente projetadas para gerar pulsos com formas desejadas, a partir de condições iniciais (resposta à entrada zero) ou a partir de uma excitação externa (resposta ao estado zero). Nesta seção será tratada a classe de “redes de múltipla ressonância” [22], [50], [16] que são generalizações da “Bobina de Tesla”.

5.3.1 Transferência de energia entre capacitores

Como já visto em exemplos anteriores, a bobina de Tesla é uma rede LC de ordem 4 (Figura 1.25) onde um capacitor primário C_1 é carregado com uma tensão inicial, e ocorre um transiente idealmente perpétuo

²³Exemplo do artigo [29].

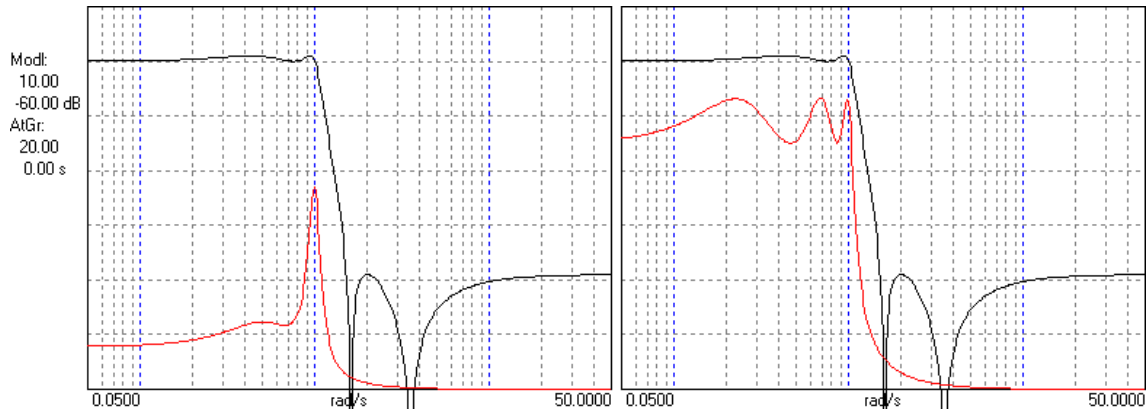


Figura 5.22: Curvas de módulo e de atraso de grupo para o filtro da figura 5.21, normal (esquerda) e equalizado (direita).

que periodicamente transfere toda a energia para um capacitor secundário C_2 . A conservação da energia faz com que a tensão de pico no capacitor secundário seja a tensão inicial multiplicada por $\sqrt{C_1/C_2}$. O circuito é normalmente construído com $C_1 \gg C_2$, resultando em um gerador de pulsos de alta tensão. É possível generalizar a ideia para redes de ordens mais altas, com um processo similar ao da síntese de filtros passivos. Considere-se o circuito da figura 5.23, uma rede sem transformador onde se deseja que uma energia inicial em C_1 seja transferida para o capacitor C_p . Deseja-se obter a impedância de saída da rede LC, que está na primeira forma de Cauer para rede LC. Considerando a origem do tempo como o instante em que toda a energia está em C_p , a condição inicial sobre C_p pode ser tratada como uma fonte de corrente impulsional em paralelo com C_p , a única fonte existente no circuito. A tensão $V_{out}(s)$ tem então a mesma forma da impedância $Z_{out}(s)$. Para uma rede LC sem perdas de ordem $2n$, $v_{out}(t)$ é composta de n cossenóides que se somam construtivamente no instante agora considerado como inicial. Para que as cossenóides se somem também destrutivamente no real instante inicial da operação suas frequências devem ser múltiplas de uma frequência base ω_0 , com fatores multiplicadores k_i sendo inteiros sucessivos com diferenças ímpares, que definem o “modo” de operação do sistema, $k_1 : k_2 : \dots : k_p$. As correntes nos indutores são todas somas de senóides, e então são naturalmente nulas nos instantes inicial e final. A relação entre $Z_{out}(s)$ e $V_{out}(s)$ é:

$$Z_{out}(s) = \frac{1}{C_p v_{out\text{pico}}} V_{out}(s) = \sum_{i=1}^p \frac{A_i s}{s^2 + k_i^2 \omega_0^2}$$

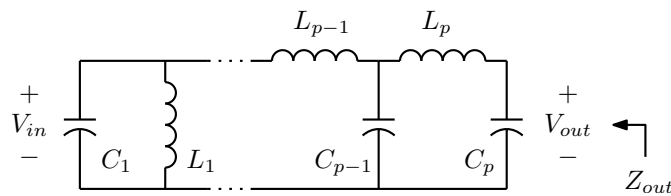


Figura 5.23: Rede de múltipla ressonância realizando uma bobina de Tesla generalizada, sem transformador.

Considere-se agora a origem do tempo normal, no instante em que $v_{in}(t)$ é máxima. A transformada

de Laplace da tensão v_{out} devida a uma tensão inicial em C_1 tem a forma, considerando as $2n$ frequências naturais em pares complexos imaginários e o único zero de transmissão em zero causado por L_1 :

$$V_{out}(s) = \frac{\alpha s}{(s^2 + k_1^2 \omega_0^2)(s^2 + k_2^2 \omega_0^2) \dots (s^2 + k_p^2 \omega_0^2)}$$

A expansão em frações parciais de $V_{out}(s)$ nesta forma é similar à de $Z_{out}(s)$, com diferença nos resíduos pois no último caso a energia inicial está em C_1 enquanto no anterior estava em C_p , mas descrevem a mesma forma de onda, apenas com origem do tempo diferente. Como os resíduos A_i de $Z_{out}(s)$ tem que ser todos positivos, eles são então justamente os módulos dos resíduos para $V_{out}(s)$, com um fator de escala. O fator α pode ser escolhido arbitrariamente como $\alpha = 1$, e os resíduos calculados escalados para que seus módulos somem $1/C_p$, tendo-se então a desejada expressão para $Z_{out}(s)$, que é então realizada na primeira forma de Caueer.

Exemplo: Considere-se um circuito de tripla ressonância, operando no modo mais rápido, 1:2:3, normalizada para $\omega_0 = 1$ rad/s e $C_p = C_3 = 1$ F. Primeiramente expande-se $V_{out}(s)$ em cossenos:

$$V_{out}(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)(s^2 + 9)} = \frac{\frac{1}{24}s}{s^2 + 1} - \frac{\frac{1}{15}s}{s^2 + 4} + \frac{\frac{1}{40}s}{s^2 + 9}$$

$Z_{out}(s)$ é então obtida tomando-se os resíduos em módulo e os escalando de forma a ter soma unitária:

$$Z_{out}(s) = \frac{15}{2} \left(\frac{\frac{1}{24}s}{s^2 + 1} + \frac{\frac{1}{15}s}{s^2 + 4} + \frac{\frac{1}{40}s}{s^2 + 9} \right) = \frac{s^5 + 10s^3 + \frac{33}{2}s}{s^6 + 14s^4 + 49s^2 + 36}$$

A rede expandida normalizada é a da figura 5.24.

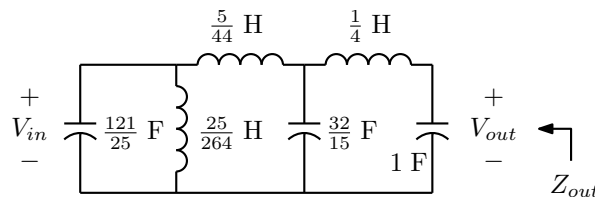


Figura 5.24: Rede de múltipla ressonância normalizada de ordem 6 para o modo 1:2:3.

Um transformador ideal pode ser inserido entre L_1 e L_2 como na figura 1.49, absorvendo-os em um transformador real, no caso como na figura 5.25. No caso de ordem 6 resulta o chamado “Magnifier” de Tesla, onde o terceiro indutor é separado do transformador.

Exemplo: Seja projetar um gerador de de alta tensão de tripla ressonância para gerar pulsos de 100 kV a partir de um capacitor C_1 carregado com 10 kV, no modo 1:2:3 com primeira ressonância em 100 kHz e capacitância final C_3 de 20 pF. O protótipo da figura 5.24 gera um ganho de tensão $\frac{v_{out}}{v_{in}} = \sqrt{\frac{C_1}{C_3}} = \frac{11}{5}$. Para completar 10, o transformador ideal na figura 5.25a deve ter $n = \frac{50}{11}$. Para desnormalizar em frequência as capacitâncias e indutâncias devem ser divididas por $\omega = 2\pi \times 10^5$, e para desnormalizar em impedância deve ser usado o fator $\frac{1}{20 \times 10^{-12} \omega}$, dividindo capacitâncias e multiplicando indutâncias. Resultam os elementos e a resposta mostrados nas figuras 5.26 e 5.27. Depois de $5 \mu s$ toda a energia é transferida para C_3 , retornando depois para C_1 se não for usada.

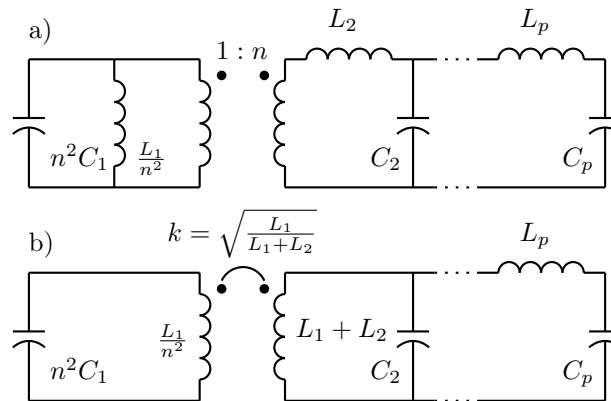


Figura 5.25: Rede de múltipla ressonância com transformador. a) Com transformador ideal incluído. b) Com transformador real equivalente.

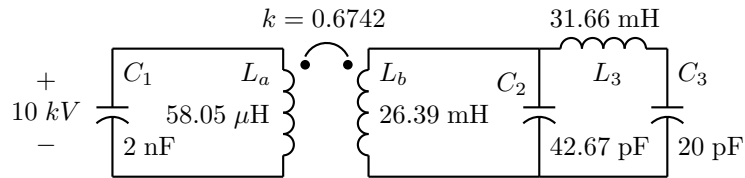


Figura 5.26: Rede de tripla ressonância desnormalizada.

5.3.2 Transferência de energia de indutor para capacitor

Uma simples modificação no procedimento de síntese leva a generalizações da “Bobina de indução”, que funciona de forma similar à bobina de Tesla, mas com a energia inicial no indutor primário em vez de no capacitor, como na figura 5.28. A impedância de saída da rede continua sendo equivalente a uma soma de cossenóides, mas as formas de onda de tensão com a origem do tempo no instante inicial normal são somas de senóides. A transformada de Laplace de v_{out} devida a uma corrente inicial no indutor L_1 tem um numerador constante, pois todos os zeros de transmissão da rede estão no infinito:

$$V_{out}(s) = \frac{\alpha}{(s^2 + k_1^2 \omega_0^2)(s^2 + k_2^2 \omega_0^2) \dots (s^2 + k_p^2 \omega_0^2)} = \sum_{i=1}^p \frac{B_i k_i \omega_0}{s^2 + k_i^2 \omega_0^2}$$

Neste caso os multiplicadores k_i devem ser inteiros ímpares sucessivos, com diferenças que são dobros de ímpar, para se ter somas construtivas e destrutivas periódicas. A impedância $Z_{out}(s)$ é obtida tomando-se os valores absolutos dos resíduos B_i como os resíduos A_i , e então a rede LC é expandida pela primeira forma de Cauer. Um transformador pode ser incluído da mesma forma como na figura 5.25.

Exemplo: Seja obter o circuito de múltipla ressonância de ordem 6 com transferência de energia de L_1 para C_3 na forma mais rápida 1:3:5, normalizado para $\omega_0 = 1$ rad/s e $C_p = C_3 = 1$ F. Primeiramente expande-se $V_{out}(s)$ em senos:

$$V_{out}(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)(s^2 + 25)} = \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{3}{s^2 + 9} + \frac{5}{s^2 + 25}$$

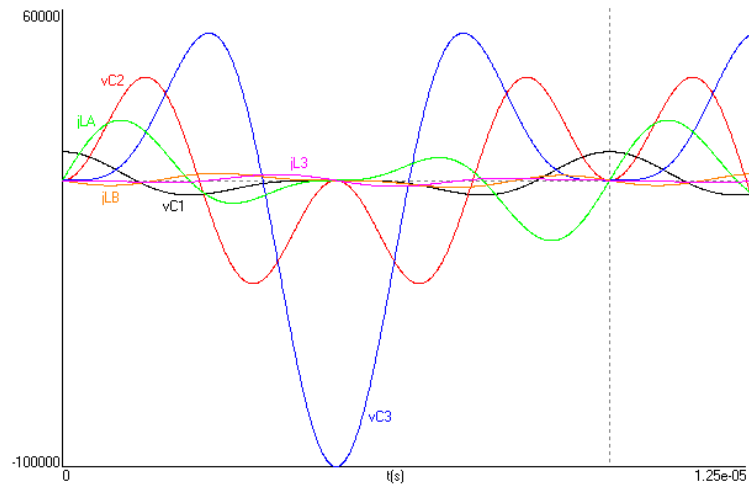


Figura 5.27: Tensões sobre os capacitores e correntes nos indutores (mA) da rede da figura 5.26.

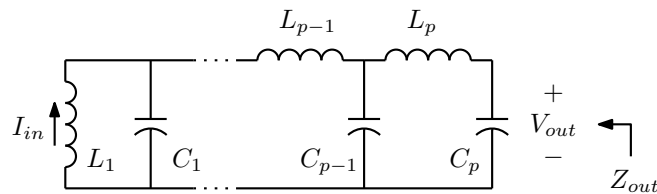


Figura 5.28: Rede de múltipla ressonância realizando uma bobina de indução generalizada, sem transformador.

Tomando os valores absolutos dos resíduos, multiplica-se a expressão por 120 para que a soma dos resíduos seja unitária e gera-se $Z_{out}(s)$ com uma expansão em cossenos:

$$Z_{out}(s) = 120 \left(\frac{\frac{1}{192}s}{s^2 + 1} + \frac{\frac{1}{384}s}{s^2 + 9} + \frac{\frac{1}{1920}s}{s^2 + 25} \right) = \frac{s^5 + 30s^3 + 149s}{s^6 + 35s^4 + 259s^2 + 225}$$

A realização de Z_{out} é a da figura 5.29

A conservação da energia diz que o máximo ganho de transresistância $\frac{v_{out}}{i_{in}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_3}} = \frac{8}{15}$, mas a desnormalização em impedância afeta a transresistância. Se a desnormalização for feita como no exemplo anterior, para gerar $C_3 = 20$ pF e primeira ressonância em 100 kHz, resulta uma transresistância de 42441 Ω , significando que para gerar 100 kV na saída são necessários 2.3562 A em L_1 . Um transformador pode ser inserido para alterar a corrente ou as indutâncias para valores mais práticos. No caso, há o problema da tensão sobre o capacitor C_1 atingir valor muito alto (76 kV). Em uma realização prática haveria em paralelo com C_1 uma chave, mecânica ou eletrônica, para ligar L_1 ao circuito²⁴, e seria difícil fazê-la suportar tal tensão. Um transformador ideal com relação de espiras de 1:100 reduziria a tensão para viáveis 760 V, mas aumentaria a corrente inicial para 235.62 A. O compromisso usual em circuitos assim é operar em mais baixa frequência, pois então a transresistância fica maior na proporção inversa e

²⁴Na verdade uma chave em série com uma fonte de baixa tensão para colocar a corrente inicial em L_1 , e uma pequena tensão em C_1 , não considerada.

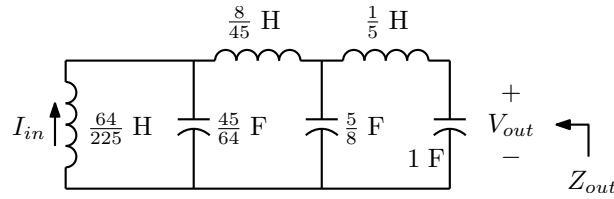


Figura 5.29: Rede de múltipla ressonância normalizada de ordem 6 para o modo 1:3:5 com energia inicial no indutor primário.

é possível usar menor corrente inicial. Seja então reduzir a frequência base para 10 kHz e introduzir um transformador com $n = 100$, usando uma corrente inicial de 23.562 A. Resulta o circuito da figura 5.30. As indutâncias são grandes, o coeficiente de acoplamento é alto e a relação de espiras é também grande, como usual em bobinas de indução²⁵.

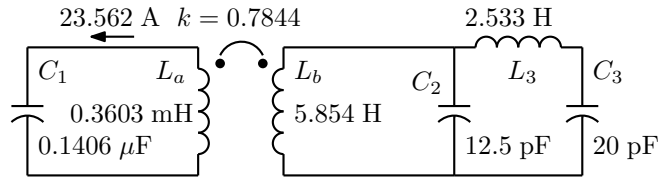


Figura 5.30: Bobina de indução de tripla ressonância desnormalizada.

As formas de onda resultantes são as da figura 5.31. A transferência completa de energia ocorre em 0.025 ms. As transferências de energia tem polaridades opostas em ciclos sucessivos.

5.3.3 Transferência incompleta de energia

É possível projetar redes de múltipla ressonância de modo a ter transferência incompleta de energia, em um caso simples deixando alguma energia no capacitor primário C_1 quando a transferência para C_p se completa, sem energia em outros componentes. Esta técnica permite um pequeno aumento da tensão de saída de uma bobina de Tesla convencional sem alterações dos indutores, e leva a outras formas de operação também, usando a resposta ao estado zero, como visto adiante [16]. No caso de transferência de energia entre capacitores, o que muda na formulação é que a forma de onda da tensão de saída com a origem do tempo ao fim do processo de transferência é uma superposição do efeito da carga em C_p , que gera $V_{out}(s)$ proporcional a $Z_{out}(s)$ como visto, e do efeito da carga deixada em C_1 , que gera um transiente normal de transferência de energia, mas com a origem do tempo ao fim da transferência. Considerando um fator de proporcionalidade ϵ , os resíduos A_i são os mesmos, mas $Z_{out}(s)$ é diferente:

$$V_{out}(s) = \sum_{i=1}^p \frac{|A_i|s}{s^2 + k_i^2\omega_0^2} = Z_{out}(s) + \epsilon \sum_{i=1}^p \frac{A_i s}{s^2 + k_i^2\omega_0^2}$$

$Z_{out}(s)$ tem então a forma abaixo. Com os A_i escalados de forma a que seus módulos somem 1, existem soluções para quaisquer valores de ϵ entre ± 1 .

²⁵A carga capacitiva está um tanto irrealisticamente pequena, considerando as capacitâncias parasitas que os indutores grandes iriam gerar, e a relação de espiras não precisaria ser tão grande, gerando L_a um tanto pequeno.

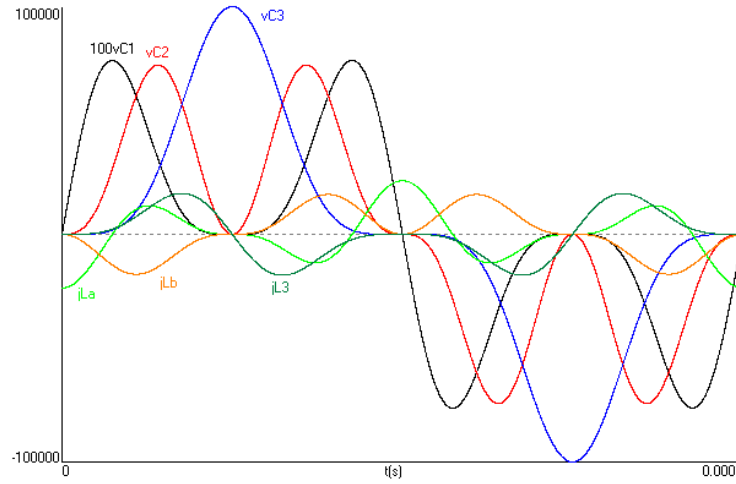


Figura 5.31: Tensões sobre os capacitores e correntes nos indutores (mA para jL_a , $10 \mu\text{A}$ para jL_b e jL_3) da rede da figura 5.30.

$$Z_{out}(s) = \sum_{i=1}^p \frac{(|A_i| - \epsilon A_i)s}{s^2 + k_i^2 \omega_0^2}$$

No caso de transferência de energia entre o indutor primário L_1 e C_p , aparecem superpostos o efeito da energia inicial em L_1 gerando tensão proporcional à impedância de saída e o efeito da tensão deixada em C_1 ao fim da transferência de energia:

$$V_{out}(s) = \sum_{i=1}^p \frac{|B_i|s}{s^2 + k_i^2 \omega_0^2} = Z_{out}(s) + \epsilon \sum_{i=1}^p \frac{A_i s}{s^2 + k_i^2 \omega_0^2}$$

Neste caso os multiplicadores k_i devem ser inteiros ímpares com diferença dobro de ímpar, e os resíduos B_i e A_i são diferentes, escalados de forma a ter soma de valores absolutos unitária por conveniência. Os limites de ϵ dependem dos valores dos resíduos.

$$Z_{out}(s) = \sum_{i=1}^p \frac{(|B_i| - \epsilon A_i)s}{s^2 + k_i^2 \omega_0^2}$$

Exemplo: Sejam as redes de ordem 6 dos exemplos anteriores. No caso da transferência entre capacitores os limites de ϵ são ± 1 . No caso de $\epsilon = -\frac{1}{2}$, resulta²⁶:

$$Z_{out}(s) = \frac{15}{2} \frac{(\frac{1}{24} - \epsilon \frac{1}{24})s}{s^2 + 1} + \frac{(\frac{1}{15} + \epsilon \frac{1}{15})s}{s^2 + 4} + \frac{(\frac{1}{40} - \epsilon \frac{1}{40})s}{s^2 + 9} = \frac{s^5 + 10s^3 + \frac{51}{4}s}{s^6 + 14s^4 + 49s^2 + 36}$$

²⁶O programa Multires realiza os cálculos e plota as curvas.

$$\begin{aligned} C_3 &= 1.000000000000 \\ L_3 &= 0.250000000000 \\ C_2 &= 1.422222222222 \\ L_2 &= 0.220588235294 \\ C_1 &= 3.853333333333 \\ L_1 &= 0.091911764706 \end{aligned}$$

No caso de transferência de indutor para capacitor os limites de ϵ são 1.875, -0.625 e 0.375, que anulam is termos em 1, 3 e 5 rad/s respectivamente. Não há solução com elementos positivos no primeiro caso. Usando $\epsilon = -\frac{1}{2}$ resulta:

$$Z_{out}(s) = \left(\frac{\left(\frac{120}{192} - \epsilon \frac{64}{192}\right)s}{s^2 + 1} + \frac{\left(\frac{120}{384} + \epsilon \frac{64}{128}\right)s}{s^2 + 9} + \frac{\left(\frac{120}{1920} - \epsilon \frac{64}{384}\right)s}{s^2 + 25} \right) = \frac{s^5 + 30s^3 + 181s}{s^6 + 35s^4 + 259s^2 + 225}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= 1.000000000000 \\ L_3 &= 0.111111111111 \\ C_2 &= 0.843750000000 \\ L_2 &= 0.187134502924 \\ C_1 &= 1.057617187500 \\ L_1 &= 0.239532163743 \end{aligned}$$

As respostas no tempo são mostradas na figura 5.32. Observa-se que as tensões sobre C_1 se aproximam de uma cossenóide (negativa) no caso da transferência entre capacitores e de uma senóide no caso da transferência de indutor para capacitor. Estas expansões são de pouco interesse por si, mas levam às redes operando com a resposta ao estado zero discutidas a seguir.

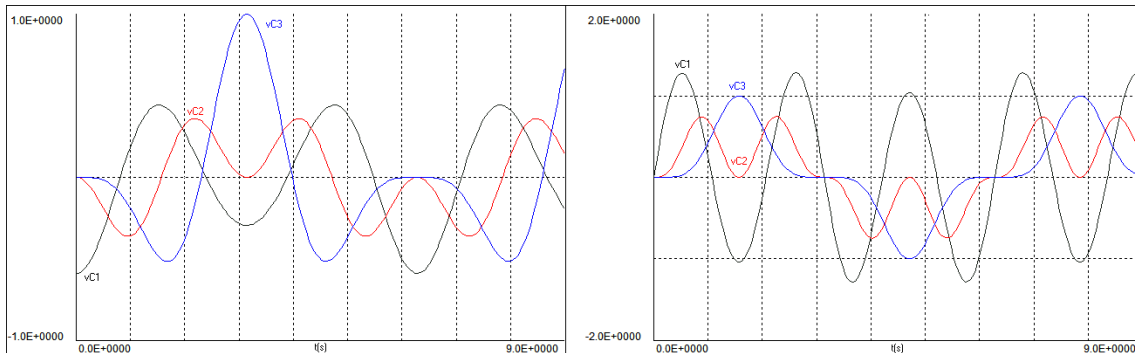


Figura 5.32: Tensões sobre os capacitores com transferência incompleta de energia. Esquerda: transferência entre capacitores. Direita: de indutor para capacitor.

5.3.4 Operação com a resposta ao estado zero

Nas expansões de $Z_{out}(s)$ com transferência incompleta de energia, nos limites dos valores de ϵ ocorre anulação do resíduo de um dos termos da expansão em cossenos (pode ser mais de um no caso da transferência entre capacitores). O efeito na expansão na primeira forma de Cauer é que surgem capacitâncias

tendendo ao infinito e indutâncias tendendo a zero na rede LC. Se apenas um dos resíduos se anula, o tanque LC primário $L_1 - C_1$ passa a se comportar como uma fonte de tensão, cossenoidal no caso da condição inicial estar em C_1 e senoidal se ela estiver em L_1 . Tem-se então uma rede LC onde as condições iniciais são substituídas por uma fonte forçante, que então opera em um regime de resposta ao estado zero. A estrutura resultante é a da figura 5.33. Os cálculos são feitos exatamente como no exemplo anterior. Um problema da síntese nesta forma é que como não existe mais o indutor L_1 não há uma forma simples de inserir um transformador na estrutura.

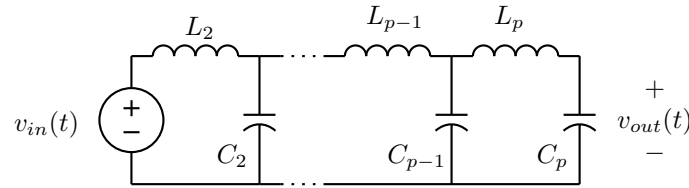


Figura 5.33: Estrutura de uma rede de múltipla ressonância passa-baixas usando a resposta ao estado zero.

Para poder incluir um transformador, uma solução é alterar a forma da estrutura básica de forma a fazer aparecer um “L” de indutores, como na figura 5.34[16]. A impedância Z_{out} é calculada da mesma forma, mas os resíduos A_i e B_i são calculados considerando os zeros de transmissão adicionais em zero criados pela estrutura:

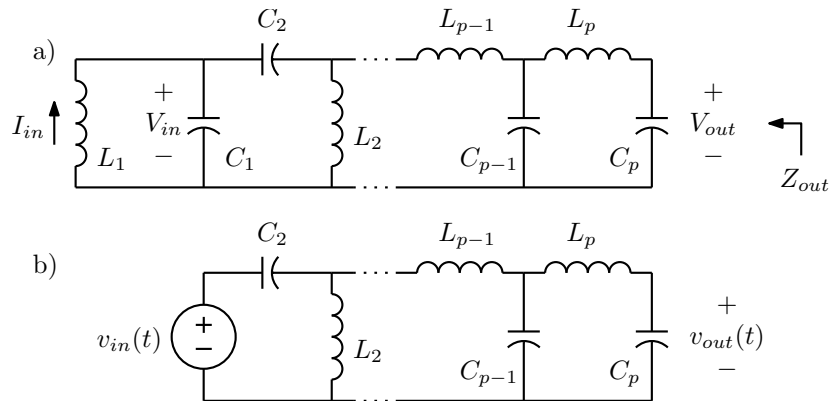


Figura 5.34: Rede de múltipla ressonância passa-faixa (a) e equivalente quando um dos resíduos de $Z_{out}(s)$ desaparece (b).

Para tensão inicial em C_1 , com k_i inteiros sucessivos com diferença ímpar, ou energia inicial em L_1 e restante em C_1 , com k_i inteiros ímpares sucessivos com diferença dobro de ímpar, levando à operação com a resposta ao estado zero e excitação cossenoidal. Existem três zeros de transmissão em zero para uma entrada em corrente em paralelo com C_1 em vez de apenas um:

$$V_{out}(s) = \frac{\alpha s^3}{(s^2 + k_1^2 \omega_0^2)(s^2 + k_2^2 \omega_0^2) \dots (s^2 + k_p^2 \omega_0^2)} = \sum_{i=1}^p \frac{A_i s}{s^2 + k_i^2 \omega_0^2}$$

Para energia inicial em L_1 , ou operação com resposta ao estado zero com excitação senoidal, com k_i inteiros ímpares sucessivos com diferença dobro de ímpar. Existem dois zeros de transmissão em zero

para uma entrada em tensão em série com L_1 em vez de nenhum:

$$V_{out}(s) = \frac{\alpha s^2}{(s^2 + k_1^2 \omega_0^2)(s^2 + k_2^2 \omega_0^2) \dots (s^2 + k_p^2 \omega_0^2)} = \sum_{i=1}^p \frac{B_i k_i \omega_0}{s^2 + k_i^2 \omega_0^2}$$

Obtida $Z_{out}(s)$ a partir destes resíduos e de valores extremos de ϵ , a rede ainda é obtida por uma expansão na primeira forma de Cauer, pois o tanque $L_1 - C_1$ desaparece. Apenas as conexões de L_2 e C_2 ficam modificadas. Os casos de maior interesse são os de ordem 6, que levam a redes de ordem 4 após a transformação do tanque $L_1 - C_1$ em fonte de excitação²⁷. O caso de transferência de energia entre capacitores leva a apenas uma solução, com excitação na frequência central, pois a outra possibilidade anula dois resíduos, fazendo cair a ordem da rede. Os casos derivados da transferência de energia de indutor para capacitor levam aparentemente sempre a duas soluções, com excitações na frequência central ou na frequência superior²⁸. A forma com excitação na frequência central gera maior ganho de tensão e é a mais prática, por facilidade de construção da fonte de excitação, que pode ser em onda quadrada sem grande efeito na operação idealizada com fonte senoidal.

Exemplo: Seja gerar versões usando a resposta ao estado zero com excitação cossenoidal e senoidal, nos modos mínimos de ordem 6, como nos exemplos anteriores. O caso com excitação cossenoidal no modo 1:2:3 requer a expansão em cossenos da função:

$$V_{out}(s) = \frac{s^3}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)(s^2 + 9)} = -\frac{\frac{1}{24}s}{s^2 + 1} + \frac{\frac{4}{15}s}{s^2 + 4} - \frac{\frac{9}{40}s}{s^2 + 9}$$

Para soma de módulos unitária os resíduos devem ser multiplicados por $\frac{15}{8}$. $Z_{out}(s)$ tem então a forma:

$$Z_{out}(s) = \frac{15}{8} \left(\frac{(\frac{1}{24} + \epsilon \frac{1}{24})s}{s^2 + 1} + \frac{(\frac{4}{15} - \epsilon \frac{4}{15})s}{s^2 + 4} + \frac{(\frac{9}{40} + \epsilon \frac{9}{40})s}{s^2 + 9} \right)$$

Como esperado, $\epsilon = 1$ elimina o termo na frequência central, restando $Z_{out}(s)$ de ordem 4, uma fonte em $\cos 2t$ e a rede da figura 5.35:

$$Z_{out}(s) = \frac{15}{8} \left(\frac{\frac{2}{24}s}{s^2 + 1} + 0 + \frac{\frac{18}{40}s}{s^2 + 9} \right) = \frac{s^3 + \frac{9}{4}s}{s^4 + 10s^2 + 9}$$

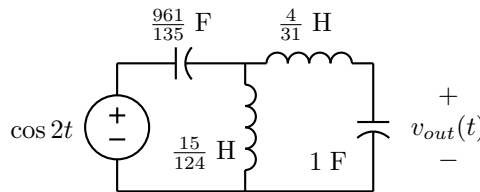


Figura 5.35: Rede de múltipla ressonância passa-faixa com excitação cossenoidal no modo 1:2:3.

Para gerar as versões com excitação senoidal no modo 1:3:5, precisa-se de duas expansões. A primeira para encontrar os B_i :

²⁷Na notação aqui usada os demais elementos são numerados de 2 a p .

²⁸A excitação na frequência inferior leva a resíduos negativos, mas pode ser possível usar formas de transferência incompleta de energia para gerar redes válidas [51].

$$V_{out}(s) = \frac{s^2}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)(s^2 + 25)} = -\frac{\frac{1}{192}1}{s^2 + 1} + \frac{\frac{3}{128}3}{s^2 + 9} - \frac{\frac{5}{384}5}{s^2 + 25}$$

e a segunda para encontrar os A_i :

$$V_{out}(s) = \frac{s^3}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)(s^2 + 25)} = -\frac{\frac{1}{192}s}{s^2 + 1} + \frac{\frac{9}{128}s}{s^2 + 9} - \frac{\frac{25}{384}s}{s^2 + 25}$$

Os B_i somam em módulo $\frac{1}{24}$ e os A_i somam em módulo $\frac{9}{64}$. A impedância $Z_{out}(s)$ vale então:

$$Z_{out}(s) = \frac{(24\frac{1}{192} + \epsilon\frac{64}{9}\frac{1}{192})s}{s^2 + 1} + \frac{(24\frac{3}{128} - \epsilon\frac{64}{9}\frac{9}{128})s}{s^2 + 9} + \frac{(24\frac{5}{384} + \epsilon\frac{64}{9}\frac{25}{384})s}{s^2 + 25}$$

Para zerar o primeiro resíduo, $\epsilon = -\frac{27}{8}$. Para zerar o segundo, $\epsilon = \frac{9}{8}$ e para zerar o terceiro $\epsilon = -\frac{27}{40}$. Só os dois últimos deixam todos os resíduos positivos. Com $\epsilon = \frac{9}{8}$ resulta $Z_{out}(s)$ de ordem 4, uma fonte em $\sin 3t$ e a rede da figura 5.36:

$$Z_{out}(s) = \frac{(24\frac{1}{192} + \frac{9}{8}\frac{64}{9}\frac{1}{192})s}{s^2 + 1} + 0 + \frac{(24\frac{5}{384} + \frac{9}{8}\frac{64}{9}\frac{25}{384})s}{s^2 + 25} = \frac{s^3 + 5s}{s^4 + 26s^2 + 25}$$

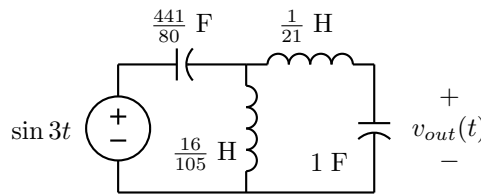


Figura 5.36: Rede de múltipla ressonância passa-faixa com excitação senoidal central no modo 1:3:5.

Com $\epsilon = -\frac{27}{40}$ desaparece o termo de frequência mais alta, substituído por uma fonte em $\sin 5t$ e a rede é a da figura 5.37:

$$Z_{out}(s) = \frac{(24\frac{1}{192} - \frac{27}{40}\frac{64}{9}\frac{1}{192})s}{s^2 + 1} + \frac{(24\frac{3}{128} + \frac{27}{40}\frac{64}{9}\frac{9}{128})s}{s^2 + 9} + 0 = \frac{s^3 + \frac{9}{5}s}{s^4 + 10s^2 + 9}$$

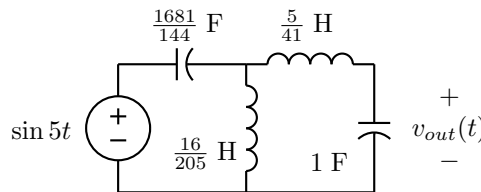


Figura 5.37: Rede de múltipla ressonância passa-faixa com excitação senoidal superior no modo 1:3:5.

Para inserir transformadores e desnormalizar as redes é conveniente especificar os valores de três componentes da rede e calcular os demais, determinando a relação de espiras do transformador ideal e os fatores de desnormalização em frequência e impedância. Especificando os valores de C_3 , L_3 e C_2 resultam os circuitos da figura 5.38²⁹. A figura 5.39 mostra simulações da operação dos três circuitos com v_{in} com

²⁹Cálculos com o programa Drsstd.

200 V de pico. A versão com excitação em cosseno resultou com ganho maior, seguida da versão com excitação em seno central. A versão com excitação em seno superior gera a mesma forma de onda, mas com ganho menor.

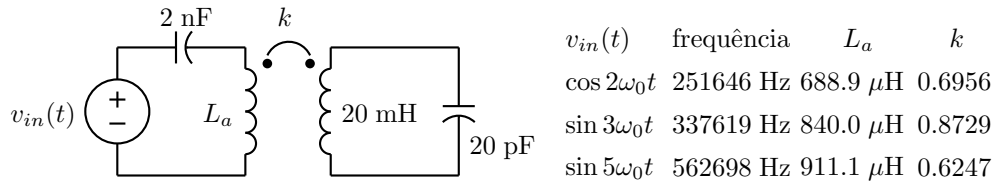


Figura 5.38: Redes de múltipla ressonância desnormalizadas.

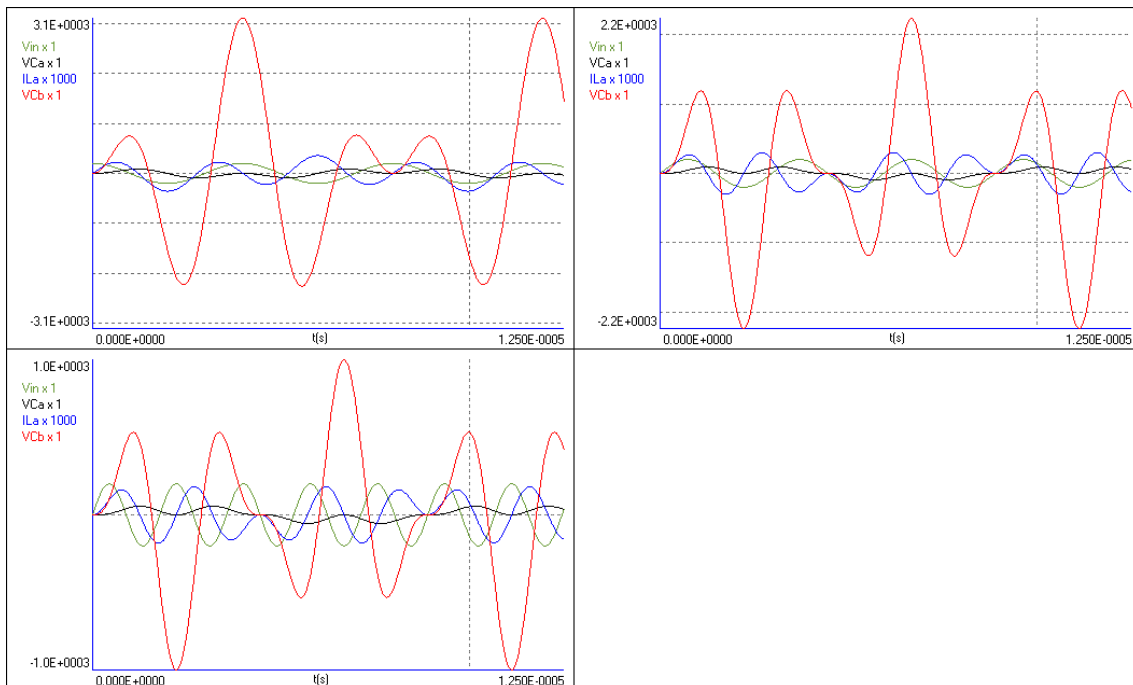


Figura 5.39: Sinais nas redes de múltipla ressonância usando a resposta ao estado zero. Acima, excitação em cosseno e seno na frequência central. Abaixo, excitação em seno na frequência superior. V_{Ca} e V_{Cb} são as tensões sobre os capacitores primário e secundário (C_2 e C_3). I_{La} é a corrente no indutor primário. Gráficos do programa Drsstd.

O artigo [16] calcula fórmulas explícitas para os valores dos componentes das redes de ordem 4 e os ganhos de tensão que elas conseguem, em função do modo de operação, como [22], [50] apresentam fórmulas explícitas para os elementos das redes usando a resposta à entrada zero. O uso da resposta ao estado zero permite muito maior ganho de tensão que as formas usando a resposta à entrada zero, já que a energia de entrada é fornecida gradualmente em vez de estar concentrada de início em uma capacitância ou indutância. Redes assim podem ser facilmente construídas com excitação a partir da rede elétrica retificada, dispensando a fonte de alta tensão necessária na bobina de Tesla ou no “Magnifier”. A fonte de entrada é eletrônica, tendo-se total controle sobre o número de ciclos de acionamento a usar, frequência

da excitação e instantes de acionamento. Dispositivos similares tem sido usados para demonstrações de eletricidade em alta tensão, onde o controle dos instantes de acionamento é usado para produzir sons musicais nas faíscas elétricas emanando do terminal de alta tensão que realiza o capacitor C_3 distribuído.

Exemplo: Estes circuitos quando usados como geradores de alta tensão costumam ser projetados para um modo de operação bem maior que o mínimo, efetuando a transferência de energia em 10 ciclos ou pouco menos. O transformador usado é usualmente construído com núcleo de ar, como uma bobina primária com poucas espiras e uma longa bobina solenoidal secundária com por volta de 1000 espiras. O capacitor primário pode ser construído como uma associação de capacitores comerciais, com resistores de alto valor em paralelo com cada capacitor para equalização de cargas e descarga segura. O capacitor secundário é um terminal de alta tensão, que junta sua capacitância distribuída com a capacitância distribuída da bobina secundária. Para boa isolamento entre as bobinas resulta um coeficiente de acoplamento por volta de 0.1. Seja então um sistema com excitação senoidal na frequência central operando no último modo que resulta em $k > 0.1$, com o capacitor primário C_2 de 20 nF, o secundário C_3 de 20 pF, e a bobina secundária L_3 de 30 mH. O programa Drsstcd mostra que o modo de operação deve ser o 37:39:41, resultando $k = 0.1022$ e o indutor primário $L_2 = 30.32 \mu\text{H}$. A excitação deve ser em 205739 Hz, com transferência de energia em 9.75 ciclos³⁰ O ganho de tensão vale 647.5, muito maior que $\sqrt{C_2/C_3} = 44.72$. A figura 5.40 mostra as formas de onda supondo excitação em onda quadrada de 180 V, que equivale a uma senóide de $\frac{4}{\pi}180 = 229.2$ V. A tensão de saída atinge 141.1 kV, com corrente primária máxima de 57.39 A. A tensão máxima sobre o capacitor primário vale apenas 2228 V³¹.

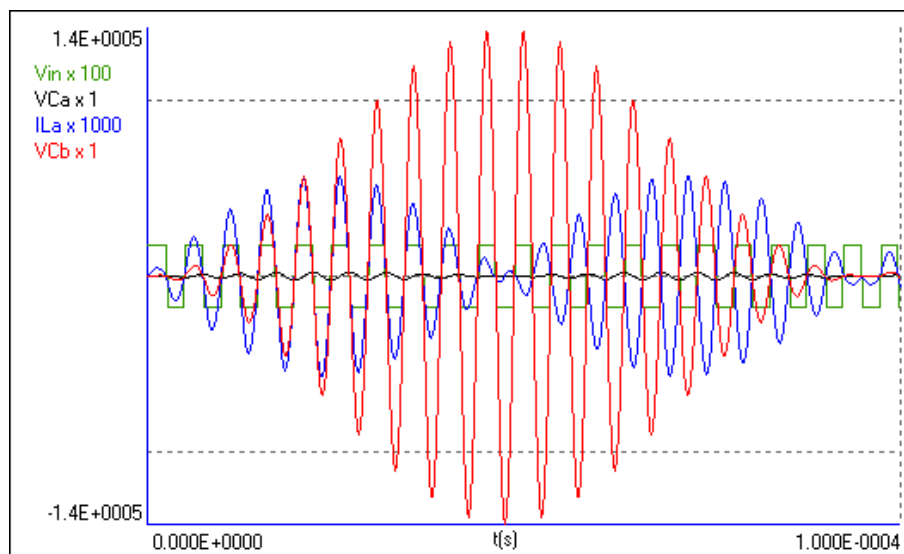


Figura 5.40: Sinais em uma rede de dupla ressonância com excitação em onda quadrada de 180 V na frequência central, modo 37:39:41. Gráfico do programa Drsstcd.

³⁰Para o modo $k_1 : k_2 : k_3$ a transferência ocorre em $k_2/4$ ciclos.

³¹A energia máxima sobre o capacitor primário vale $\approx 1/4$ da energia máxima de saída nestes circuitos.

Capítulo 6

Análise de sensibilidades

JÁ foi brevemente discutida a vantagem de estruturas LC duplamente terminadas sobre outras formas de realização, ao menos para aproximações que apresentem múltiplos zeros de atenuação na banda passante. A sensibilidade da função de transferência à variação dos parâmetros do circuito é um critério lógico para a comparação de formas alternativas para a realização de um filtro, e é aplicável a qualquer estrutura.

6.1 A função sensibilidade

A sensibilidade de uma função $f(x)$ em relação a um parâmetro x é definida como:

$$S_x^{f(x)} = \frac{\frac{\Delta f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} \approx \frac{x}{f(x)} \frac{df(x)}{dx}$$

para pequenas variações. É uma razão de variações relativas que serve para avaliar o quanto a função $f(x)$ é sensível a variação de x , de uma forma normalizada tanto pela função quanto pelo parâmetro. A tabela abaixo lista algumas propriedades básicas da função sensibilidade:

$$\begin{aligned} f(x) = Ax^k &\longrightarrow S_x^{f(x)} = k \\ S_x^{f(x)} &= -S_x^{\frac{1}{f(x)}} \\ S_x^{f_1(x)f_2(x)} &= S_x^{f_1(x)} + S_x^{f_2(x)} \\ S_x^{f_1(x)/f_2(x)} &= S_x^{f_1(x)} - S_x^{f_2(x)} \\ S_x^{f(x)} &= \frac{1}{k} S_x^{f(x)} \\ S_x^{f_1(x)+f_2(x)} &= \frac{f_1(x)S_x^{f_1(x)} + f_2(x)S_x^{f_2(x)}}{f_1(x) + f_2(x)} \end{aligned}$$

Exemplos: Em um tanque LC a frequência de ressonância vale $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. A sensibilidade de f em relação a L ou C vale $-\frac{1}{2}$ (pela primeira fórmula da tabela), indicando que uma variação de $\alpha\%$ na indutância ou na capacitância produz uma variação de $-\frac{1}{2}\alpha\%$ em f . Em um divisor resistivo de R_1 e R_2 , R_2 aterrado, o ganho de tensão vale $A = \frac{R_2}{R_1+R_2}$. As sensibilidades de A em relação a R_1 e R_2 valem, usando a fórmula da razão e a da soma, $S_{R_1}^A = S_{R_1}^{R_2} - S_{R_1}^{R_1+R_2} = 0 - \frac{R_1}{R_1+R_2}$ e $S_{R_2}^A = S_{R_2}^{R_2} - S_{R_2}^{R_1+R_2} = 1 - \frac{R_2}{R_1+R_2}$. Com resistores iguais resultam $S_{R_1}^A = -\frac{1}{2}$ e $S_{R_2}^A = \frac{1}{2}$. Isto é

o que ocorre com as terminações de uma rede LC duplamente terminada nas frequências de máxima transferência de potência, como já mencionado.

6.2 Sensibilidades de módulo e fase

A função sensibilidade de uma função de transferência em transformada de Laplace $T(s)$ em relação a um parâmetro x_i é definida na forma:

$$S_{x_i}^{T(s)} = \frac{x_i}{T(s)} \frac{\partial T(s)}{\partial x_i}$$

É portanto uma razão entre variações relativas de $T(s)$ e de x_i . Valores numéricos podem ser obtidos definindo a sensibilidade no estado permanente senoidal:

$$S_{x_i}^{T(j\omega)} = \frac{x_i}{T(j\omega)} \frac{\partial T(j\omega)}{\partial x_i}$$

Observando que uma variação relativa é uma variação do logaritmo, uma interessante interpretação do valor complexo da sensibilidade é obtida:

$$\frac{x_i}{T(j\omega)} \frac{\partial T(j\omega)}{\partial x_i} = \frac{\partial \ln T(j\omega)}{\partial \ln x_i} = \frac{\partial (\ln |T(j\omega)| + j\angle T(j\omega))}{\partial \ln x_i}$$

onde foi usada a expressão para o logaritmo de um valor complexo. Separando as partes real e imaginária, vem:

$$S_{x_i}^{T(j\omega)} = \frac{\partial \ln |T(j\omega)|}{\partial \ln x_i} + j \frac{\partial \angle T(j\omega)}{\partial \ln x_i}$$

A parte real é então a sensibilidade do módulo de $T(j\omega)$ em relação a x_i , e a parte imaginária uma sensibilidade não normalizada da fase de $T(j\omega)$ em relação a x_i . O resultado é natural, pois não faria sentido a divisão pela fase, pois, por exemplo, uma fase de 0° é tão significativa quando uma de 360° . A sensibilidade não normalizada será escrita como S' .

$$S_{x_i}^{T(j\omega)} = S_{x_i}^{|T(j\omega)|} + j S_{x_i}'^{\angle T(j\omega)}$$

Sensibilidades podem ser calculadas algebricamente, ou numericamente usando o método da “rede adjunta” [11]. Com sensibilidades calculadas, predições de erros no módulo e na fase causados por erros nos parâmetros podem ser obtidas. Sejam as variações do módulo e da fase:

$$\Delta \ln |T(j\omega)| = S_{x_i}^{|T(j\omega)|} \frac{\Delta x_i}{x_i} \text{ nepers, ou, em decibéis: } \Delta |T(j\omega)| = \frac{20}{\ln 10} S_{x_i}^{|T(j\omega)|} \frac{\Delta x_i}{x_i} \text{ dB}$$

$$\Delta \angle T(j\omega) = S_{x_i}'^{\angle T(j\omega)} \frac{\Delta x_i}{x_i} \text{ rads, ou, em graus: } \Delta \angle T(j\omega) = \frac{180}{\pi} S_{x_i}'^{\angle T(j\omega)} \frac{\Delta x_i}{x_i} \text{ graus}$$

A variação do módulo dá diretamente a variação em decibéis do módulo para uma variação relativa de x_i , e a variação da fase dá diretamente a variação da fase.

6.3 Medidas multiparamétricas

Erros em uma função de transferência devidos à variação de um conjunto de parâmetros podem ser calculados simplesmente pela soma dos erros, se se conhece seus valores e polaridades. Os desvios determinísticos do módulo e da fase para n parâmetros são dados por:

Desvios determinísticos

$$\Delta_D |T(j\omega)| = \frac{20}{\ln 10} \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} S_{x_i}^{T(j\omega)} \frac{\Delta x_i}{x_i} \text{ dB}$$

$$\Delta_D \angle T(j\omega) = \frac{180}{\pi} \sum_{i=1}^n \operatorname{Im} S_{x_i}^{T(j\omega)} \frac{\Delta x_i}{x_i} \text{ graus}$$

Quando os sentidos dos erros são aleatórios, pode-se usar os desvios estatísticos do módulo e da fase:

$$\Delta_E |T(j\omega)| = \frac{20}{\ln 10} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\operatorname{Re} S_{x_i}^{T(j\omega)} \frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^2} \text{ dB}$$

$$\Delta_E \angle T(j\omega) = \frac{180}{\pi} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\operatorname{Im} S_{x_i}^{T(j\omega)} \frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^2} \text{ graus}$$

Estas medidas geram margens de erro em volta das curvas de módulo e fase da função de transferência. A definição das sensibilidades de módulo, com a divisão pelo módulo, gera divisão por zero nas sensibilidades em frequências de zeros de transmissão, e desvios infinitos nestas frequências, que devem ser ignorados como artefatos do método de análise, com erros de primeira ordem apenas.

Exemplo: Sejam filtros elípticos normalizados como os da figura 4.70. As análises de resposta em frequência com módulo e fase, com as margens de desvio estatístico¹ são mostradas na figura 6.1. Notar os picos nos zeros de transmissão nas curvas de desvio de módulo, e os erros previstos no módulo similares aos obtidos pela análise de Monte Carlo da figura 4.71. As curvas de fase são plotadas também, mas não tem maior interesse no caso.

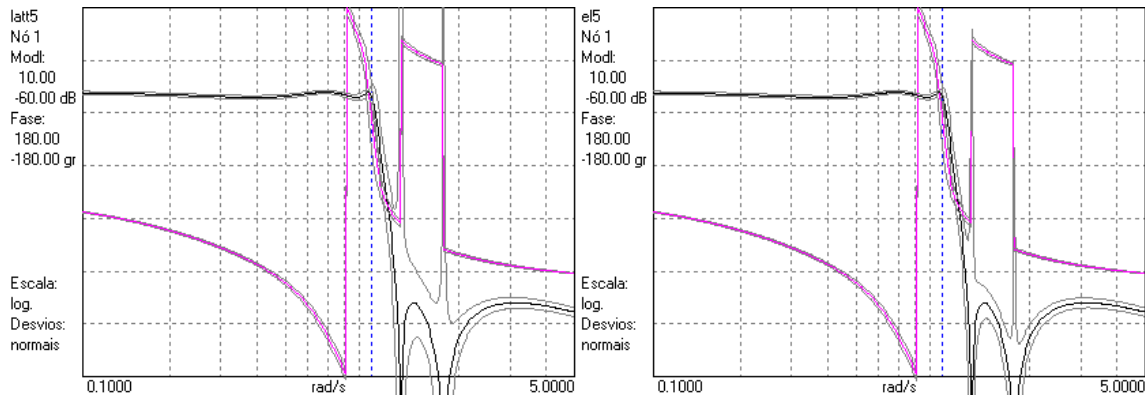


Figura 6.1: Curvas de módulo e fase com desvios estatísticos para 5% de tolerância nos componentes para as estruturas da figura 4.70

A figura 6.2 mostra em detalhe os desvios estatísticos de módulo na banda passante, que aparecem somados e subtraídos às curvas de módulo na figura 6.1. Nota-se que a forma em “lattice” desbalanceada é mais sensível no final da banda passante. Nas frequências de máxima transferência de potência as sensibilidades de módulo em relação aos elementos reativos se anulam nas duas estruturas, e restam apenas os erros causados pelas terminações, o que dá um desvio de $\frac{20}{\ln 10} \sqrt{2 \times (0.5 \times 0.05)^2} = 0.3071 \text{ dB}$.

¹Análise feita com o programa Sensi

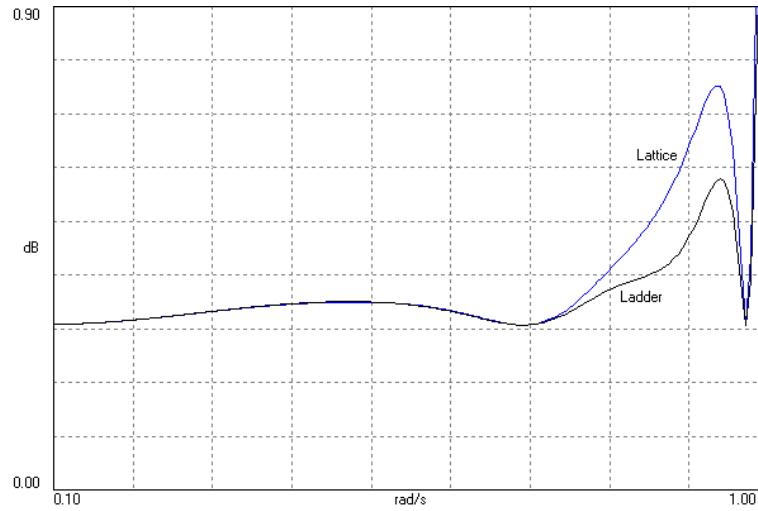


Figura 6.2: Curvas de desvio estatístico de módulo para 5% de tolerância nos componentes para as estruturas da figura 4.70. A estrutura em “lattice” desbalanceada gera o maior desvio.

6.4 Sensibilidades de polos e zeros

É também possível definir sensibilidades para polos e zeros, para calcular erros neles devidos a variação de parâmetros. As sensibilidades são na forma não normalizada, como variações divididas por variações relativas. Para zeros ou polos Z_k ou P_k :

$$S_{x_i}^{Z_k} = \frac{\partial Z_k}{\partial x_i/x_i}; S_{x_i}^{P_k} = \frac{\partial P_k}{\partial x_i/x_i}$$

A não ser em casos simples estes valores não podem ser calculados analiticamente. Uma formulação numérica é possível, entretanto. É mais simples o caso de zeros. Seja $T(s)$, alterada devido à variação de um zero Z .

$$T(s) \longrightarrow T'(s) = T(s) + \Delta T(s)$$

$$Z \longrightarrow Z + \Delta Z \text{ tal que } T'(Z + \Delta Z) = 0$$

$$\text{Com o zero e a função alteradas: } T(Z + \Delta Z) + \Delta T(Z + \Delta Z) = 0$$

$$\text{Aproximando a função alterada: } T(Z + \Delta Z) \approx T(Z) + \left. \frac{\partial T}{\partial s} \right|_{s=Z} \Delta Z$$

$$\text{Aproximando a alteração na função: } \Delta T(Z + \Delta Z) \approx \Delta T(Z) + \left. \frac{\partial \Delta T}{\partial s} \right|_{s=Z} \Delta Z$$

$$\text{Resta então: } \left. \frac{\partial T}{\partial s} \right|_{s=Z} \Delta Z + \Delta T(Z) = 0$$

Pode-se exprimir ΔT e ΔZ em função dos Δx_i e aplicar na última relação:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial s} \right|_{s=Z} \sum_i \frac{\partial Z}{\partial x_i} \Delta x_i = \sum_i \left. \frac{\partial T}{\partial x_i} \right|_{s=Z} \Delta x_i$$

Comparando os somatórios, as derivadas e sensibilidades de Z em relação aos x_i são obtidas:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} = \left. \frac{-\frac{\partial T}{\partial x_i}}{\frac{\partial T}{\partial s}} \right|_{s=Z}$$

$$S'_{x_i}{}^Z = \left. \frac{-x_i \frac{\partial T}{\partial x_i}}{\frac{\partial T}{\partial s}} \right|_{s=Z} = \left. \frac{-s S'_{x_i}{}^T}{S'_s{}^T} \right|_{s=Z}$$

As sensibilidades em relação a s podem ser obtidas notando-se que s está sempre multiplicando capacitâncias, indutâncias e indutâncias mútuas em redes RLCM. Basta somar as sensibilidades em relação a todos estes parâmetros.

$$S'_s{}^T = \sum_i S'_{L_i, C_i, M_i}{}^T$$

Para as sensibilidades dos polos, pode-se analisar uma função de transferência onde os polos se tornem zeros, e proceder da mesma forma. Esta função pode ser obtida zerando a entrada do circuito original e colocando uma nova entrada em corrente em série com um elemento do circuito, que vai ser o “elemento observador”, e tomando a saída como a tensão sobre a fonte de corrente colocada, como na figura 6.3. Isto dá certo porque, se a fonte colocada fosse de tensão, $V(s)$, as frequências naturais do circuito não seriam alteradas, e com a saída sendo a corrente na fonte de tensão colocada, $I(s)$, a função $I(s)/V(s)$ teria como polos um conjunto de frequências naturais do circuito, idealmente todas. Com a entrada sendo $I(s)$ e a saída sendo $V(s)$, a função fica invertida, e os zeros é que são frequências naturais da rede original. O elemento observador deve ser um que contribua na geração dos polos dos quais se quer calcular as sensibilidades, preferencialmente um elemento RLC. A sensibilidade do polo em relação ao elemento observador é então apenas o valor da impedância do elemento na frequência do polo, negativa no caso de um capacitor.

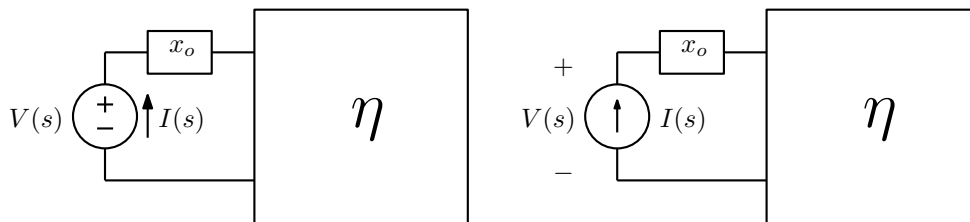


Figura 6.3: A excitação do circuito com uma fonte de tensão em série gera $T(s) = \frac{I(s)}{V(s)}$ com polos que são frequências naturais. A excitação com fonte de corrente gera $T(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$ transformando os polos em zeros.

Exemplo: Seja o filtro em “lattice” desbalanceada da figura 4.70. A estrutura é simétrica, e então ocorre de os elementos sobre o eixo de simetria não afetarem algumas das frequências naturais. Isto aparece na análise de sensibilidades dos polos, com alguns polos tendo sensibilidades nulas em relação a estes elementos. Eles também não podem ser usados como elementos observadores (resulta sistema singular de equações na análise da rede modificada). A tabela abaixo lista as sensibilidades obtidas² para os polos, usando o resistor de carga como observador, e zeros. As sensibilidades dos outros dois polos e zeros complexos, conjugados dos primeiros, são conjugadas das mostradas. Os elementos estão numerados da esquerda para a direita, com C_{15} sendo o capacitor entre as terminações. C_3 e L_3 não afetam os polos complexos de menor frequência, e C_{15} não afeta o polo real e os complexos de alta frequência. Os zeros

²Calculadas pelo programa Sensi.

são criados pelos elementos centrais da estrutura, com C_1 e C_5 , e obviamente as terminações, não tendo efeito sobre eles.

Desvios determinísticos e estatísticos para polos e zeros podem ser definidos, seja para zeros, como:

$$\Delta_D Z = \sum_i S'_{x_i} Z \frac{\Delta x_i}{x_i} = \Delta \text{Re } Z + j \Delta \text{Im } Z$$

Desvios estatísticos podem ser definidos para as partes real e imaginária independentemente:

$$\Delta_E \text{Re } Z = \sqrt{\sum_i \left(\text{Re } S'_{x_i} Z \frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^2}$$

$$\Delta_E \text{Im } Z = \sqrt{\sum_i \left(\text{Im } S'_{x_i} Z \frac{\Delta x_i}{x_i} \right)^2}$$

Estes erros definem um retângulo onde o zero pode estar. É possível também refinar a medida considerando a correlação entre os desvios reais e imaginários, obtendo uma elipse [29]³. Os erros da tabela 6.1 geram os desvios de polos plotados na figura 6.4.

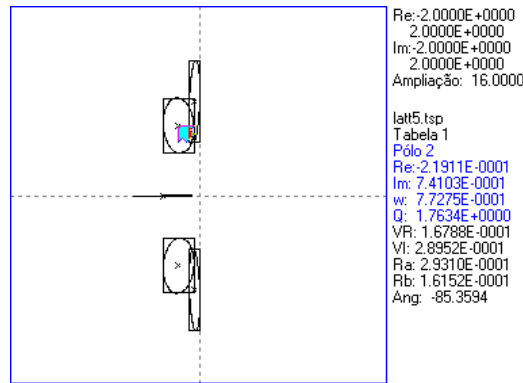


Figura 6.4: Erros nos polos do filtro elíptico de quinta ordem listados na tabela 6.1, plotados como retângulos e elipses. Os erros estão ampliados 16 vezes para melhor visualização.

6.5 Cálculo de sensibilidades usando rede adjunta

Esta seção descreve a implementação do cálculo de sensibilidades pelo método da rede adjunta [49], como implementado no programa Sensi⁴, na forma como está em [12], de forma talvez mais simples que em [11]. Considere-se as três redes mostradas na figura 6.5, lineares invariantes no tempo sem fontes internas. A rede (a) é a normal, no caso com uma entrada em corrente I_{in} e uma saída em tensão V_{out} . Os valores são fasores. A rede (b) contém erros nos componentes e na fonte de entrada, gerando erro na tensão de saída. A rede (c) é a “rede adjunta” à rede (a). Ela tem uma matriz de admitância dos nós que é a transposta da mesma matriz para a rede (a), entradas zeradas, no caso apenas $I_{in} = 0$, e tem uma fonte de corrente unitária como entrada onde era a saída da rede (a). A transposição mantém todos ramos caracterizados

³O programa Sensi calcula estas elipses.

⁴E também no programa ASIZ, com adaptações [39].

Tabela 6.1: Sensibilidades dos polos e zeros para a rede em “lattice” desbalanceada da figura 4.70.

Sensibilidades do Polo em	-0.049920709	+0.998198051j
S'(s,R5):	0.018275637	+0.018273417j
S'(s,R1):	0.018275637	+0.018273417j
S'(s,L3):	0.004217431	-0.326413612j
S'(s,L2):	0.001233643	-0.095479415j
S'(s,L4):	0.001233643	-0.095479415j
S'(s,C1):	0.039475235	-0.035719275j
S'(s,C5):	0.039475235	-0.035719275j
S'(s,C3):	-0.035714478	-0.409387059j
S'(s,C15):	-0.000000000	+0.000000000j
Sensibilidades do Polo em	-0.219106729	+0.741033961j
S'(s,R5):	0.109553365	+0.032392415j
S'(s,R1):	0.109553365	+0.032392415j
S'(s,L3):	-0.000000000	-0.000000000j
S'(s,L2):	-0.000000000	-0.201454698j
S'(s,L4):	0.000000000	-0.201454698j
S'(s,C1):	0.098947172	-0.152694852j
S'(s,C5):	0.098947172	-0.152694852j
S'(s,C3):	-0.000000000	-0.000000000j
S'(s,C15):	0.021212385	-0.032734861j
Sensibilidades do Polo em	-0.385344340	
S'(s,R5):	0.206041605	+0.000000000j
S'(s,R1):	0.206041605	+0.000000000j
S'(s,L3):	-0.008434863	+0.000000000j
S'(s,L2):	-0.002467286	+0.000000000j
S'(s,L4):	-0.002467286	+0.000000000j
S'(s,C1):	0.163642409	+0.000000000j
S'(s,C5):	0.163642409	+0.000000000j
S'(s,C3):	0.071428957	-0.000000000j
S'(s,C15):	0.000000000	-0.000000000j
Sensibilidades do Zero em	0.000000000	+1.764288441j
S'(s,R5):	0.000000000	+0.000000000j
S'(s,R1):	0.000000000	+0.000000000j
S'(s,L3):	0.000000000	+1.103668438j
S'(s,L2):	0.000000000	-0.992906329j
S'(s,L4):	0.000000000	-0.992906329j
S'(s,C1):	0.000000000	+0.000000000j
S'(s,C5):	0.000000000	+0.000000000j
S'(s,C3):	0.000000000	+0.445855062j
S'(s,C15):	0.000000000	-1.327999283j
Sensibilidades do Zero em	0.000000000	+1.253807569j
S'(s,R5):	0.000000000	+0.000000000j
S'(s,R1):	0.000000000	+0.000000000j
S'(s,L3):	0.000000000	-1.179849619j
S'(s,L2):	0.000000000	+0.276472917j
S'(s,L4):	0.000000000	+0.276472917j
S'(s,C1):	0.000000000	+0.000000000j
S'(s,C5):	0.000000000	+0.000000000j
S'(s,C3):	0.000000000	-0.943754725j
S'(s,C15):	0.000000000	+0.316850941j

por impedâncias inalterados, e troca os ramos de entrada e saída de transdutores. Basta considerar a rede composta de resistores, transdutores e a fonte de corrente de entrada para cobrir todos os casos usando modelamentos.

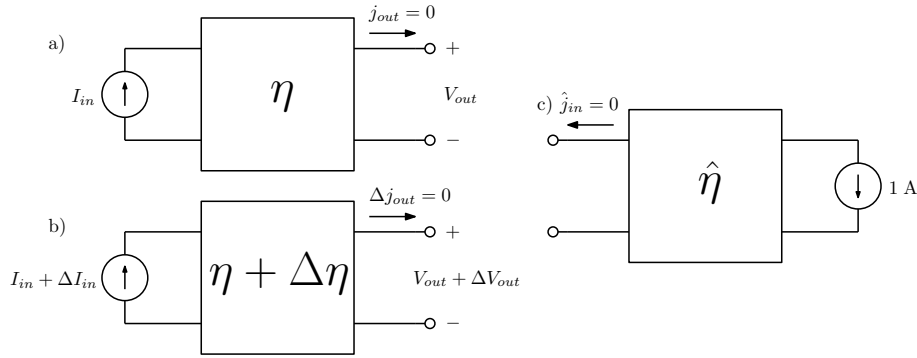


Figura 6.5: a) Rede normal. b) Rede com erros. c) Rede adjunta.

Considerando a rede normal e a rede adjunta, pode-se escrever, pelo teorema de Tellegen na forma cruzada e subtraindo as expressões:

$$\begin{aligned} \sum v_k \hat{j}_k &= 0; & \sum \hat{v}_k j_k &= 0 \\ \sum v_k \hat{j}_k - \hat{v}_k j_k &= 0 \end{aligned}$$

Considerando a rede com erros e a rede adjunta, da mesma forma:

$$\begin{aligned} \sum (v_k + \Delta v_k) \hat{j}_k &= 0; & \sum \hat{v}_k (j_k + \Delta j_k) &= 0 \\ \sum (v_k + \Delta v_k) \hat{j}_k - \hat{v}_k (j_k + \Delta j_k) &= 0 \end{aligned}$$

Subtraindo as últimas expressões vem uma relação envolvendo as variações das tensões e correntes⁵:

$$\sum \Delta v_k \hat{j}_k - \hat{v}_k \Delta j_k = 0$$

Separando os ramos especiais da entrada e da saída:

$$\overset{0}{\Delta V_{in} \hat{j}_{in}} - \hat{V}_{in} \Delta I_{in} + \overset{0}{\Delta V_{out} \hat{j}_{out}} - \hat{V}_{out} \Delta j_{out} + \sum_{outros} \Delta v_k \hat{j}_k - \hat{v}_k \Delta j_k = 0$$

Agora pode-se assumir algo sobre os elementos internos da rede. Sejam primeiramente os elementos todos resistivos, $\hat{j}_{out} = 1$ e $\Delta I_{in} = 0$:

$$\Delta V_{out} = - \sum_{outros} \Delta v_k \hat{j}_k - R_k \hat{j}_k \Delta j_k$$

Para um ramo resistivo com erro pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \cancel{v_k} + \Delta v_k &= (R_k + \Delta R_k)(j_k + \Delta j_k) = \cancel{R_k j_k} + R_k \Delta j_k + \Delta R_k j_k + \cancel{\Delta R_k \Delta j_k} \\ \therefore \Delta v_k &= R_k \Delta j_k + \Delta R_k j_k \end{aligned}$$

⁵Teorema de Tellegen diferencial.

Substituindo Δv_k na expressão para ΔV_{out} tem-se a derivada calculada e a correspondente sensibilidade em relação a R_k em função dos sinais na rede normal e na rede adjunta:

$$\begin{aligned}\Delta V_{out} &= - \sum_{outros} (B_k \Delta \hat{j}_k + \Delta R_k j_k) \hat{j}_k - R_k \hat{j}_k \Delta \hat{j}_k \\ \frac{\Delta V_{out}}{\Delta R_k} &\approx \frac{\partial V_{out}}{\partial R_k} = -j_k \hat{j}_k = -\frac{v_k \hat{v}_k}{R^2} \\ S_{R_k}^{V_{out}} &= \frac{R_k}{V_{out}} \frac{\partial V_{out}}{\partial R_k} = -\frac{v_k \hat{v}_k}{R_k V_{out}}\end{aligned}$$

Para calcular a sensibilidade em relação a fontes, considerando que os resistores não variam, tem-se a relação⁶:

$$\sum_{outros} \Delta v_k \hat{j}_k - \hat{v}_k \Delta j_k = \sum_{outros} R_k \Delta j_k \hat{j}_k - R_k \hat{j}_k \Delta j_k = 0$$

Considerando agora que $\Delta I_{in} \neq 0$ e $\Delta R_k = 0$ vem a derivada e a sensibilidade em relação à I_{in} , da equação separando os ramos de entrada e saída:

$$\begin{aligned}-\hat{V}_{in} \Delta I_{in} + \Delta V_{out} \hat{j}_{out} &= 0 \\ \frac{\Delta V_{out}}{\Delta I_{in}} &\approx \frac{\partial V_{out}}{\partial I_{in}} = \hat{V}_{in} \\ S_{I_{in}}^{V_{out}} &= \frac{I_{in}}{V_{out}} \frac{\partial V_{out}}{\partial I_{in}} = \frac{I_{in}}{V_{out}} \hat{V}_{in}\end{aligned}$$

Considere-se agora o circuito mais geral, composto apenas de transdutores, cada um com transcondutância G_{mk} , saída no ramo k e entrada no ramo $k+1$. Na rede adjunta os transdutores ficam invertidos, com as entradas nos ramos k e as saídas nos ramos $k+1$. Tem-se então para todos os ramos:

$$\begin{aligned}\Delta V_{out} &= - \sum_{outros} \Delta v_k \hat{j}_k - \hat{v}_k \Delta j_k + \Delta v_{k+1} \hat{j}_{k+1} - \hat{v}_{k+1} \Delta j_{k+1} \\ \Delta V_{out} &= - \sum_{outros} -\hat{v}_k \Delta j_k + \Delta v_{k+1} \hat{j}_{k+1}\end{aligned}$$

Para um transdutor com erro e um transdutor correspondente na rede adjunta pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\hat{j}_k + \Delta j_k &= (G_{mk} + \Delta G_{mk})(v_{k+1} + \Delta v_{k+1}) = \cancel{G_{mk} v_{k+1}} + G_{mk} \Delta v_{k+1} + \Delta G_{mk} v_{k+1} + \cancel{\Delta G_{mk} \Delta v_{k+1}} \\ \hat{j}_{k+1} &= G_{mk} \hat{v}_k\end{aligned}$$

Substituindo na expressão para ΔV_{out} resultam a derivada e a sensibilidade em relação a G_{mk} :

$$\begin{aligned}\Delta V_{out} &= - \sum_{outros} -\hat{v}_k (\cancel{G_{mk} \Delta v_{k+1}} + \Delta G_{mk} v_{k+1}) + \Delta v_{k+1} \cancel{G_{mk} v_k} \\ \frac{\Delta V_{out}}{\Delta G_{mk}} &\approx \frac{\partial V_{out}}{\partial G_{mk}} = \hat{v}_k v_{k+1} \\ S_{G_{mk}}^{V_{out}} &= \frac{G_{mk}}{V_{out}} \frac{\partial V_{out}}{\partial G_{mk}} = \frac{G_{mk}}{V_{out}} \hat{v}_k v_{k+1}\end{aligned}$$

⁶ As redes normal e adjunta são chamadas “interrecíprocas” devido a esta propriedade.

Apenas para verificação, considere-se que se nenhuma transcondutância varia mas I_{in} varia, tem-se:

$$\sum_{outros} \Delta v_k \hat{j}_k - \hat{v}_k \Delta j_k = \sum_{outros} -\hat{v}_k \Delta G_{mk} v_{k+1} = 0$$

e então valem a derivada e a sensibilidade em relação a I_{in} como calculadas para o circuito resistivo.

O método de análise de sensibilidades no estado permanente senoidal consiste em uma análise nodal no estado permanente senoidal com algumas modificações. São montados dois sistemas de equações, normal e adjunto, usando a mesma matriz:

$$\begin{aligned} [Y_n(j\omega)] \vec{E}(j\omega) &= \vec{I}_n(j\omega) \\ [Y_n^T(j\omega)] \vec{E}(j\omega) &= \vec{I}_a(j\omega) \end{aligned}$$

onde $\vec{I}_n(j\omega)$ é o vetor normal de excitação contendo as entradas do circuito (normalmente apenas uma), e $\vec{I}_a(j\omega)$ é o vetor de excitação adjunta $(0, 0, \dots, -1, \dots, 0)^T$, onde o -1 é colocado na posição correspondente ao nó de saída com tensão E_{out} . Os sistemas são resolvidos simultaneamente pelo método da fatoração LU, que permite simples operação com a matriz transposta com menos operações que a resolução de dois sistemas separados (“uma análise e meia”). A partir dos resultados as sensibilidades podem ser calculadas. Alguns casos são⁷:

$$\text{Resistor } R \text{ entre nós } a \text{ e } b: S_R^{E_{out}} = -\frac{(E_a - E_b)(\hat{E}_a - \hat{E}_b)}{RE_{out}}$$

$$\text{Capacitor } C \text{ entre nós } a \text{ e } b: S_C^{E_{out}} = \frac{(E_a - E_b)(\hat{E}_a - \hat{E}_b)j\omega C}{E_{out}}$$

$$\text{Indutor } L \text{ entre nós } a \text{ e } b: S_L^{E_{out}} = -\frac{(E_a - E_b)(\hat{E}_a - \hat{E}_b)}{j\omega LE_{out}}$$

Amplificador operacional com ganho $GB/j\omega$ e resistência de saída R_a , com entradas nos nós $a(-)$ e $b(+)$ e saída no nó c :

$$S_{GB}^{E_{out}} = \frac{(E_b - E_a)\hat{E}_c GB}{j\omega R_a E_{out}}$$

Transconductor G_m com saída entre nos nós a e b e entrada entre os nós c e d :

$$S_{G_m}^{E_{out}} = \frac{(E_c - E_d)(\hat{E}_a - \hat{E}_b)G_m}{E_{out}}$$

$$\text{Fonte de corrente } I \text{ entre nós } a \text{ e } b: S_I^{E_{out}} = \frac{(\hat{E}_a - \hat{E}_b)I}{E_{out}}$$

Outros elementos podem ser tratados com os modelos que equivalem à análise nodal modificada. Considerando modelos como nas figuras 1.40 ou 1.60 (no caso 1.61 para R_m), alguns casos são:

⁷Notar que a expressão para o transconductor cobre os casos das impedâncias e das outras fontes controladas.

Amp. de tensão A_v com saída entre nos nós a e b e entrada entre os nós c e d :

$$S_{A_v}^{E_{out}} = \frac{(E_c - E_d)\hat{E}_x A_v}{E_{out}}$$

Amp. de corrente B_i com saída entre nos nós a e b e entrada entre os nós c e d :

$$S_{B_i}^{E_{out}} = \frac{E_x(\hat{E}_a - \hat{E}_b)B_i}{E_{out}}$$

Transresistor R_m com saída entre nos nós a e b e entrada entre os nós c e d :

$$S_{R_m}^{E_{out}} = -\frac{(E_a - E_b)(\hat{E}_c - \hat{E}_d)R_m}{E_{out}}$$

Fonte de tensão V entre nós a e b : $S_V^{E_{out}} = \frac{\hat{E}_x V}{E_{out}}$

Exemplo: Seja um filtro OTA-C realizado por simulação de equações de estado, realizando um filtro passa-baixas de Butterworth de ordem 3 (figura 4.44). A estrutura desenhada com transdutores como os OTAs e deixando R_1 como resistor fica como na figura 6.6a, e a correspondente rede adjunta fica como na figura 6.6b.

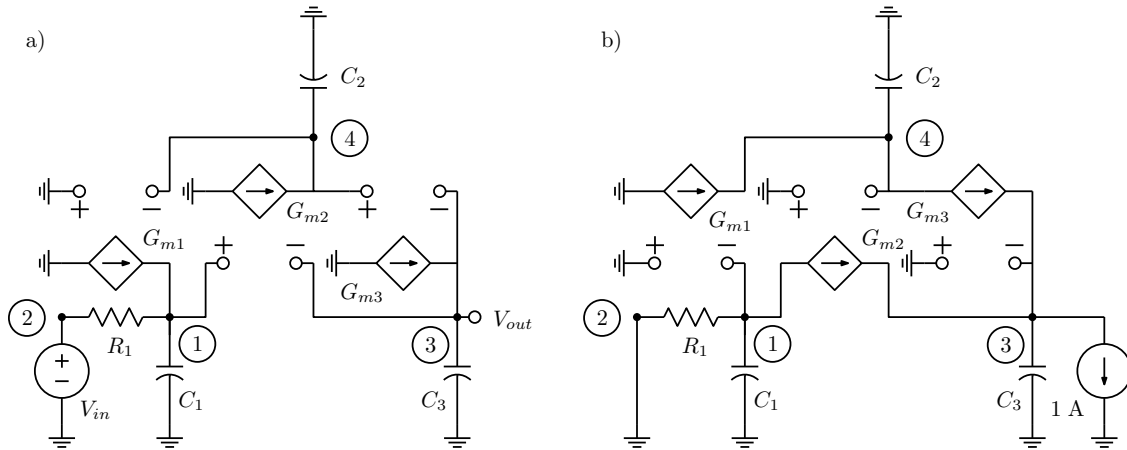


Figura 6.6: a) Rede normal de um filtro passa-baixas de ordem 3. b) Rede adjunta. $C_1 = C_3 = 1$ F, $C_2 = 2$ F, $G_{m1} = G_{m2} = G_{m3} = 1$ S, $R_1 = 1$ Ω , $V_{in} = 1$ V.

O sistemas nodais modificados a resolver, para a rede normal e para a rede adjunta, são:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} j\omega C_1 + \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & \cdot & G_{m1} & \cdot \\ -\frac{1}{R_1} & +\frac{1}{R_1} & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & j\omega C_3 + G_{m3} & -G_{m3} & \cdot \\ -G_{m2} & \cdot & G_{m2} & j\omega C_2 & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -V_{in} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} j\omega C_1 + \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & \cdot & -G_{m2} & \cdot \\ -\frac{1}{R_1} & +\frac{1}{R_1} & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & j\omega C_3 + G_{m3} & G_{m2} & \cdot \\ G_{m1} & \cdot & -G_{m3} & j\omega C_2 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \\ \hat{E}_3 \\ \hat{E}_4 \\ \hat{E}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ -1 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Na frequência da borda da banda passante de 3.0103 dB, em $\omega = 1$ rad/s, as tensões nas redes (e a corrente na fonte de tensão representada por E_5 ⁸) são calculadas como⁹:

$$\begin{aligned} E_1 &= 0.75 - 0.25j; & \hat{E}_1 &= 0.25 + 0.25j; \\ E_2 &= 1; & \hat{E}_2 &= 0; \\ E_3 &= -0.25 - 0.25j; & \hat{E}_3 &= -0.75 + 0.25j; \\ E_4 &= -0.5j; & \hat{E}_4 &= 0.5j; \\ E_5 &= -0.25 - 0.25j; & \hat{E}_5 &= -0.25 - 0.25j \end{aligned}$$

As sensibilidades são então obtidas como:

$$\begin{aligned} S_{V_{in}}^{E_3} &= \frac{\hat{E}_5 V_{in}}{E_3} = \frac{(-0.25 - 0.25j)(1)}{-0.25 - 0.25j} = 1 \\ S_{R_1}^{E_3} &= -\frac{(E_1 - E_2)(\hat{E}_1 - \hat{E}_2)}{R_1 E_3} = -\frac{(0.75 - 0.25j - 1)(0.25 + 0.25j - 0)}{1(-0.25 - 0.25j)} = -0.25 - 0.25j \\ S_{C_1}^{E_3} &= \frac{E_1 \hat{E}_1 j\omega C_1}{E_3} = \frac{(0.75 - 0.25j)(0.25 + 0.25j)j1}{-0.25 - 0.25j} = -0.25 - 0.75j \\ S_{C_2}^{E_3} &= \frac{E_4 \hat{E}_4 j\omega C_2}{E_3} = \frac{(-0.5j)(0.5j)j2}{-0.25 - 0.25j} = -1 - j \\ S_{C_3}^{E_3} &= \frac{E_3 \hat{E}_3 j\omega C_3}{E_3} = \frac{(-0.25 - 0.25j)(-0.75 + 0.25j)j1}{-0.25 - 0.25j} = -0.25 - 0.75j \\ S_{G_{m1}}^{E_3} &= \frac{(-E_4)(-\hat{E}_1)G_{m1}}{E_3} = \frac{-(-0.5j)(-(0.25 + 0.25j))1}{-0.25 - 0.25j} = 0.5j \\ S_{G_{m2}}^{E_3} &= \frac{(E_1 - E_3)(-\hat{E}_4)G_{m2}}{E_3} = \frac{(0.75 - 0.25j - (-0.25 - 0.25j))(-0.5j)1}{-0.25 - 0.25j} = 1 + j \\ S_{G_{m3}}^{E_3} &= \frac{(E_4 - E_3)(-\hat{E}_3)G_{m3}}{E_3} = \frac{(-0.5j - (-0.25 - 0.25j))(-(-0.75 + 0.25j))1}{-0.25 - 0.25j} = 0.25 + 0.75j \end{aligned}$$

Pode-se observar os resultados esperados $S_{V_{in}}^{E_3} = 1$ pois só há uma fonte, e $S_{C_1}^{E_3} = S_{C_3}^{E_3}$ devido à simetria do protótipo, $S_{C_2}^{E_3} = -S_{G_{m2}}^{E_3}$ pois C_2 é diretamente alimentado por G_{m2} .

6.6 Cálculo do atraso de grupo

A análise de sensibilidades permite uma forma simples de calcular o atraso de grupo:

⁸O programa Sensi não calcula correntes nas fontes de tensão, pois usa o sistema de compactação do sistema com amplificadores operacionais. Para obter E_5 é preciso, por exemplo, colocar uma fonte controlada a corrente com o ramo de controle em série com a fonte e examinar a variável que mede a corrente. A variável correspondente na rede adjunta, \hat{E}_5 é calculada normalmente e pode ser observada.

⁹Notar que o sistema deve ser montado com a equação do ramo da fonte de tensão como mostrado, o que corresponde a usar modelamento, do contrário a solução para \hat{E}_5 fica com sinal trocado.

$$T_G(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \angle T(j\omega)$$

Observando-se que a sensibilidade da fase em relação a um parâmetro x_i qualquer vale:

$$S_{x_i}' \angle T(j\omega) = \text{Im } S_{x_i}^{T(j\omega)} = x_i \frac{\partial \angle T(j\omega)}{\partial x_i}$$

pode-se usar $s = j\omega$ no lugar de x_i , obtendo:

$$\frac{d \angle T(j\omega)}{d j\omega} = \frac{1}{j\omega} \text{Im } S_{j\omega}^{T(j\omega)}$$

ou a expressão desejada, cancelando j :

$$T_G(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \angle T(j\omega) = -\frac{1}{\omega} \text{Im } S_s^{T(s)} \Big|_{s=j\omega}$$

com a sensibilidade em relação a s calculada somando-se as sensibilidades em relação a todos os parâmetros do circuito que multiplicam s , como capacitâncias, indutâncias e indutâncias mútuas, como discutido no tratamento de sensibilidades de polos e zeros, mas agora sem omitir a divisão pelo sinal de saída:

$$S_s^T = \sum_i S_{L_i, C_i, M_i}^T$$

Note-se que esta sensibilidade depende apenas da função $T(s)$, que independe da forma de construção do circuito, como também o atraso de grupo. A soma das sensibilidades da função de transferência em relação a elementos reativos é então constante, para dada função de transferência e dada frequência.

Exemplo: Para o circuito da figura 6.6, o atraso de grupo em $\omega = 1$ rad/s é calculado como:

$$T_G(1) = -\frac{1}{1} \sum_{i=1}^3 \text{Im } S_{C_i}^{E_s} = -(-0.75 - 1 - 0.75) = 2.5 \text{ s}$$

Como verificação, o atraso de grupo do filtro de Butterworth usado vale:

$$T(s) = \frac{\frac{1}{2}}{(s+1)(s^2+s+1)} \Rightarrow T_G(\omega) = \frac{2\omega^4 + \omega^2 + 2}{(\omega^2+1)(\omega^4 - \omega^2 + 1)}; T_G(1) = 2.5 \text{ s}$$

Capítulo 7

Filtros ativos

JÁ foi mostrado ao fim da seção sobre equações de estado que é possível obter realizações ativas de filtros passivos simulando um conjunto de equações de estado que descreva a rede. Neste capítulo estas e outras formas para a construção de filtros ativos são mais detalhadamente estudadas, sem intenção de cobertura completa do assunto, mas com detalhes suficientes para a realização prática destes circuitos. Primeiramente são descritas realizações em cascata, e depois realizações por simulação de redes passivas. Muitas outras formas de realização podem ser encontradas na literatura, mas estas são, provavelmente, as de maior interesse prático quando se considera simplicidade e sensibilidades à variação dos componentes. Em todos os casos, as realizações são apresentadas na forma clássica “RC-ativa”, onde são usados resistores, capacitores e amplificadores operacionais. Já foi mostrado também que os mesmos filtros podem ser construídos com amplificadores operacionais de transcondutância e capacitores, na técnica “OTA-C”. Outras formas usuais, voltadas para a realização em circuitos integrados, envolvem as técnicas “MOSFET-C”, de “capacitores chaveados”, de “corrente chaveada”, e outras. Por enquanto, estas realizações não serão discutidas aqui.

7.1 Realizações em cascata de biquads

É sempre possível construir um filtro ativo fatorando a função de transferência desejada em produto de seções de segunda ordem, “biquads”, com talvez uma seção extra de primeira ordem para filtros de ordem ímpar. Supondo ordem n par e biquads completos:

$$T(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0} = \prod_{i=1}^{n/2} k_i \frac{s^2 + \frac{\omega_{zi}}{Q_{zi}} s + \omega_{zi}^2}{s^2 + \frac{\omega_{pi}}{Q_{pi}} s + \omega_{pi}^2}$$

onde foram consideradas as frequências de ressonância ω e os fatores de qualidade Q dos polos e zeros de $T(s)$. Para melhor utilização da faixa dinâmica disponível, deve-se agrupar polos e zeros nos biquads e considerar em que ordem devam ser colocados com alguns critérios:

- Cada seção deve ter a maior banda passante possível. Os polos de maior Q devem ser agrupados com os zeros mais próximos.
- As seções devem ser ordenadas de forma a reduzirem progressivamente a banda passante. As primeiras seções são as de banda mais larga.
- Os ganhos das seções devem ser organizados de forma a que o ganho máximo da entrada até as saídas dos blocos sejam iguais, incluindo nós internos dos biquads que sejam saídas de amplificadores. Isto corresponde a fazer um escalamento de faixa dinâmica no circuito completo.

A seguir, algumas formas para a realização das seções são descritas, iniciando pelas formas que podem ser derivadas também de simulação por equações de estado e que tem mais relação com filtros passivos.

7.1.1 Biquads com três amplificadores operacionais

7.1.1.1 Biquad de Tow e Thomas

O biquad de Tow e Thomas [18] é equivalente a uma simulação por equações de estado de um circuito RLC paralelo, como mostrado na figura 7.1. Nas saídas dos dois integradores estão disponíveis funções tipo passa-faixa, em v_C ou V_{o1} , e passa-baixas, em j_L ou V_{o2} . É simples verificar que as funções são:

$$\frac{V_{o1}(s)}{V_{in}} = -\frac{\frac{1}{RC}s}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$$

$$\frac{V_{o2}(s)}{V_{in}} = -\frac{\frac{1}{RLC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$$

Um projeto normalizado simples, com o denominador sendo $s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2$, com frequência de ressonância $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ rad/s e fator de qualidade $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$, é:

$$C = L = \frac{1}{\omega_0}; \quad R = Q$$

Isto leva a ganho máximo unitário na saída passa-faixa e aproximadamente unitário na passa-baixa (exatamente em ω_0). Uma desnormalização em impedância gera o circuito final. Estes circuitos são insensíveis a capacitâncias parasitas em todos os nós, pois estes são ou “terras virtuais” com tensão nula ou saídas de amplificadores operacionais, em baixa impedância. São portanto convenientes para construção em circuito integrado. Preservam bem as sensibilidades do protótipo RLC passivo, que são baixas.

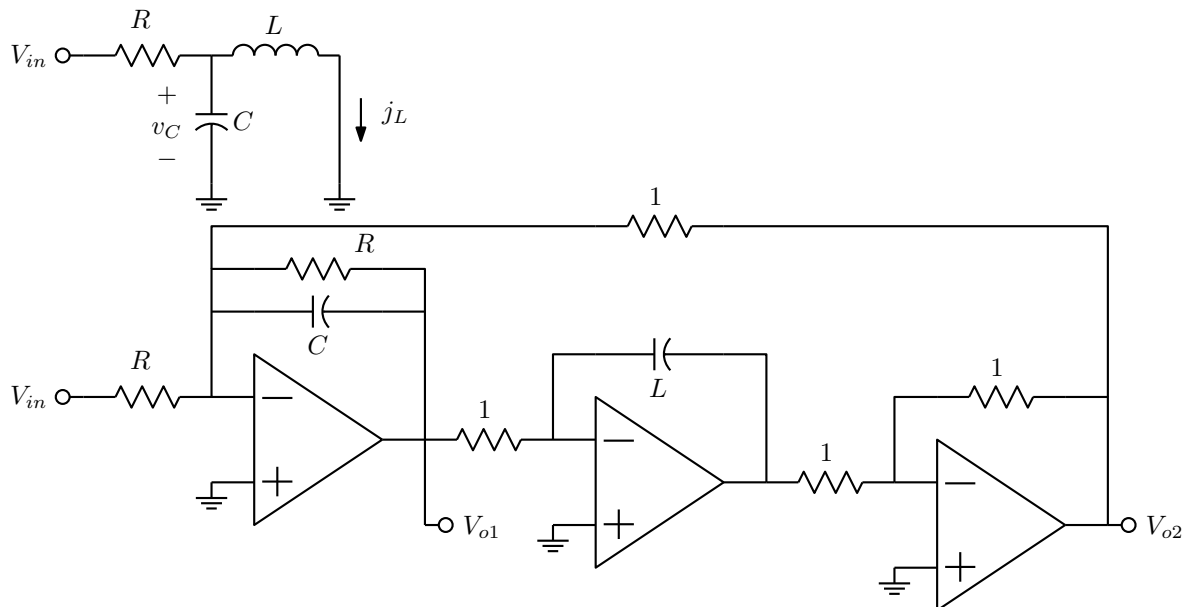


Figura 7.1: Biquad de Tow e Thomas derivado de rede RLC.

Este biquad gera apenas funções passa-baixas e passa-faixa. Outros biquads podem ser gerados pela soma das saídas com a entrada, usando-se um quarto amplificador, ou pela adição de mais pontos de entrada. Usando um somador, como na figura 7.2, tem-se a função de transferência:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = -\frac{\frac{1}{R_1}(s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}) - \frac{1}{R_2} \frac{1}{RC}s + \frac{1}{R_3} \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$$

Escolhendo valores para os resistores R_1 , R_2 e R_3 , o numerador pode ser ajustado de várias formas. Os zeros tem Q maior que o dos polos, e frequência dos zeros pode apenas ser aumentada. Se for usada a saída do inversor, a frequência dos zeros pode ser reduzida. Um polo real extra pode ser criado colocando um capacitor em paralelo com o resistor que realimenta o somador.

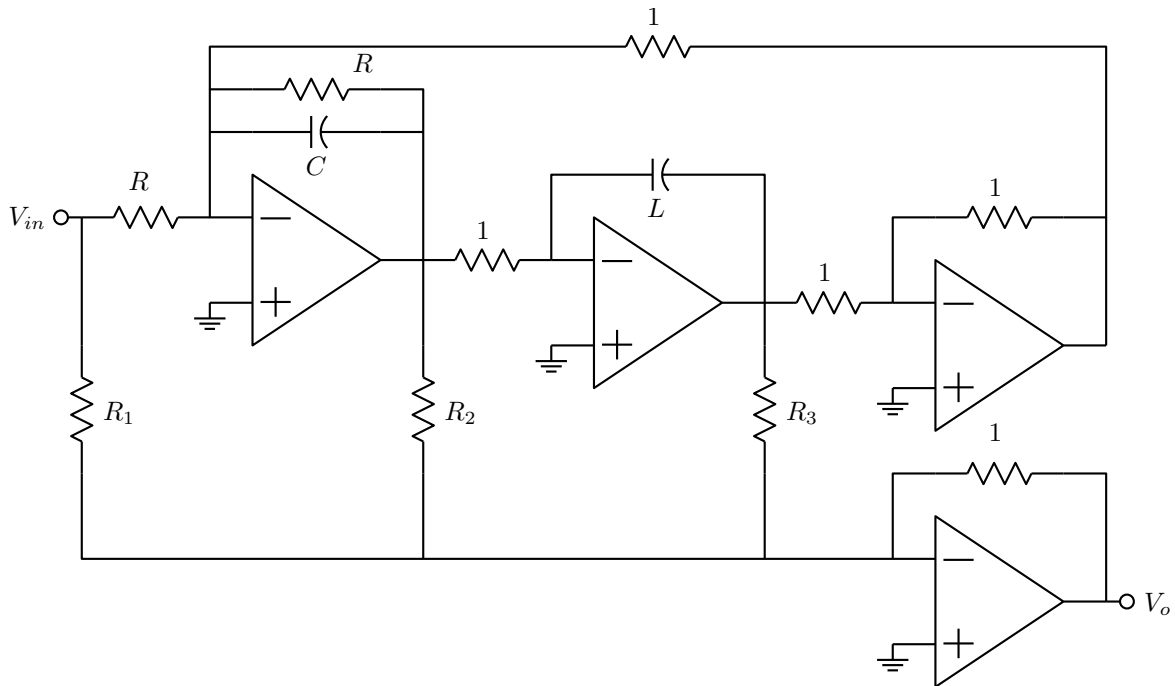


Figura 7.2: Biquad de Tow e Thomas com somador.

É também possível acrescentar outros pontos de entrada, como na figura 7.3. Uma análise da estrutura mostra que a função de transferência obtida vale:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{-\frac{1}{R_1} \frac{1}{LC} + \frac{1}{R_2} (\frac{1}{L}s + \frac{1}{RLC}) - \frac{1}{R_3} (s^2 + \frac{1}{RC}s)}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$$

7.1.1.2 Biquad de Akerberg e Mossberg

Uma variante do biquad Tow-Thomas é a de Akerberg e Mossberg [19], mostrada na figura 7.4. O integrador não inversor da simulação da rede RLC é construído de forma alternativa, conhecida como integrador “phase-lead”. Os valores dos componentes são calculados da mesma maneira. Esta forma compensa em

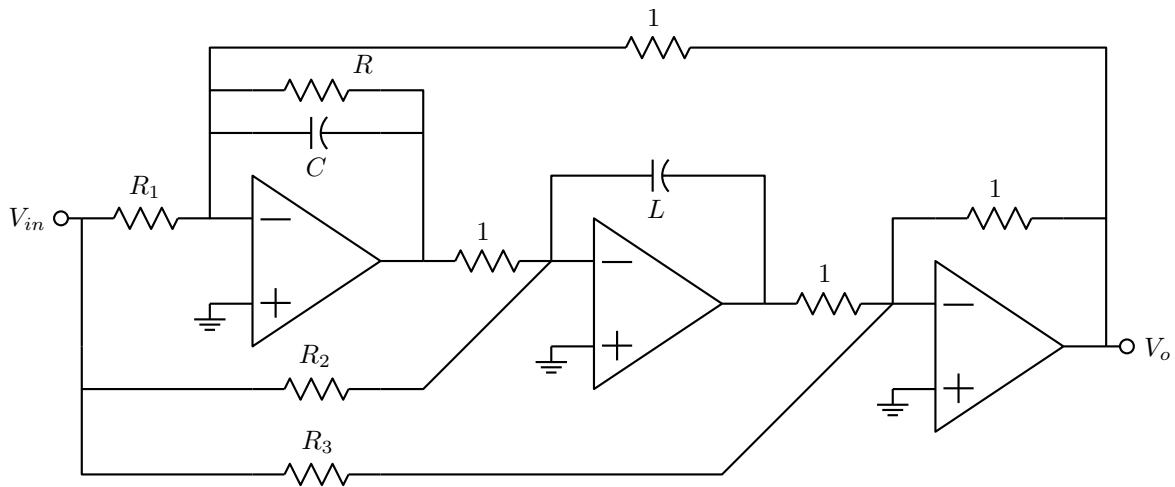


Figura 7.3: Biquad de Tow e Thomas com entradas adicionais.

grande parte os efeitos da resposta em frequência limitada do amplificador operacional¹, que no biquad Tow-Thomas tende a aumentar o fator de qualidade dos polos (“Q enhancement”), possivelmente causando instabilidade. Note-se a inversão dos terminais do amplificador central, devida à realimentação através do amplificador inversor. A mesma técnica pode ser usada nas simulações de equações de estado mais complexas, como nas figuras 2.33 ou 2.35.

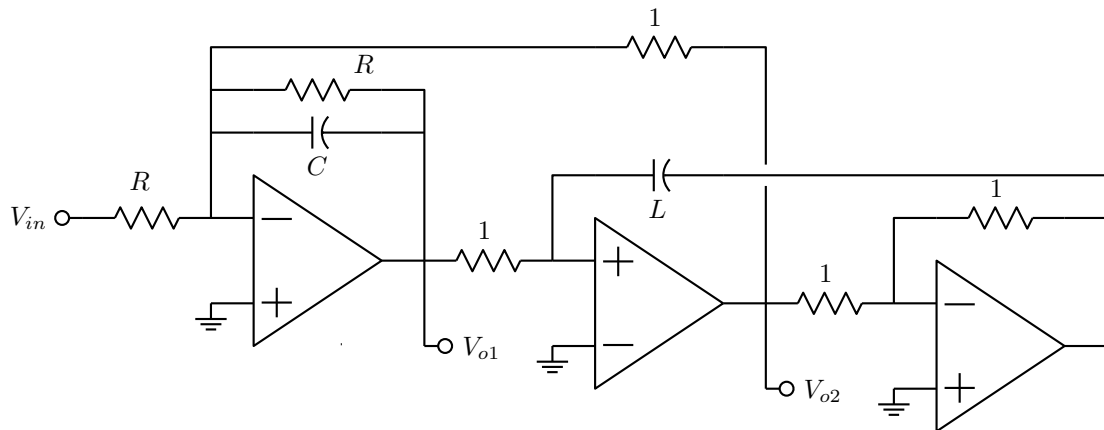


Figura 7.4: Biquad de Akerberg e Mossberg derivado de rede RLC.

7.1.2 Biquads com um amplificador operacional

Biquads mais simples podem ser obtidos, usando apenas um amplificador operacional. O custo disto é uma possível maior sensibilidade à variação dos componentes e sensibilidade a capacitâncias parasitas. A

¹A função de transferência tem usualmente um polo em baixa frequência, e pode ser aproximada como $A_v(s) \approx GB/s$, onde GB é o produto ganho-banda passante.

seguir são descritas algumas estruturas. Todas são projetadas pela comparação dos coeficientes obtidos das análises da estrutura com os da função desejada, e então tem-se apenas um catálogo de estruturas. As formas mostradas são apenas uma amostra das muitas possibilidades.

7.1.2.1 Biquads de Sallen e Key

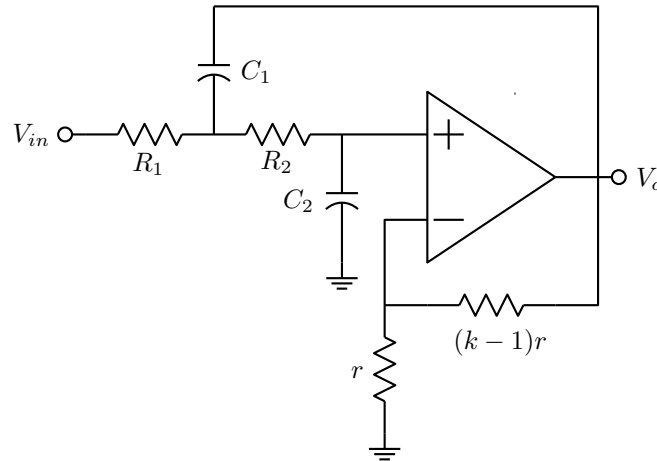


Figura 7.5: Biquad de Sallen e Key passa-baixas.

Os biquads de Sallen e Key [17] são todos baseados na inserção de um amplificador não inversor de ganho k realimentando uma rede RC. A figura 7.5 mostra a versão passa-baixas. A análise da rede pode ser feita como no exemplo seguindo a figura 1.17. O resultado é:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{k \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1-k}{R_2 C_2} \right) s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} = \frac{K \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

A função está na forma desejada para um filtro passa-baixas de segunda ordem, onde:

$$K = k; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}; \quad Q = \frac{\omega_0}{\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1-k}{R_2 C_2}}$$

Especificados k , ω_0 , Q , e a razão $\alpha = \frac{C_2}{C_1}$, o projeto geral pode ser feito na forma, obtida pela comparação das expressões:

$$\begin{aligned} C_1 &= C, \text{ valor escolhido} \\ C_2 &= \alpha C \\ R_2 &= \frac{1}{2\omega_0 \alpha C} \left(\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4(k-1-\alpha)} \right) \\ R_1 &= \frac{1}{\omega_0^2 \alpha C^2 R_2} \end{aligned}$$

Exemplo: Seja realizar $K = 5$, $Q = 2$ e $\omega_0 = 2\pi \times 1000$, com $C = 10$ nF e $\alpha = 1$. As fórmulas levam ao circuito da figura 7.6, com $r = 10$ k Ω na realimentação negativa do amplificador operacional.

A qualidade da realização pode ser avaliada pelas sensibilidades de ω_0 e Q em relação aos valores dos componentes. Elas podem ser obtidas como abaixo, seguidas dos valores no exemplo anterior:

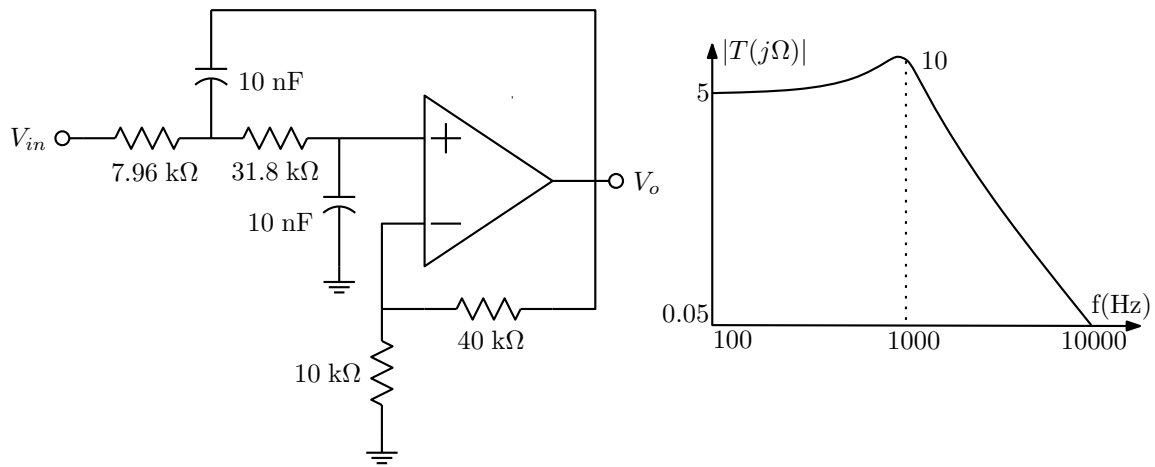


Figura 7.6: Exemplo de biquad de Sallen e Key passa-baixas, com $K = 5$, $Q = 2$ e $\omega_0 = 2\pi \times 1000$, e sua resposta de módulo.

$$S_{R_1, R_2, C_1, C_2}^{\omega_0} = -\frac{1}{2} \quad (-0.5)$$

$$S_{R_1}^Q = -S_{R_2}^Q = -\frac{1}{2} + Q\sqrt{\frac{R_2\alpha}{R_1}} \quad (3.5)$$

$$S_{C_2}^Q = -S_{C_1}^Q = -\frac{1}{2} + (1-k)Q\sqrt{\frac{R_1}{R_2\alpha}} \quad (-4.5)$$

$$S_k^Q = Qk\sqrt{\frac{R_1}{R_2\alpha}} \quad (5)$$

Observando estas expressões, nota-se que $k = 1$, usando um amplificador “buffer” como na figura 1.17, e resistores iguais resulta no projeto que minimiza as sensibilidades:

$$\begin{aligned} k &= 1 & S_k^Q &= 2Q^2 \\ R_1 &= R_2 = R & S_{R_1}^Q &= -S_{R_2}^Q = -\frac{1}{2} + Q\sqrt{\frac{1}{4Q^2}} = 0 \\ C_1 &= \frac{2Q}{\omega_0 R}; \quad C_2 = \frac{1}{2Q\omega_0 R} \quad \left(\alpha = \frac{1}{4Q^2}\right) & S_{C_2}^Q &= -S_{C_1}^Q = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

A sensibilidade de Q em relação a k é alta, mas $k = 1$ “naturalmente”. Um outro projeto minimiza a dispersão nos valores dos componentes, mas pode resultar em altas sensibilidades:

$$\begin{aligned} k &= 3 - \frac{1}{Q} & S_k^Q &= 3Q - 1 \\ R_1 &= R_2 = R & S_{R_1}^Q &= -S_{R_2}^Q = -\frac{1}{2} + Q \\ C_1 &= C_2 = \frac{1}{\omega_0 R} & S_{C_2}^Q &= -S_{C_1}^Q = \frac{1}{2} - 2Q \end{aligned}$$

Notar que $k = 3$ resulta em $Q = \infty$, um oscilador senoidal.

Exemplo: Seja um filtro passa-baixas de Butterworth de ordem 4, com queda de 3.0103 dB em 1 kHz e ganho unitário em baixa frequência. A aproximação normalizada, com corte em 1 rad/s, tem polos em:

$$p_{1,2} = -\cos 22.5^\circ \pm j \sin 22.5^\circ \implies \omega_1 = 1; \quad Q_1 = \frac{1}{2 \cos 22.5^\circ}$$

$$p_{3,4} = -\cos 67.5^\circ \pm j \sin 67.5^\circ \implies \omega_2 = 1; \quad Q_2 = \frac{1}{2 \cos 67.5^\circ}$$

Usando o projeto de mínima sensibilidade, o ganho fica como desejado. A versão normalizada para resistores unitários resulta em:

biquad 1	biquad 2
$k = 1$	$k = 1$
$R_1 = R_2 = 1 \Omega$	$R_1 = R_2 = 1 \Omega$
$C_1 = \frac{1}{\cos 22.5^\circ} \text{ F}$	$C_1 = \frac{1}{\cos 67.5^\circ} \text{ F}$
$C_2 = \cos 22.5^\circ \text{ F}$	$C_2 = \cos 67.5^\circ \text{ F}$

Desnormalizando para resistores de 10 kΩ e corte em $2\pi \times 1000$ resulta a estrutura da figura 7.7. Com a seção de Q menor primeiro, os máximos de ganho até ambas as saídas são unitários.

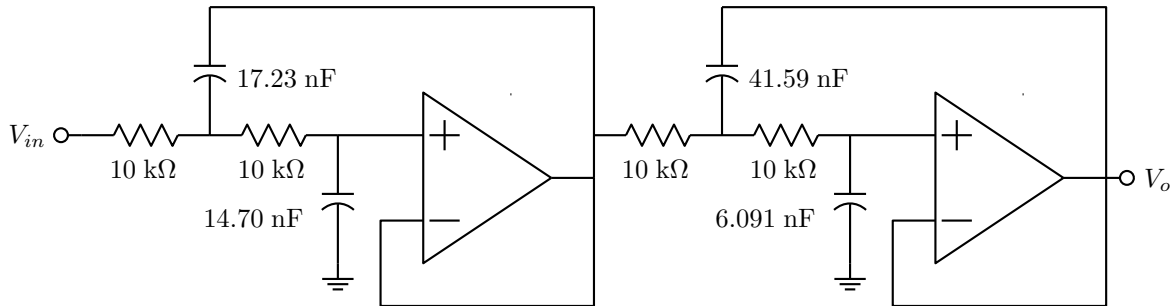


Figura 7.7: Filtro passa-baixas de ordem 4 de Butterworth em cascata de biquads de Sallen e Key.

O filtro passa-faixa de Sallen e Key tem a estrutura mostrada na figura 7.8. A função de transferência da rede é:

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{\frac{k}{R_1 C_1} s}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_3 C_1} + \frac{1}{R_3 C_2} + \frac{1-k}{R_2 C_1} \right) s + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{R_3 C_1 C_2}} = \frac{K \omega_0 s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

O projeto é também feito por comparação de coeficientes:

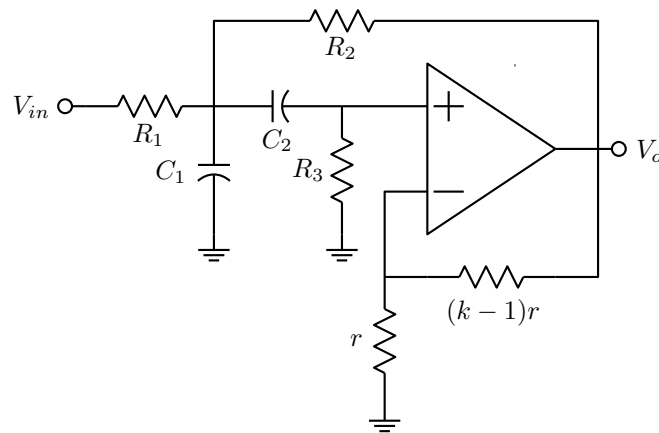


Figura 7.8: Biquad de Sallen e Key passa-faixa.

$$\begin{aligned}
 k &= K \\
 C_1 &= C, \text{ valor escolhido} \\
 C_2 &= \alpha C \\
 R_1 &= \frac{1}{\omega_0 C} \\
 R_3 &= \frac{K - \frac{1}{Q} + \sqrt{\left(K - \frac{1}{Q}\right)^2 + 4(\alpha + 1)(K - 1)}}{2\alpha\omega_0 C(K - 1)} \\
 R_2 &= \frac{1}{\omega_0 C(R_3 C \alpha \omega_0 - 1)}
 \end{aligned}$$

Um outro conjunto de fórmulas para este filtro, resultando em $K = 2\sqrt{2}Q - 1$ e requerendo $Q > \frac{\sqrt{2}}{3}$ para construção com amplificador não inversor normal, é:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= C_2 = C, \text{ valor escolhido} \\
 R_1 &= R_2 = R_3 = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0 C} \\
 k &= 4 - \frac{\sqrt{2}}{Q}
 \end{aligned}$$

7.1.2.2 Biquads com amplificador inversor e múltipla realimentação

Amplificadores de ganho infinito também geram famílias de biquads. A estrutura da figura 7.9 realiza uma seção passa-baixas:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{-\frac{1}{R_1 R_3 C_2 C_5}}{s^2 + \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) s + \frac{1}{R_3 R_4 C_2 C_5}} = \frac{-K \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

Um possível projeto é:

$$R_1 = R_3 = R, \text{ valor escolhido} \quad R_4 = KR$$

$$C_2 = \frac{Q}{\omega_0 R} \left(2 + \frac{1}{K} \right) \quad C_5 = \frac{1}{\omega_0 QR(2K + 1)}$$

As sensibilidades são baixas:

$$S_{R_3, R_4, C_2, C_5}^{\omega_0} = -\frac{1}{2} \quad S_{R_1}^{\omega_0} = 0$$

$$S_{R_1}^Q = \frac{1}{2 + \frac{1}{K}} \quad S_{R_3}^Q = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2 + \frac{1}{K}}$$

$$S_{R_4}^Q = -\frac{1}{2} + \frac{1}{K \left(2 + \frac{1}{K} \right)}$$

$$S_{C_2}^Q = \frac{1}{2} \quad S_{C_5}^Q = -\frac{1}{2}$$

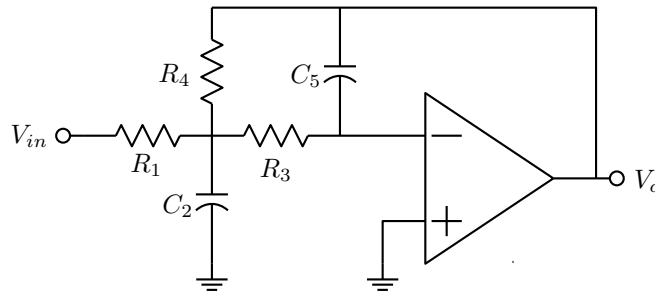


Figura 7.9: Biquad com amplificador inversor de ganho infinito e múltipla realimentação passa-baixas.

Uma seção passa-faixa tem a estrutura da figura 7.10. A função de transferência é obtida como:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{-\frac{1}{R_1 C_4} s}{s^2 + \frac{1}{R_5} \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \right) s + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{R_5 C_3 C_4}} = \frac{-K \omega_0 s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

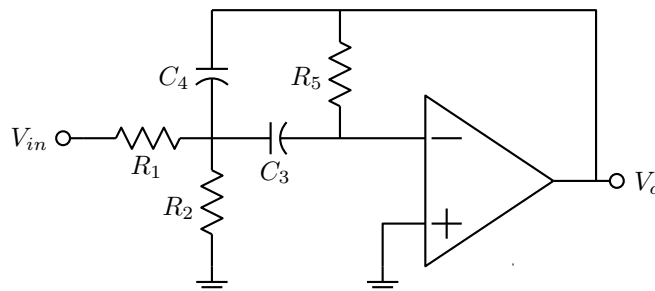


Figura 7.10: Biquad com amplificador inversor de ganho infinito e múltipla realimentação passa-faixa.

O projeto pode ser feito como, para $K < 2Q$:

$$C_3 = C_4 = C, \text{ valor escolhido} \quad R_1 = \frac{1}{K\omega_0 C}$$

$$R_5 = 2\frac{Q}{\omega_0 C} \quad R_2 = \frac{1}{\omega_0 C(2Q - K)}$$

Exemplo: Seja realizar um filtro passa-faixa de Butterworth de ordem 4 com banda passante de 3.0103 dB entre 800 Hz e 1250 Hz. A aproximação normalizada tem frequência central de $\omega_0 = 1$ rad/s e banda passante $B = 0.45$ rad/s. Os polos do filtro protótipo passa-baixas normalizado de Butterworth de ordem 2 correspondente estão em $-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}j$. Aplicando a transformação passa-baixas \rightarrow passa-faixa em polos complexos genéricos tem-se:

$$a + jb = \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs} \Rightarrow s^2 - B(a + jb)s + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow s = \frac{B(a + jb) \pm \sqrt{B^2(a + jb)^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

Usando os polos do protótipo, notando que a expressão dá um novo polo de cada par conjugado, tem-se os polos do filtro passa-faixa normalizado, suas frequências e fatores de qualidade, e a função de transferência a realizar:

$$s_1 = -0.184403426 \pm 1.159419131j \quad \omega_{01} = 1.173992055 \quad Q_1 = 3.183216496$$

$$s_2 = -0.133794626 \pm 0.841221079j \quad \omega_{02} = 0.851794521 \quad Q_2 = 3.183216496$$

$$T(s) = \frac{0.45^2 s^2}{(s^2 + 0.368806852s + 1.378257345)(s^2 + 0.267589252s + 0.725553906)}$$

É fácil ver, aplicando a transformação passa-baixas \rightarrow passa-faixa ao protótipo $T(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$, que o numerador vale $B^2 s^2$. Como as duas seções tem o mesmo Q , a ordem delas na cascata pode ser qualquer. Seja primeiramente a seção de maior frequência. Para que a primeira seção tenha ganho máximo unitário, ela deve ter o fator de ganho:

$$K_1 Q_1 = 1 \Rightarrow K_1 = 0.314147656$$

E para realizar o ganho total:

$$0.45^2 = K_1 \omega_{01} K_2 \omega_{02} \Rightarrow K_2 = 0.644601340$$

A faixa dinâmica do filtro fica então equalizada. Aplicando as fórmulas de projeto para os dois biquads, resulta:

$$C_{31} = C_{41} = 1 \text{ F} \quad C_{32} = C_{42} = 1; \text{ F}$$

$$R_{11} = \frac{1}{K_1 \omega_{01}} = 2.711446368 \text{ } \Omega \quad R_{12} = \frac{1}{K_2 \omega_{02}} = 1.821268406 \text{ } \Omega$$

$$R_{51} = 2\frac{Q_1}{\omega_{01}} = 5.422892740 \text{ } \Omega \quad R_{52} = 2\frac{Q_2}{\omega_{02}} = 7.474141750 \text{ } \Omega$$

$$R_{21} = \frac{1}{\omega_{01}(2Q_1 - K_1)} = 0.140739320 \text{ } \Omega \quad R_{22} = \frac{1}{\omega_{02}(2Q_2 - K_2)} = 0.205177665 \text{ } \Omega$$

Desnormalizando para resistores unitários de 10 k Ω e frequência central em $2\pi \times 1000$ rad/s, resulta a estrutura da figura 7.11.

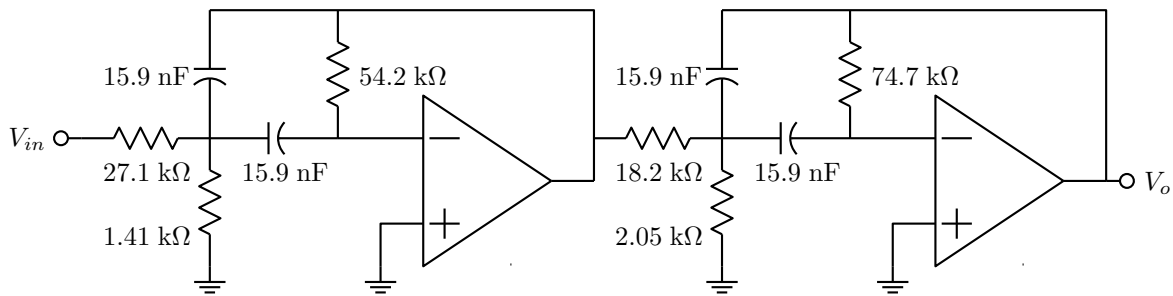


Figura 7.11: Filtro passa-faixa de Butterworth de ordem 4.

7.1.2.3 Transformação CR-RC

Formas passa-altas podem ser obtidas trocando-se resistores com capacitores, na rede RC que determina a funcionalidade do biquad passa-baixas. O procedimento pode ser entendido como: Aplicar uma transformação passa-baixas \rightarrow passa-altas a uma seção passa-baixas normalizada em frequência, transformando os capacitores em indutores: $C \rightarrow L = \frac{1}{\omega_p C}$. Aplicar a seguir um escalamento em impedância, dividindo as impedâncias por s . O efeito final é um filtro passa-altas, com os elementos transformados na forma:

$$R \rightarrow C = \frac{1}{R}; \quad C \rightarrow R = \frac{1}{\omega_p C}$$

Um escalamento em impedância gera a rede final. Assim não há necessidade de desenvolver biquads especiais passa-altas de um amplificador. A aplicação em formas passa-faixa gera formas alternativas, também passa-faixa.

Exemplo: Seja obter um filtro passa-altas de Butterworth de ordem 3, com corte de 3.0103 dB em 500 Hz e ganho de -10 em alta frequência. A função de transferência normalizada vale:

$$T(s) = \frac{-10s^3}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

A seção de segunda ordem que realiza os polos complexos pode ser obtida a partir de uma seção passa-baixas realizando $T(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$, derivada como na figura 7.12. A seção de primeira ordem que realiza o polo real pode ser como na figura 7.13. Ela pode ser a primeira da cascata, concentrando todo o ganho. Como a seção de segunda ordem tem ganho -1 em alta frequência e o filtro completo tem banda maximamente plana, a faixa dinâmica está equalizada corretamente. O filtro final, obtido por desnormalização em impedância para resistores unitários de 10 kΩ e frequência de corte em $2\pi \times 500$ rad/s é mostrado na figura 7.14.

Em muito alta frequência, filtros passa-altas ativos sempre perdem ganho devido à resposta em frequência limitada dos amplificadores. Para o exemplo, o limite é dado pelo amplificador não inversor na primeira seção, que tem corte em $GB/10$, que para um amplificador com $GB = 2\pi \times 10^6$, como um tipo 741, limita a banda passante em 100 kHz. A seção de segunda ordem se reduz a um amplificador inversor de ganho -1 em alta frequência, gerando outro polo em $GB/2^2$.

²É simples verificar que, para amplificadores operacionais com ganho tipo $A(s) = GB/s$, um amplificador não inversor com ganho A_0 gera polo em GB/A_0 , e um amplificador não inversor com ganho $-A_0$ gera polo em $GB/(A_0 + 1)$.

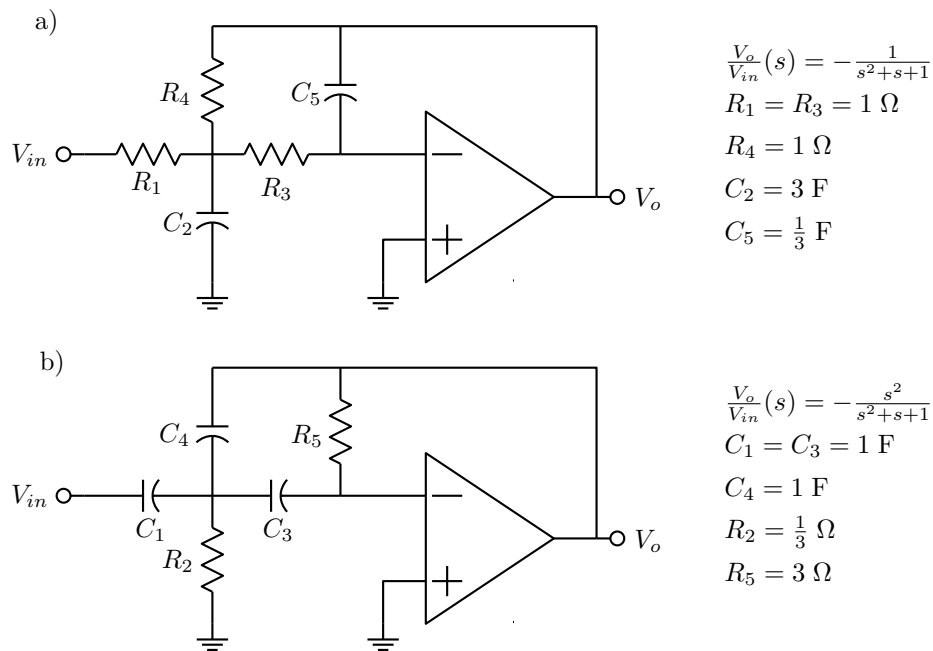


Figura 7.12: Biquad passa-altas obtido pela transformação CR-RC. a) Protótipo passa-baixas normalizado. b) Versão transformada normalizada.

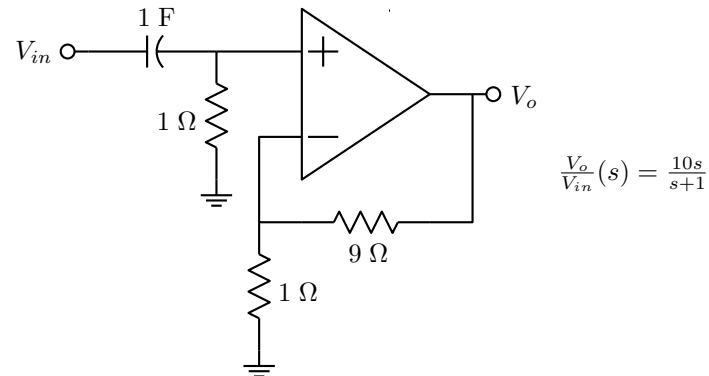


Figura 7.13: Seção passa-altas de primeira ordem.

7.1.2.4 Biquads baseados no duplo T

Os biquads listados realizam apenas funções simples passa-baixa, passa-faixa e passa-altas (com transformação RC-CR). Seções mais complexas, com zeros finitos de transmissão por exemplo, requerem estruturas que gerem estes zeros. Para realizar zeros no eixo imaginário, a estrutura RC em “duplo T” é conveniente. Uma realimentação similar à dos filtros de Sallen e Key gera o biquad de Kerwin e Huelsman [20], mostrado na figura 7.15. Ele é uma estrutura de ordem 3, mas com projeto adequado há um cancelamento de polo com zero reais e resulta uma função de transferência de ordem 2. existem duas possibilidades na estrutura, usando um resistor R ou um capacitor aC , onde indicado, dependendo da

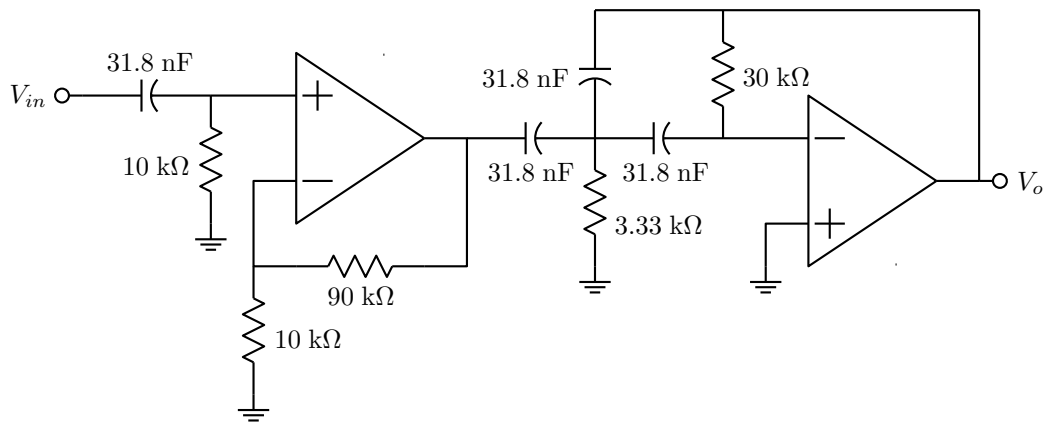


Figura 7.14: Filtro passa-altas de Butterworth de ordem 3.

posição dos zeros, abaixo ou acima dos polos, respectivamente. Para o caso de zeros abaixo dos polos, usando R , resultam a função e o projeto normalizado:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{k(s^2 + \frac{1}{a^2})}{s^2 + \frac{\alpha+1}{a}(\frac{1}{R} + \frac{2-k}{\alpha})s + \frac{1}{a^2}(1 + \frac{\alpha+1}{R})} = \frac{K(s^2 + \omega_z^2)}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p}s + \omega_p^2}$$

$$a = \frac{1}{\omega_z}$$

$$R = \frac{\alpha + 1}{\left(\frac{\omega_p}{\omega_z}\right)^2 - 1}$$

$$k = 2 + \frac{\alpha}{\alpha + 1} \left(\left(\frac{\omega_p}{\omega_z}\right)^2 - 1 - \frac{\omega_p}{Q_p \omega_z} \right)$$

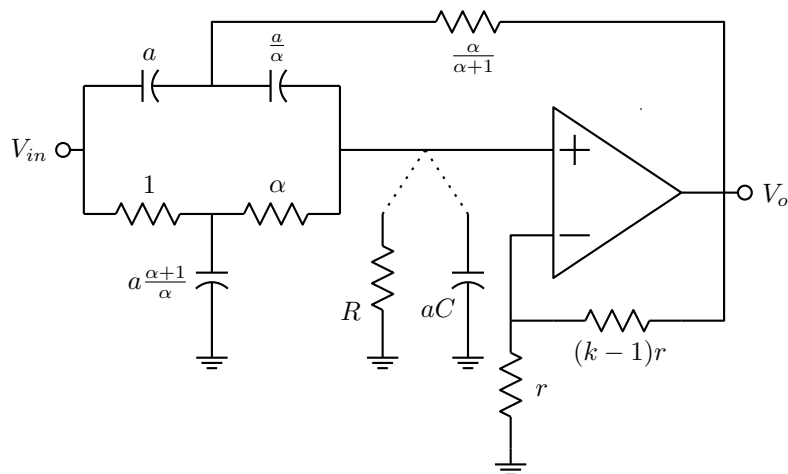


Figura 7.15: Biquad de Kerwin e Huelsman baseado no duplo T.

O parâmetro α controla a dispersão de valores. Em geral as sensibilidades são inversamente proporcionais a α . Para o caso de zeros acima dos polos, usando aC resultam:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{\frac{k}{(\alpha+1)C+1}(s^2 + \frac{1}{a^2})}{s^2 + \frac{(\alpha+1)(C+\frac{2-k}{\alpha})}{a(\alpha+1)C+1}s + \frac{1}{a^2((\alpha+1)C+1)}} = \frac{K(s^2 + \omega_z^2)}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p}s + \omega_p^2}$$

$$a = \frac{1}{\omega_z}$$

$$C = \frac{\left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right)^2 - 1}{\alpha + 1}$$

$$k = 2 + \frac{\alpha}{\alpha + 1} \left(\left(\frac{\omega_z}{\omega_p}\right)^2 - 1 - \frac{\omega_z}{Q_p\omega_p} \right)$$

O caso de zeros e polos com a mesma frequência, $\omega_z = \omega_p$, não usa R ou aC , e tem-se apenas:

$$k = 2 + \frac{\alpha}{\alpha + 1} \frac{1}{Q_p}; \quad a = \frac{1}{\omega_p}$$

Exemplo: Seja obter um filtro elíptico de ordem 5, com $A_{max} = 1$ dB, $A_{min} = 40$ dB, e corte em 1 kHz. Os parâmetros para o filtro normalizado estão listados na tabela 5.6. Seguindo o critério de reduzir progressivamente a banda e agrupar polos com zeros próximos, os polos de frequência mais alta e os zeros imaginários de frequência mais baixa fazem a primeira seção, os demais polos complexos e zeros imaginários a segunda seção, e uma seção de primeira ordem realizando o polo real e o zero no infinito completa o filtro. O parâmetro α foi escolhido como $\alpha = 3.44$, gerando um ganho em baixa frequência de 10, produto dos ganhos k das duas seções, 2.35 e 4.26 respectivamente. Desnormalizando o circuito para resistências unitárias de 10 k Ω e corte em 1 kHz resulta a estrutura da figura 7.16. A faixa dinâmica interna não está equalizada. Os ganhos máximos de tensão até as saídas das seções resultam como 8.78, 27.2 e 10.0 respectivamente.

7.1.3 Ajuste de ganho em biquads

Para melhor uso da faixa dinâmica disponível, a equalização da faixa dinâmica requer ajustes nos ganhos dos biquads. Nas fórmulas listadas para os projetos, em alguns casos o ganho pode ser controlado, em outros não. De qualquer forma, dentro de uma realização em cascata com mais de uma seção não são óbvios quais os níveis de amplificação em relação à entrada que vão surgir, e uma análise da estrutura é requerida para determiná-los, como em qualquer outra realização ativa. Desta análise os ganhos necessários nas seções podem ser determinados. No exemplo anterior, os ganhos ficariam equalizados em 1 com a primeira seção tendo seu ganho multiplicado por 1/8.78, a segunda por 8.78/27.2, e a terceira por 27.2/10. Os fatores de multiplicação para equalização com ganhos unitários são sempre as razões entre os ganhos máximos da entrada até a saída da seção anterior e até a saída da seção atual. Existem então os problemas de reduzir o ganho e de aumentar o ganho, que usualmente requerem operações diferentes.

7.1.3.1 Redução de ganho

Supondo que não seja possível modificar o projeto da seção para um ganho menor, alterações podem ser feitas nos elementos passivos ligados à entrada da seção, como na figura 7.17. Todas as impedâncias ligadas à entrada são transformadas em divisores de impedâncias com as mesmas impedâncias de Thévenin e o fator de atenuação desejado. A figura exemplifica o tratamento de um resistor e de um capacitor. Em uma versão aproximada, e ineficiente, um divisor resistivo de baixa impedância pode ser colocado na entrada da seção.

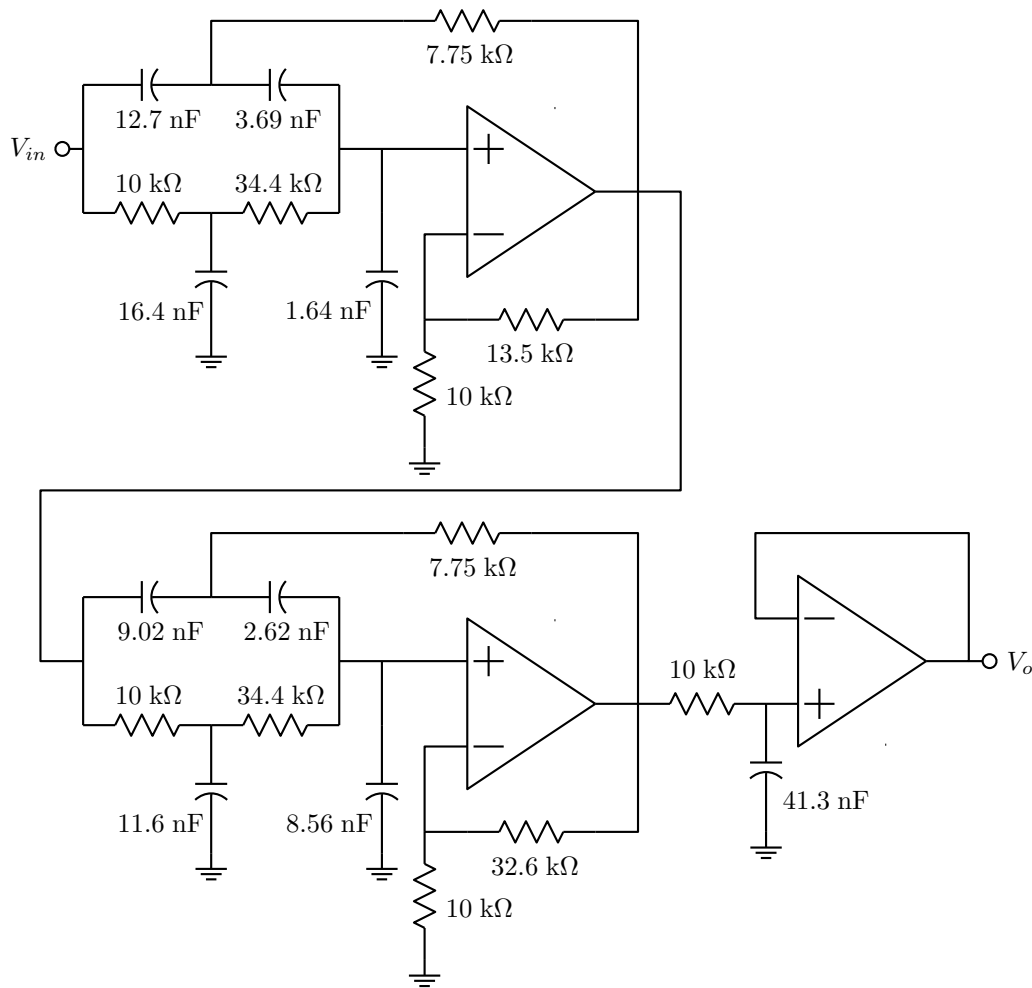


Figura 7.16: Filtro elíptico de ordem 5 realizado com biquads com duplo T.

7.1.3.2 Aumento de ganho

Também supondo não ser possível reprojeter a seção, basta substituir todas as impedâncias que realimentam o amplificador que gera a saída por divisores de impedâncias, com as mesmas impedâncias de Thévenin e com atenuação igual ao inverso do ganho de tensão desejado. Uma versão aproximada pode ser obtida com um divisor resistivo de baixa impedância. A operação é mostrada na figura 7.18, também exemplificando os casos de um resistor e de um capacitor. Notar que estas operações se aplicam também aos biquads de três amplificadores, onde todas as impedâncias passivas estão ligadas entre nós de impedância nula. Neste caso os ramos aterrados dos divisores não tem função.

Exemplo: Aplicando a equalização de faixa dinâmica à rede da figura 7.16, mantendo o ganho máximo em 10, os fatores de multiplicação são como os para ganhos unitários, mas a primeira seção deve ter seu ganho multiplicado por 10. Os fatores são então, na ordem das seções, $10/8.78$, $8.78/27.2$ e $27.2/10$. A estrutura resultante é a da figura 7.19. Na primeira seção o ganho foi aumentado com a alteração do resistor realimentando a estrutura e alteração direta do ganho do amplificador não inversor, multiplicando-o por $10/8.78$ (o resistor entre a saída e a entrada positiva do amplificador poderia ser alterado conforme a

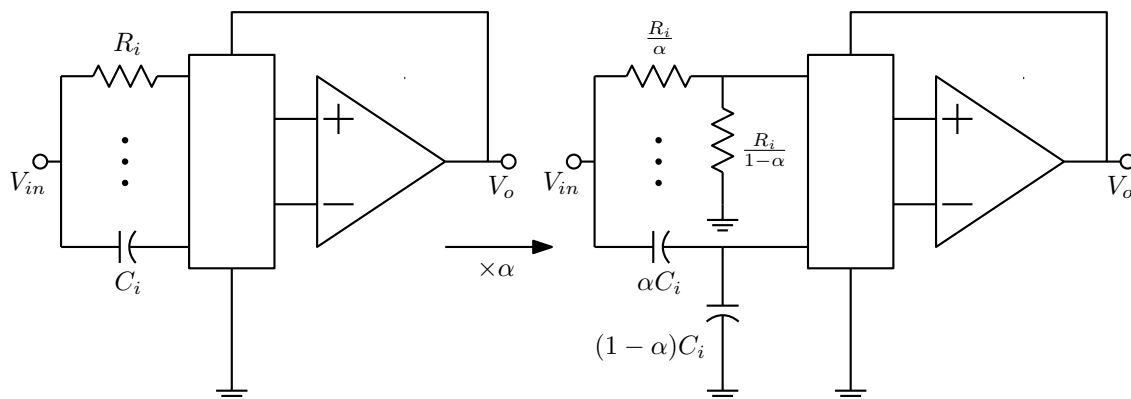


Figura 7.17: Redução de ganho em um biquad, $\alpha < 1$.

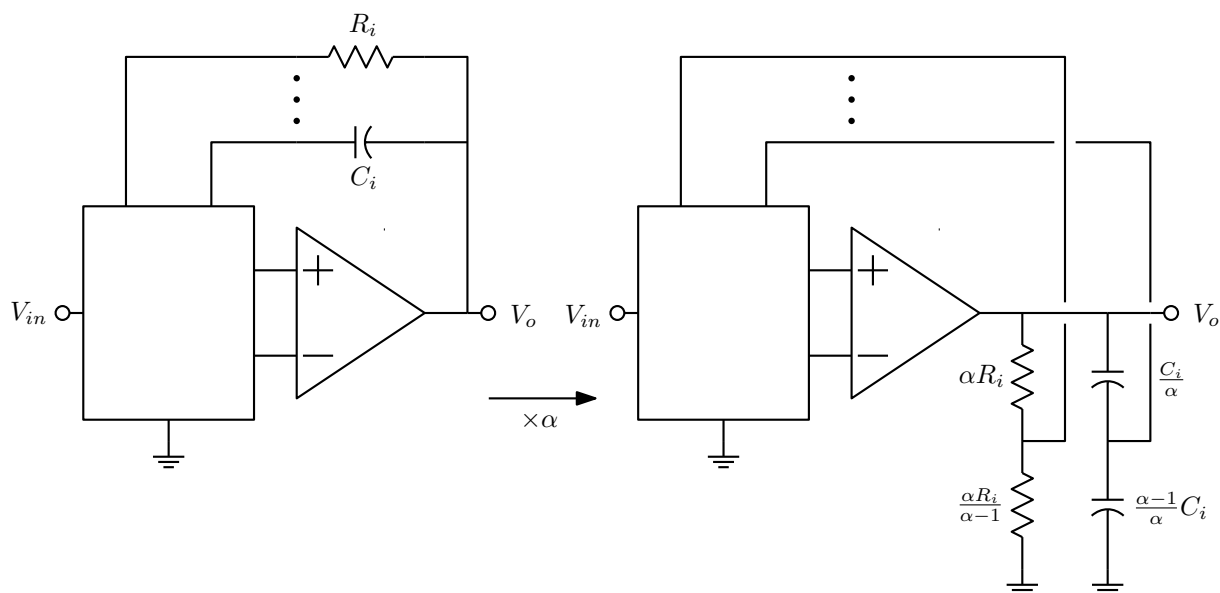


Figura 7.18: Aumento de ganho em um biquad, $\alpha > 1$.

figura 7.18 com o mesmo efeito). Na segunda seção o ganho foi reduzido pela transformação em divisores do resistor e do capacitor ligados à entrada, e na última seção o ganho foi aumentado pelo aumento direto do ganho do amplificador para 2.72. Os módulos das respostas em frequência até as saídas das três seções são mostrados na figura 7.20.

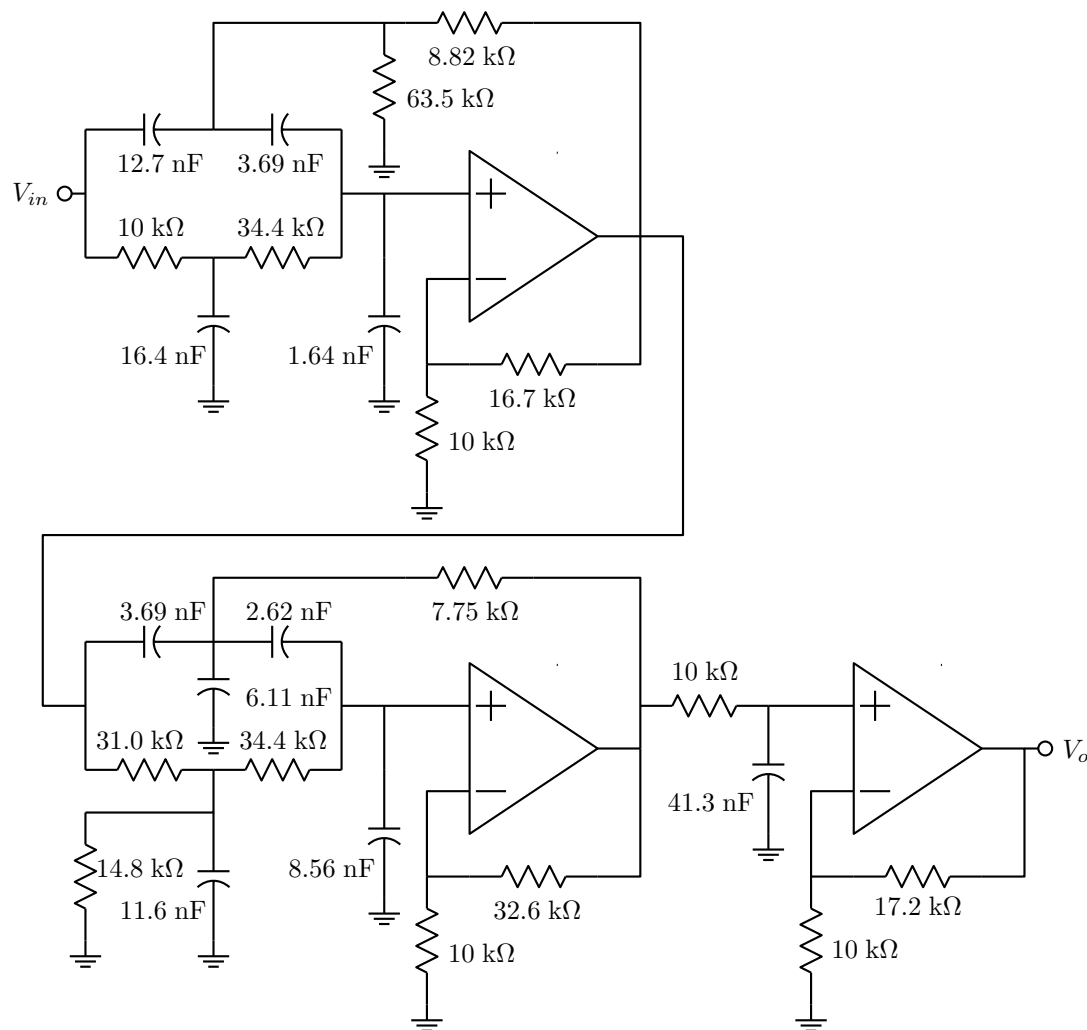


Figura 7.19: Filtro elíptico de ordem 5 realizado com biquads com duplo T com faixa dinâmica equalizada.

7.2 Realizações usando conversores de impedância

7.2.1 O conversor negativo de impedância (NIC)

Um amplificador operacional pode ser usado para gerar impedâncias negativas, na forma do “negative impedance converter” (NIC), mostrado na figura 7.21. Calculando a impedância vista por Z_1 :

$$I_2 = \frac{V_{in}}{R_2} \Rightarrow V_o = V_{in} + R_2 I_2 = V_{in} \left(1 + \frac{R_2}{Z_2} \right)$$

$$I_{in} = \frac{V_{in} - V_o}{R_1} = -V_{in} \frac{R_2}{R_1 Z_2}$$

$$Z_{in1} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = -Z_2 \frac{R_1}{R_2}, \text{ e analogamente } Z_{in2} = -Z_1 \frac{R_2}{R_1}$$

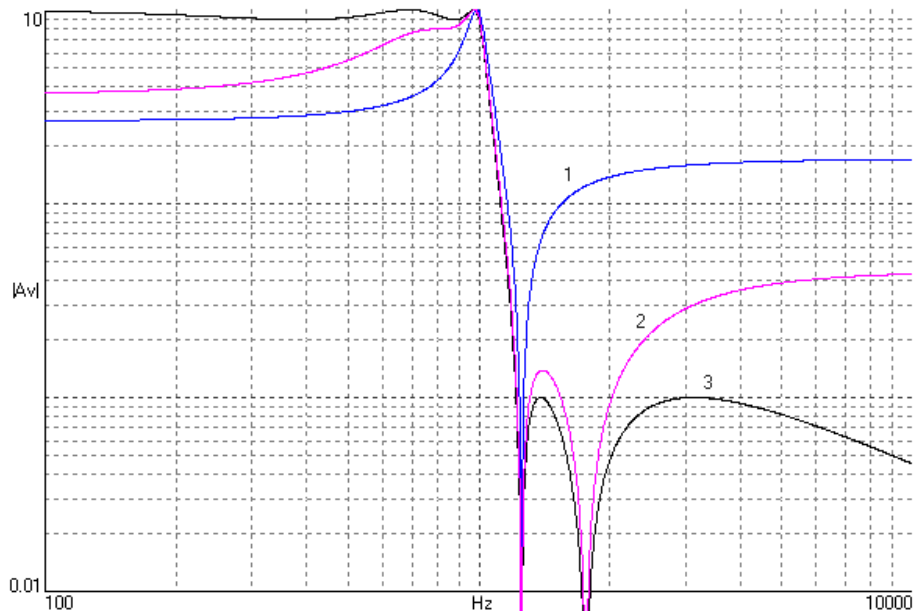


Figura 7.20: Módulos das respostas em frequência até as saídas das três seções na figura 7.19.

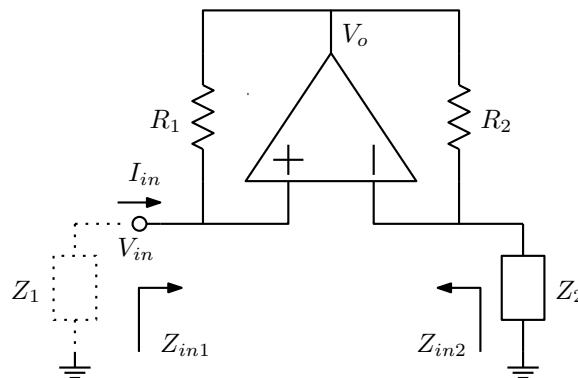


Figura 7.21: Conversor negativo de impedância (NIC).

Este circuito é estável ou não dependendo das realimentações. Se Z_1 e Z_2 forem resistores e $R_1 = R_2$, por exemplo, deve-se ter $Z_2 > Z_1$ para que a realimentação negativa domine na configuração mostrada.

Exemplo: O NIC pode ser usado para construir um amplificador bidirecional, para aumentar o nível de sinal em uma linha de comunicação, como na figura 7.22. O nível de sinal no centro da linha, V_c , sem o resistor negativo valeria $V_c = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$. Com o resistor negativo vale:

$$V_c = (V_1 + V_2) \frac{R // (-R_1)}{R + R // (-R_1)} = (V_1 + V_2) \frac{1}{R \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right) + 1} = \frac{1}{2} (V_1 + V_2) \frac{R_1}{R_1 - \frac{R}{2}}$$

E então R_1 pode ajustar o nível de sinal na linha. Deve-se manter $|R_1| > \frac{R}{2}$ para estabilidade, mantendo a resistência vista em V_c positiva. Note-se que estes circuitos somente funcionam se a resposta

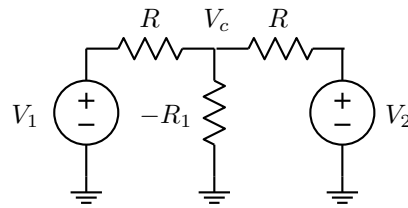


Figura 7.22: Amplificador bidirecional com resistor negativo.

em frequência do amplificador decair com a frequência, e capacitâncias parasitas dominarem o comportamento em alta frequência, do contrário pequenas indutâncias em série com a linha podem causar instabilidade.

Se no lugar de R_2 for colocado um capacitor de valor C_2 , com $Z_2 = R_3$, um resistor, resulta um indutor negativo em Z_{in1} :

$$Z_{in1} = -\frac{R_1}{\frac{1}{sC_2}} R_3 = -sC_2 R_1 R_3$$

Se agora for usado outro NIC para gerar um R_3 negativo, tem-se um indutor positivo, mostrado na figura 7.23. Neste circuito:

$$Z_{in1} = -sR_1 C_2 \left(-\frac{R_3}{R_4} R_5 \right) = s \frac{R_1 C_2 R_3 R_5}{R_4}$$

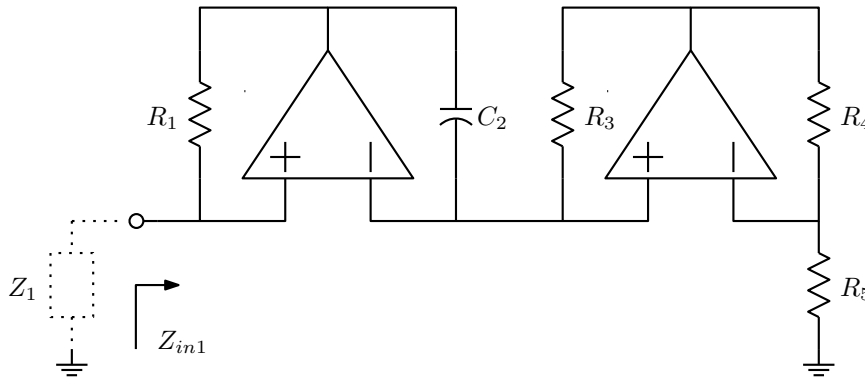


Figura 7.23: Indutor simulado.

Pode-se trocar as posições de C_2 e R_4 com o mesmo resultado. Este circuito pode ser estável ou não, dependendo de como são orientadas as entradas dos amplificadores, e de que Z_1 estiver presente. Uma forma de avaliar a estabilidade é analisar o circuito considerando uma resposta em frequência nos amplificadores, como $A_v(s) = GB/s$, e verificar onde estão as frequências naturais. A análise é um tanto complexa, pois o circuito é de ordem 3. No caso, não há solução se $Z_1 = \infty$, e a forma mostrada é estável se Z_1 for um resistor de valor pequeno o bastante. É interessante observar quais são as relações entre tensões e correntes na entrada e sobre o capacitor, como na figura 7.24, onde os resistores são feitos iguais por conveniência. São as relações de um girador, que na figura 7.23 transforma um capacitor em indutor:

$$V_2 = V_1 - RI_1 - V_1 \Rightarrow V_2 = -RI_1$$

$$V_o = V_1 + RI_2 = 2V_1 \Rightarrow V_1 = RI_2$$

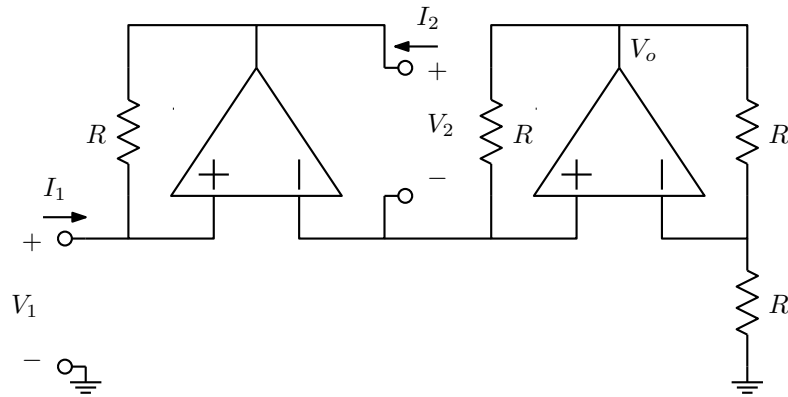


Figura 7.24: Girador feito com amplificadores operacionais.

Várias variações desta estrutura são possíveis. Uma forma que evita os problemas de estabilidade é a de Antoniou, já mostrada na figura 1.59. Ela apenas troca as saídas dos amplificadores uma com a outra (o que não altera a análise), e orienta as entradas em uma forma que garante sempre a estabilidade.

Exemplo: Um filtro passa-baixas polinomial de ordem 4 pode ser realizado na forma da figura 7.25. Os dois indutores tem valores $L_2 = RR'_2C_2$ e $L_4 = RR'_4C_4$. Os valores das indutâncias podem ser ajustados pelos capacitores C_2 e C_4 ou pelos resistores R'_2 e R'_4 . Esta estrutura copia a faixa dinâmica da rede passiva nos nós correspondentes, mas gera sinais maiores dentro dos conversores. Não há forma simples para escalamento de faixa dinâmica. O nível de impedância dos elementos R , C_2 e C_4 pode ser feito menor que o de R'_2 e R'_4 para reduzir a amplificação das tensões dentro dos conversores.

7.2.2 O conversor generalizado de impedância (GIC)

O caso geral da estrutura, o “generalized impedance converter” (GIC) [21], é o da figura 7.26. Analisando a estrutura informalmente, notando que $V_2 = V_1$ devido às duas entradas dos amplificadores com tensão nula em série:

$$V_{o2} = V_1 - Z_1 I_1 \quad I_{Z2} = I_{Z3} = \frac{V_{o2} - V_1}{Z_2} = -\frac{Z_1}{Z_2} I_1$$

$$V_{o1} = V_1 - I_{Z3} Z_3 = V_1 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} I_1 \quad I_{Z4} = -I_2 = \frac{V_{o1} - V_1}{Z_4} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4} I_1$$

$$Z_{in1} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_2}{-I_2 \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3}} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4} \quad Z_{in2} = \frac{Z_0 Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3}, \text{ analogamente}$$

Pode-se interpretar a função do circuito da figura 7.26 como um operador que multiplica Z_5 por $\frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4}$, quando a observação é feita pelo lado esquerdo, e divide Z_0 pelo mesmo fator quando a observação é feita pelo lado direito. Uma aplicação interessante é fazer $\frac{Z_1(s)Z_3(s)}{Z_2(s)Z_4(s)} = s$, usando um capacitor unitário como Z_2 ou Z_4 e as demais impedâncias como resistores unitários (o nível de impedância pode ser mudado arbitrariamente, com o mesmo efeito). Tem-se então um operador que diferencia ou integra uma impedância. O filtro da figura 7.25 pode então ser representado como na figura 7.27. Filtros assim são

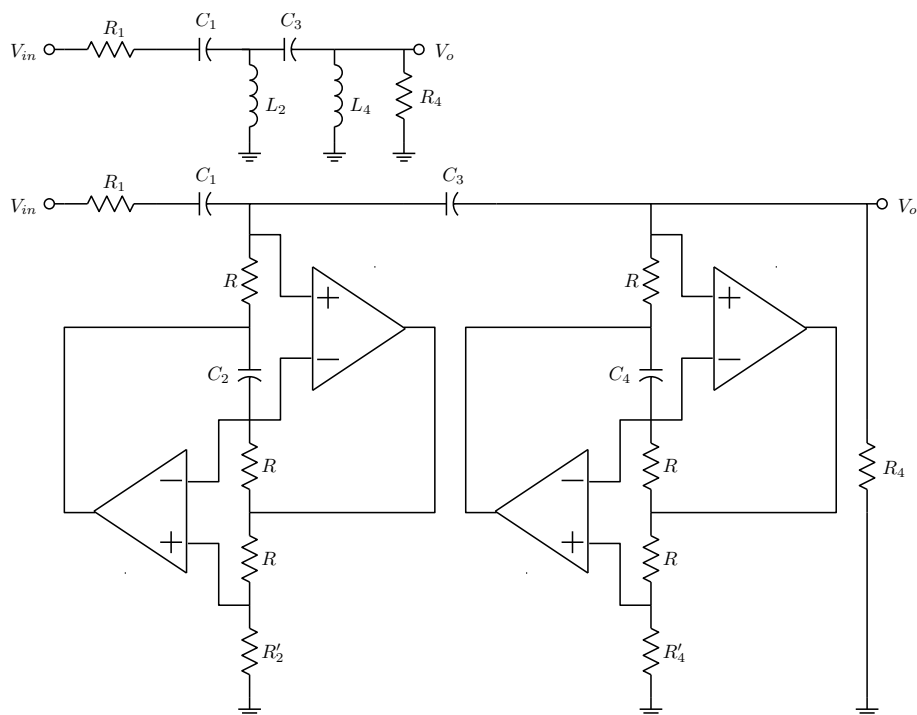


Figura 7.25: Filtro passa-altas de ordem 4 construído com indutores simulados. Uma saída em baixa impedância fica disponível na saída do amplificador da direita, amplificada pelo fator $1 + \frac{R}{R'_4}$.

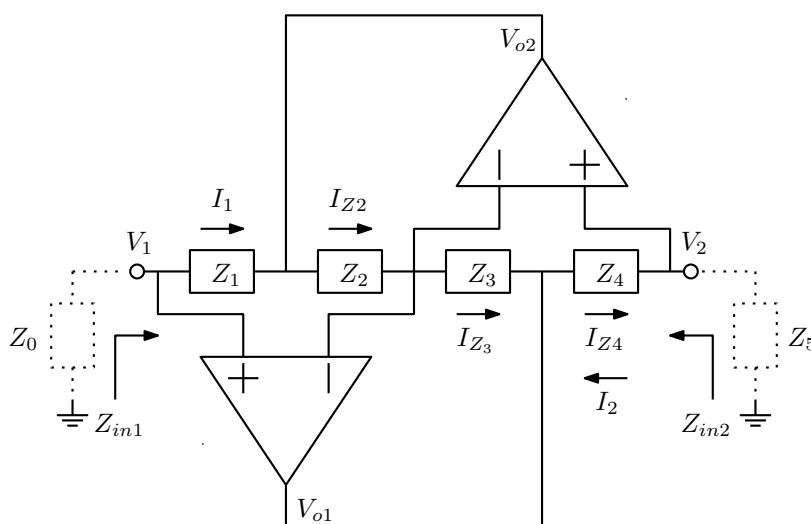


Figura 7.26: Conversor generalizado de impedância.

mais convenientemente projetados a partir de protótipos normalizados, com o circuito completo sendo desnormalizado depois. O problema dos níveis altos de sinal dentro dos conversores pode ser reduzido pela

redução do nível de impedância interno dos conversores, usando-se o capacitor com valor k e resistores de valor $1/k$, $k > 1$.

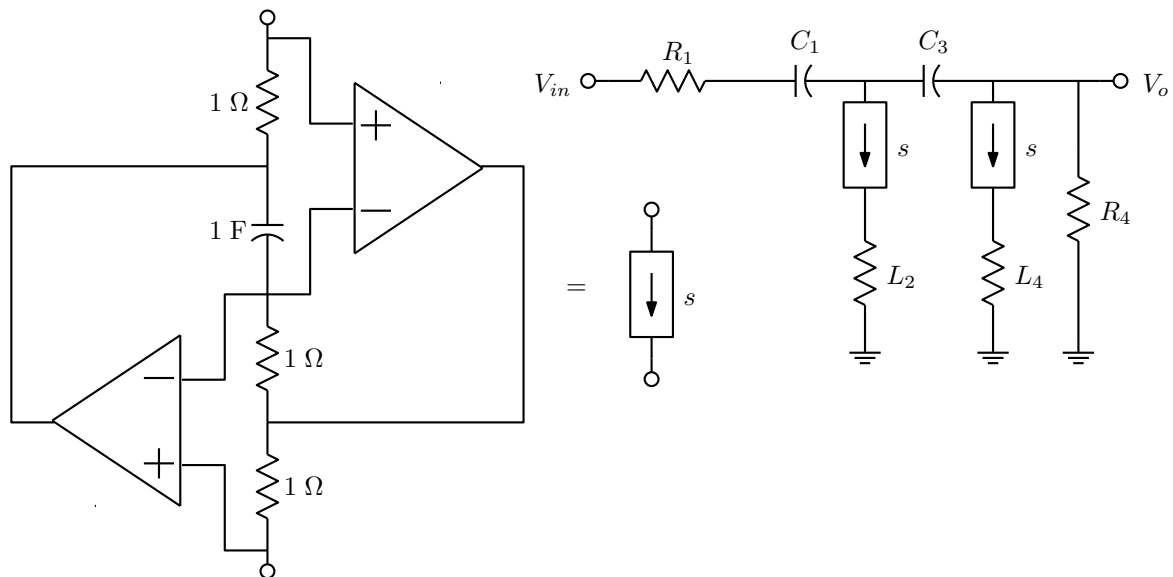


Figura 7.27: Conversor “s” e o filtro da figura 7.25.

7.2.3 Filtros passa-altas

Outros tipos de filtros passa-altas, com zeros finitos de transmissão, são mostrados na figura 7.28. Os dois protótipos são de ordem 7, com duas frequências naturais em zero, realizando filtros de ordem 5. A versão em forma “T” com conversores tem as mesmas frequências naturais, mas as duas em zero ficam localizadas nos nós isolados por capacitores, e não afetam os amplificadores nos conversores. A forma π ilustra a aplicação dos conversores a blocos de indutores, transformando todos em resistores. Note-se que a operação elimina as frequências naturais em zero do protótipo. A versão transformada tem apenas 5 elementos reativos, os dois capacitores do protótipo e os três dos conversores. A forma “T” preserva melhor as sensibilidades do protótipo. Os elementos internos dos conversores copiam as sensibilidades dos indutores, com algumas trocas de sinal. Na forma “ π ” os elementos internos dos conversores não correspondem a estruturas do protótipo, e a preservação de sensibilidades vale apenas para os elementos passivos. Os três conversores devem estar bem casados entre si para boas características de sensibilidade. Em geral, as sensibilidades dos conversores são baixas se eles dividem a rede em dois blocos aterrados, sem outras conexões entre si. Assim, erros em elementos internos dos conversores equivalem a erros de nível de impedância nos blocos que eles conectam.

7.2.4 Filtros passa-baixas e outros

Um filtro passa-baixas de ordem 5 poderia ser obtido, em princípio, na forma da figura 7.29. A rede, entretanto, é de ordem 6. A frequência natural extra fica em zero (ver a seguir), e se o circuito for construído assim, partes dele, incluindo os amplificadores, ficam flutuando e podem levar à saturação dos amplificadores. É também possível eliminar os conversores ligados às terminações, substituindo as terminações por capacitores, com as impedâncias das terminações integradas da mesma forma que as

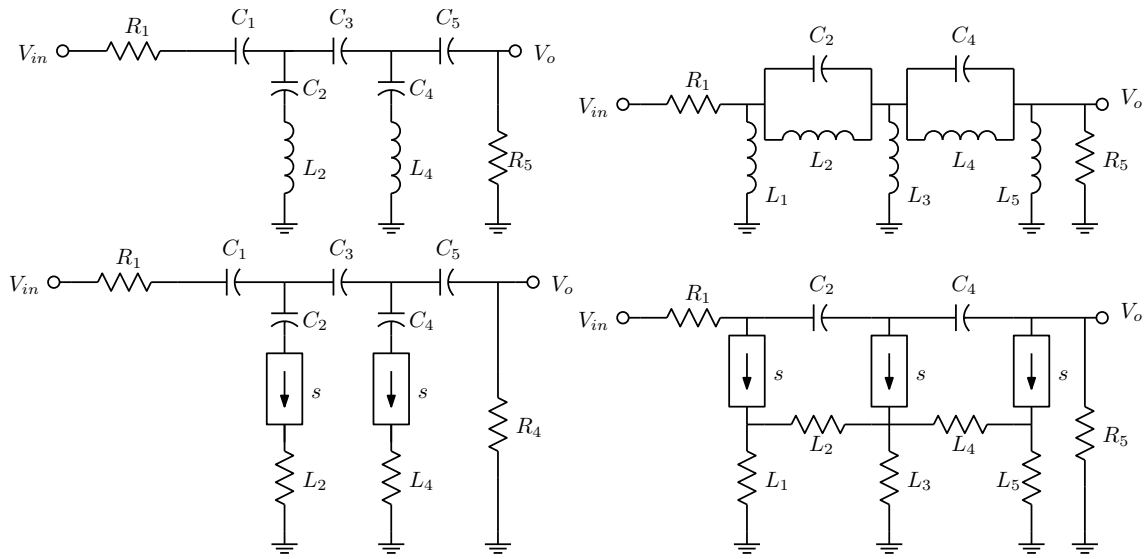


Figura 7.28: Filtros passa-altas de ordem 5, em forma “T” e em forma “π”.

impedâncias da rede indutiva. Nesta forma, mostrada na figura 7.30, é evidente que toda parte central do circuito está flutuando, isolada por capacitores. Os dois resistores r_a e r_b , de valores elevados, são incluídos para polarizar o bloco flutuante. Seus valores devem ser escolhidos de forma a manter correto o ganho CC do filtro, satisfazendo a relação, com valores normalizados:

$$\frac{R_5}{R_1 + R_5} = \frac{r_b}{r_a + L_1 + L_3 + L_5 + r_b}$$

Os resistores acrescentados equivalem a indutores grandes em paralelo com as terminações do protótipo. A estrutura é de ordem 6, e a função de transferência tem um par polo-zero no semieixo real negativo, em baixa frequência, quase se cancelando.

7.2.4.1 Indutores suspensos

O problema citado, de criação de frequência natural em zero, aparece quando se tenta realizar indutores suspensos. Sejam os circuitos da figura 7.31: Ao se tentar realizar um indutor suspenso (a) usando conversores “s” (b), considere-se que existem duas formas de construir os conversores. Na forma (c) os capacitores são colocados adjacentes aos terminais do resistor central, e na forma (d) como usado nos exemplos anteriores. Na forma (c) é evidente que o resistor central está isolado pelos capacitores, e que um par de entradas de amplificadores está sem polarização. Os amplificadores vão copiar a tensão contínua indeterminada nos nós isolados para as extremidades do circuito, gerando possíveis problemas de saturação dos amplificadores. Considerando que os amplificadores podem requerer pequenas correntes de polarização, estas vão certamente gerar saturações. A forma (d) parece evitar o problema, mas o circuito tem exatamente a mesma função, e também deixa indeterminada a tensão contínua nos terminais do resistor central e a copia para todas as entradas dos amplificadores. Uma forma de resolver o impasse é acrescentar outro indutor, de indutância elevada, conectando um dos terminais do indutor a outro ponto do circuito com tensão contínua determinada e impedância nula, como a terra. Com os conversores, este se torna um resistor, e tem-se um caso como o da figura 7.30.

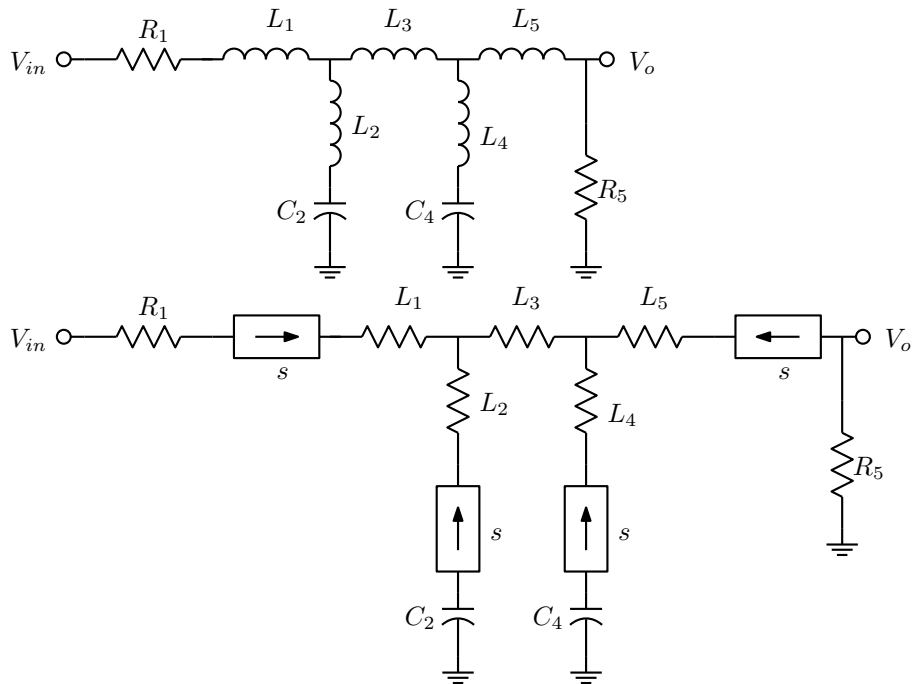


Figura 7.29: Filtro passa-baixas de ordem 5, em forma “T”, que resulta em frequência natural extra em zero.

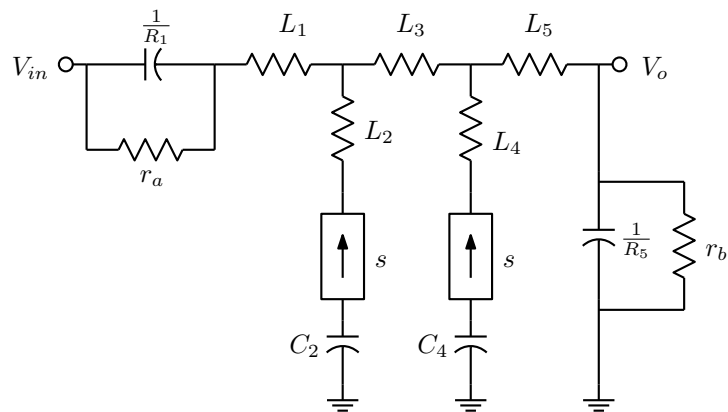


Figura 7.30: Filtro passa-baixas de ordem 5 com terminações capacitivas e resistores de polarização.

7.2.4.2 O resistor negativo dependente da frequência (FDNR)

A combinação do conversor “ s ” com um capacitor, integrando sua impedância, gera uma impedância $Z(s) = \frac{1}{s^2C}$, um “supercapacitor”, ou “resistor negativo dependente da frequência”, FDNR do nome em inglês. O nome vem pois $Z(j\omega) = \frac{-1}{\omega^2C}$. É um elemento ativo, que “ressona” com um resistor da mesma forma como um capacitor ressona com um indutor. O filtro da figura 7.30 pode ser representado como na figura 7.32.

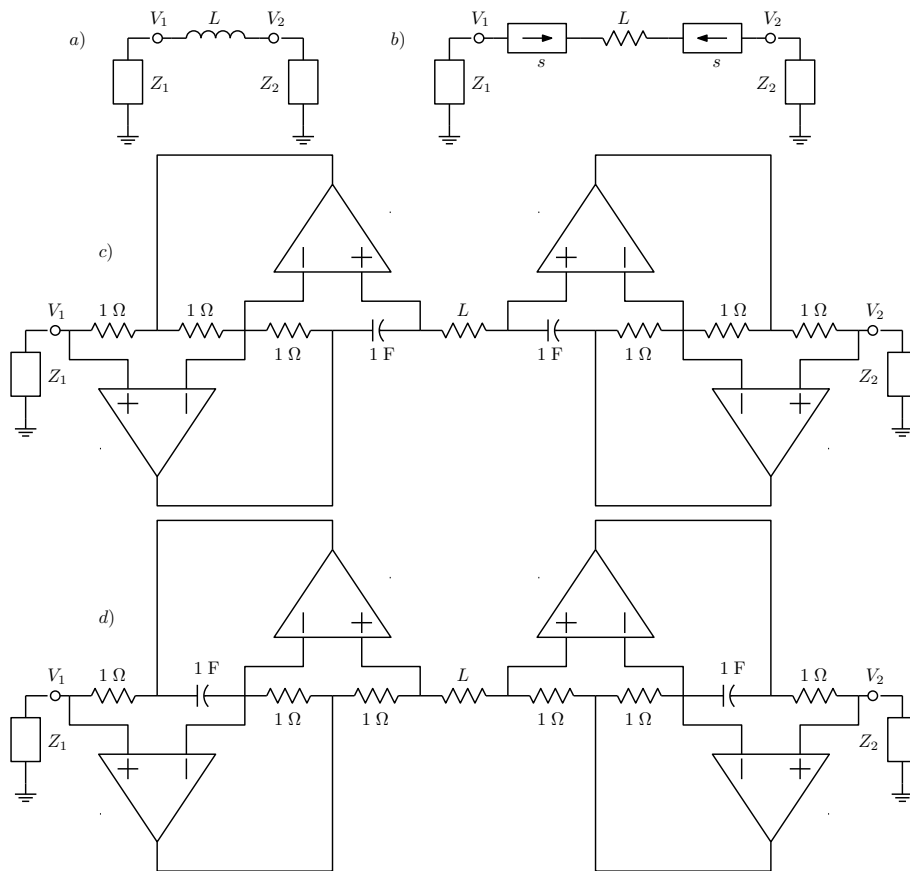


Figura 7.31: Tentativas de gerar um indutor suspenso. a) Indutor suspenso. b) Realização com conversores. c) Forma que evidentemente não dá certo. d) Forma alternativa, mas que também não dá certo devido à geração de frequência natural nula.

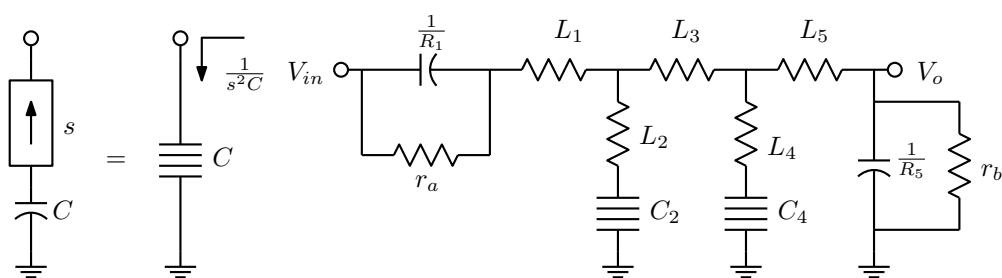


Figura 7.32: O “frequency-dependent negative resistor”, e um filtro feito com ele.

É possível trocar o capacitor aterrado com um dos resistores do conversor e obter um FDNR com valor determinado por um resistor. O conversor assim modificado pode ser tratado como um conversor “ s^2 ”, que funciona de forma similar ao conversor “ s ”. Ver figura 7.33.

Exemplo: Seja construir um filtro passa-faixa polinomial de ordem 4. A estrutura do protótipo é a

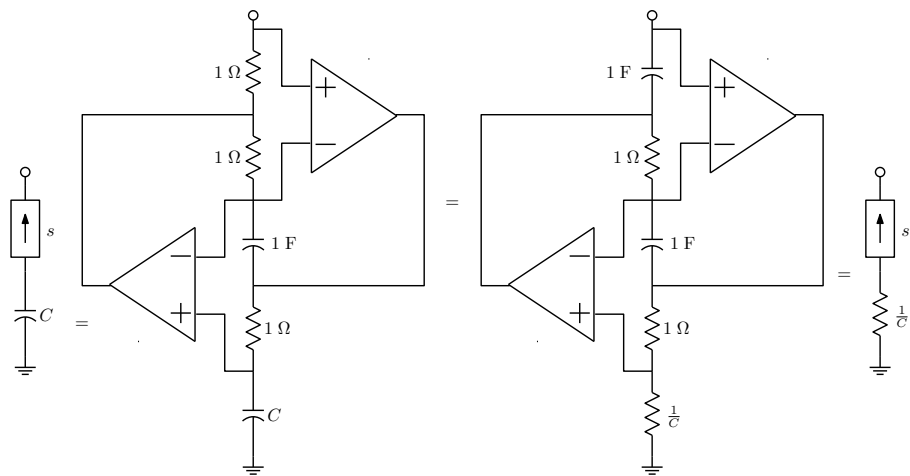


Figura 7.33: Conversor “ s^2 ”, derivado do FDNR.

da figura 7.34a. Os dois indutores podem ser eliminados com conversores “ s ”, como na figura 7.34b. É possível também dividir todas as impedâncias por s , obtendo o circuito da figura 7.34c, que tem dois FDNRs. Conversores “ s^2 ” podem realizá-los como na figura 7.34d. A estrutura gera uma frequência natural nula, devido ao resistor que fica isolado entre um capacitor e um FDNR. O resistor r_a , de valor elevado, é incluído para definir o nível contínuo nos nós isolados. As duas realizações apresentam boa preservação de sensibilidades, pois todos os conversores dividem as redes em duas partes aterradas.

Na figura 7.35 são mostradas as estruturas completas, ainda normalizadas. Na figura 7.36 são mostradas os módulos das respostas em frequência, junto com margens de erro calculadas por desvios estatísticos do módulo com tolerâncias de 5% nos elementos, para o protótipo passivo e para as duas realizações ativas. As formas ativas geram os mesmos desvios, pouco menores que duas vezes maiores que os da rede passiva. Isto é típico, já que as sensibilidades dos elementos dos conversores são similares às dos elementos do protótipo. As redes ativas tem 14 elementos, enquanto a rede passiva tem 6. É de se esperar então um aumento nos desvios estatísticos por um fator de $\sqrt{14/6} = 1.53$. Foi usada uma aproximação de Chebyshev de 1 dB, com banda passante entre 1 e 2 kHz, com resistores unitários de 1 k Ω . O resistor de polarização da forma com FDNRs, colocado como 10 k Ω , gera apenas um pequeno erro na resposta.

Estas formas de realização não são muito práticas para a construção em circuito integrado, por serem sensíveis a capacitâncias parasitas, e devido à inexistência de uma forma simples para escalamento de faixa dinâmica.

7.3 Simulação por equações de estado de filtros passivos

Muito desta técnica já foi tratado no capítulo sobre equações de estado. A técnica consiste em simular um conjunto de equações de estado que representa um filtro passivo de baixa sensibilidade com uma rede de integradores, de forma que mapeie da melhor forma possível os elementos do filtro protótipo nos da rede ativa. Isto requer idealmente uma estrutura passiva que gere uma árvore normal, como ocorre com filtros “polinomiais”. Quando isto não ocorre, pode-se desviar um pouco das equações de estado verdadeiras e tratar alguns elementos de forma diferente, como na técnica de “capacitores cruzados”, na figura 2.35. É também conveniente que a variável de saída do filtro seja uma variável de estado, o que limita as realizações a filtros passa-baixas e passa-faixa. Outros tipos de filtros requerem composições

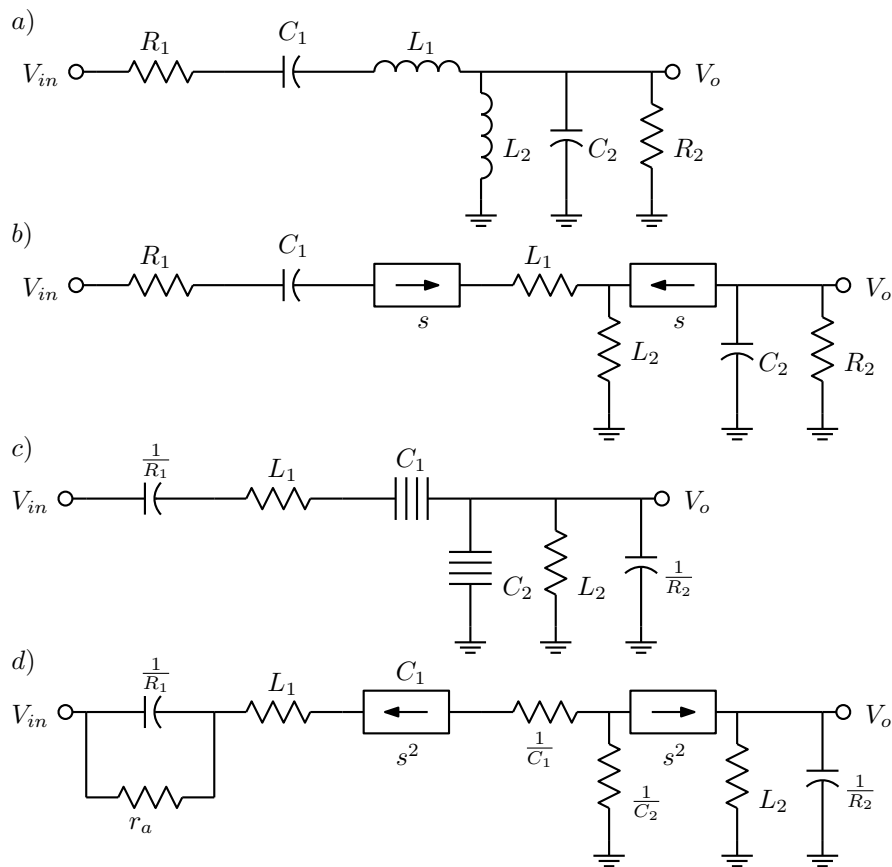


Figura 7.34: Realizações para um filtro passa-faixa de ordem 4. a) Protótipo normalizado. b) Com indutores simulados. c) Versão RC-FDNR. d) com FDNRs simulados.

de variáveis de estado para gerar a saída, em uma versão de ordem mais alta do que aparece na figura 7.2. As realizações obtidas apresentam boa preservação das sensibilidades do protótipo, são insensíveis a capacitâncias parasitas, pois todos os nós são de impedância nula, e é simples escalar faixa dinâmica nelas.

Exemplo: Seja construir um filtro passa-faixa irregular de ordem 6 como o da figura 3.19, que tenha banda passante entre 300 Hz e 4 kHz, com atenuação máxima na banda passante de 1 dB e atenuação mínima na banda de rejeição de 40 dB. Um filtro similar a um filtro de canal de sistema telefônico, usado como “anti-aliasing”. O filtro protótipo pode ser obtido com uma técnica numérica similar à descrita no capítulo sobre aproximações. A função característica é similar à se um filtro elíptico de ordem 5 (Figura 5.2), mas tem um polo em zero, ficando como na figura 7.37.

A função $K(j\omega)$ é uma razão de polinômios de ω do tipo:

$$K(j\omega) = k_0 \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_3^2)}{\omega(\omega^2 - \omega_4^2)(\omega^2 - \omega_5^2)}$$

A aproximação normalizada pode ser feita com $\omega_{p1} = 0.075$, $\omega_{p2} = 1$, $\epsilon = 0.50885$ e $\alpha = 14.018$. Realizando uma otimização numérica similar à descrita para filtros passa-baixas, e obtendo os polinômios

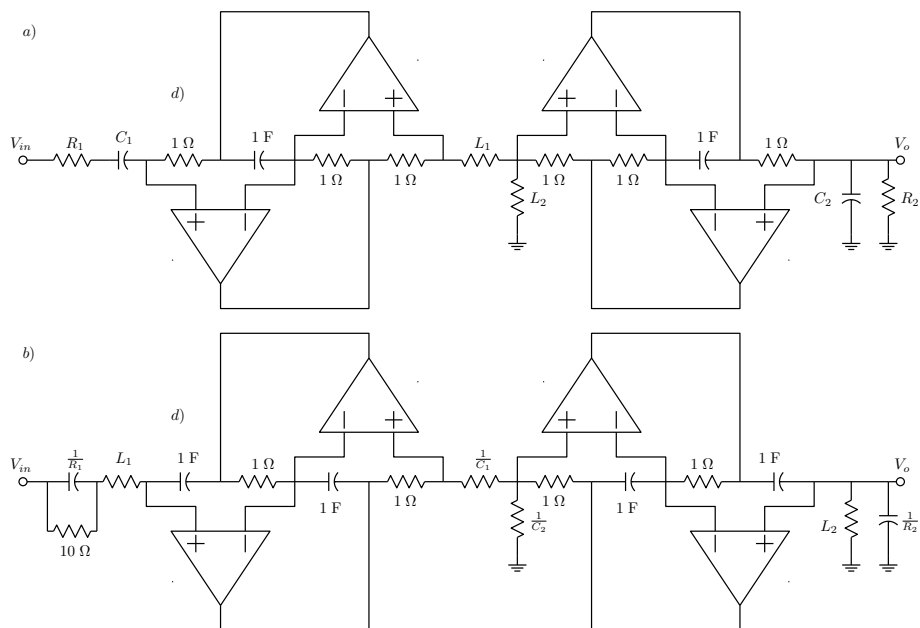


Figura 7.35: Estruturas completas para os filtros. a) Simulação de indutores. b) Simulação de FDNRs.

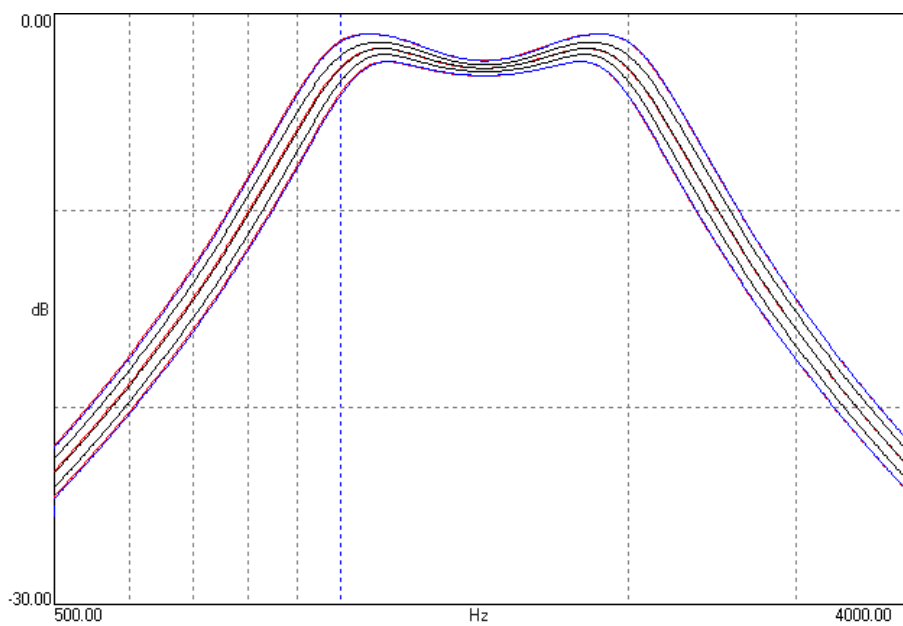


Figura 7.36: Módulo da resposta em frequência, com margens de erro, para o protótipo passivo (erro menor) e para as duas formas ativas da figura 7.34.

necessários à síntese, resultam³:

³Síntese feita com o programa APRM. Como nos demais exemplos, os cálculos são feitos com mais dígitos do que os

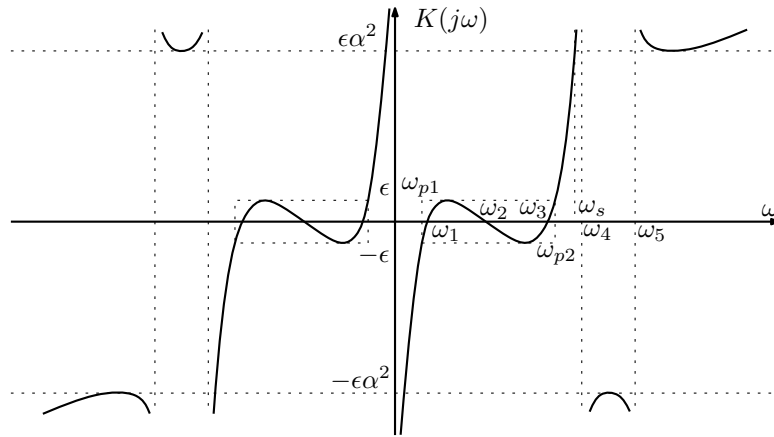


Figura 7.37: Função característica para um filtro passa-faixa irregular de ordem 6.

$$F(s) = s^6 + 1.4699s^4 + 0.50671s^2 + 0.010949$$

$$P(s) = 0.045929(s^5 + 4.5673s^3 + 4.6725s)$$

$$E(s) = s^6 + 0.87262s^5 + 1.8496s^4 + 1.0790s^3 + 0.80849s^2 + 0.22948s + 0.010949$$

Este filtro requer terminações diferentes, e a forma de obter seus valores é realizar a síntese partindo dos dois lados da estrutura. As impedâncias z_{11} e z_{22} descrevem a rede completa, e são obtidas como:

$$\frac{z_{11}}{R_g} = \frac{E_o - F_o}{E_e + F_e} = \frac{0.87262(s^5 + 1.2365s^3 + 0.26298s)}{2(s^6 + 1.6598s^4 + 0.65760s^2 + 0.010949)}$$

$$\frac{z_{22}}{R_l} = \frac{E_o + F_o}{E_e + F_e} = \frac{z_{11}}{R_g}$$

A expansão de z_{22} com $R_l = 1 \Omega$, com a geração dos zeros em 1.7379 e 1.2438 rad/s, e terminando com a extração do indutor em paralelo, gera a estrutura da figura 7.38. Para obter R_g , observe-se que o indutor L_6 realiza a impedância $\frac{z_{11}}{R_g}(s)$ quando $s \rightarrow 0$.

$$\left. \frac{z_{11}}{R_g} \right|_{s \rightarrow 0} = \frac{0.87262 \times 0.26298s}{2 \times 0.010949} \frac{1}{R_g} = sL_6 \Rightarrow R_g = 0.87452 \Omega$$

Escrevendo as equações de estado modificadas em transformada de Laplace para o protótipo da figura 7.38, identificando as correntes nos capacitores e as tensões nos indutores:

$$sC_1V_1 = I_2 - \frac{V_1}{R_l} + sC_2(V_3 - V_1)$$

$$sL_2I_2 = V_3 - V_1$$

$$sC_3V_3 = I_4 - I_2 + sC_2(V_1 - V_3) + sC_4(V_5 - V_3)$$

$$sL_4I_4 = V_5 - V_3$$

$$sC_5V_5 = -I_4 - I_6 + \frac{V_{in} - V_5}{R_g} + sC_4(V_3 - V_5)$$

$$sL_6I_6 = V_5$$

apresentados.

- $R_l = 1 \Omega$
- $C_1 = 1.9325 \text{ F}$
- $L_2 = 0.81318 \text{ H}$
- $C_2 = 0.40717 \text{ F}$
- $C_3 = 2.3591 \text{ F}$
- $L_4 = 0.50183 \text{ H}$
- $C_4 = 1.2881 \text{ F}$
- $C_5 = 1.7493 \text{ F}$
- $L_6 = 9.1647 \text{ H}$
- $R_g = 0.87452 \Omega$

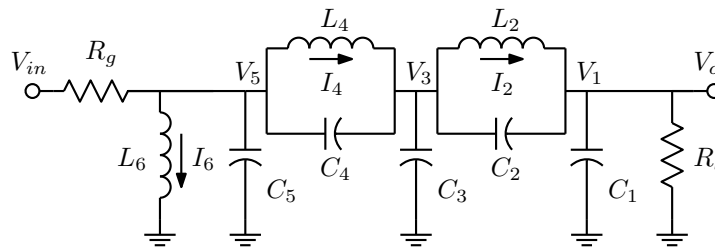


Figura 7.38: Estrutura do protótipo passivo para o filtro passa-faixa irregular.

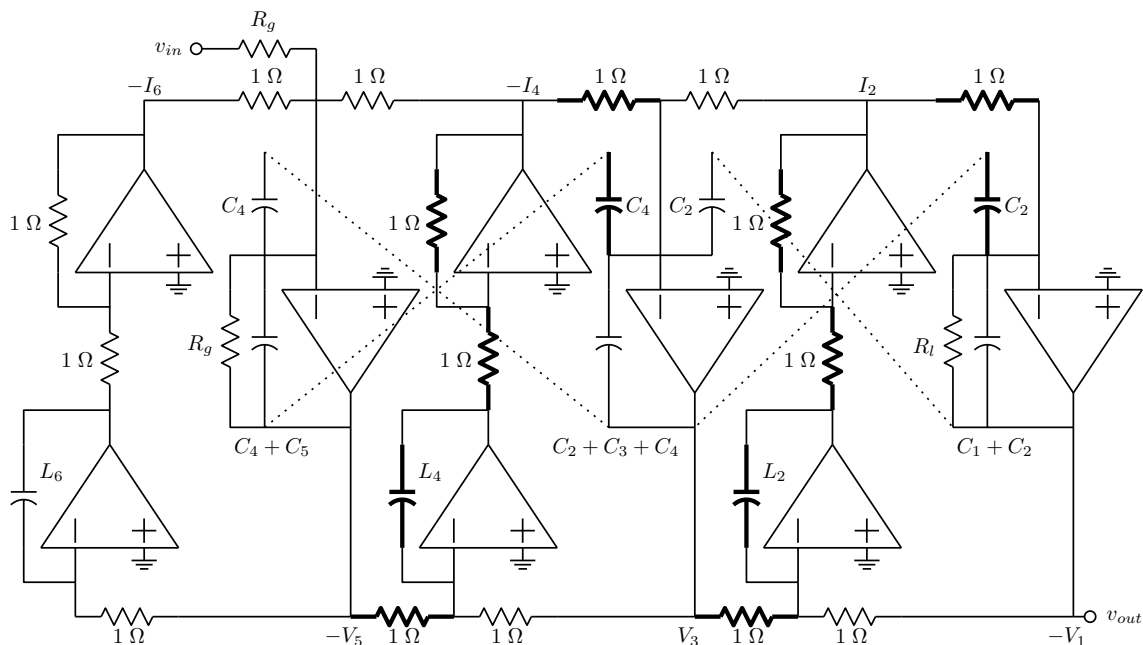


Figura 7.39: Versão ativa normalizada para o filtro da figura 7.38. Em negrito, os elementos que formam zeros de transmissão.

Reescrevendo em forma integral e organizando os sinais das integrações, resulta a estrutura normalizada da figura 7.39. A estrutura ainda poderia ter a faixa dinâmica escalada, pois como mostram os níveis de sinal para entrada unitária, mostrados na figura 7.40, alguns picos de nível, particularmente nas simulações das correntes nos indutores, são altos, excedendo o ganho unitário. A desnormalização em frequência dividiria todas as capacitâncias por $2 \times \pi \times 4000$, e a desnormalização em impedância dividiria capacitâncias e multiplicaria resistências por um fator adequado, como 10000. Os integradores não inversores poderiam ser realizados com integradores “phase-lead”, para melhor comportamento considerando a resposta em frequência limitada dos amplificadores.

$$\begin{aligned}
 -V_1 &= -\frac{1}{s(C_1 + C_2)} \left(I_2 - \frac{V_1}{R_l} + sC_2V_3 \right) \\
 I_2 &= +\frac{1}{sL_2}(V_3 - V_1) \\
 V_3 &= -\frac{1}{s(C_2 + C_3 + C_4)}(-I_4 + I_2 - sC_2V_1 - sC_4V_5) \\
 -I_4 &= +\frac{1}{sL_4}(-V_5 + V_3) \\
 -V_5 &= -\frac{1}{s(C_4 + C_5)} \left(-I_4 - I_6 + \frac{V_{in} - V_5}{R_g} + sC_4V_3 \right) \\
 -I_6 &= +\frac{1}{sL_6}(-V_5)
 \end{aligned}$$

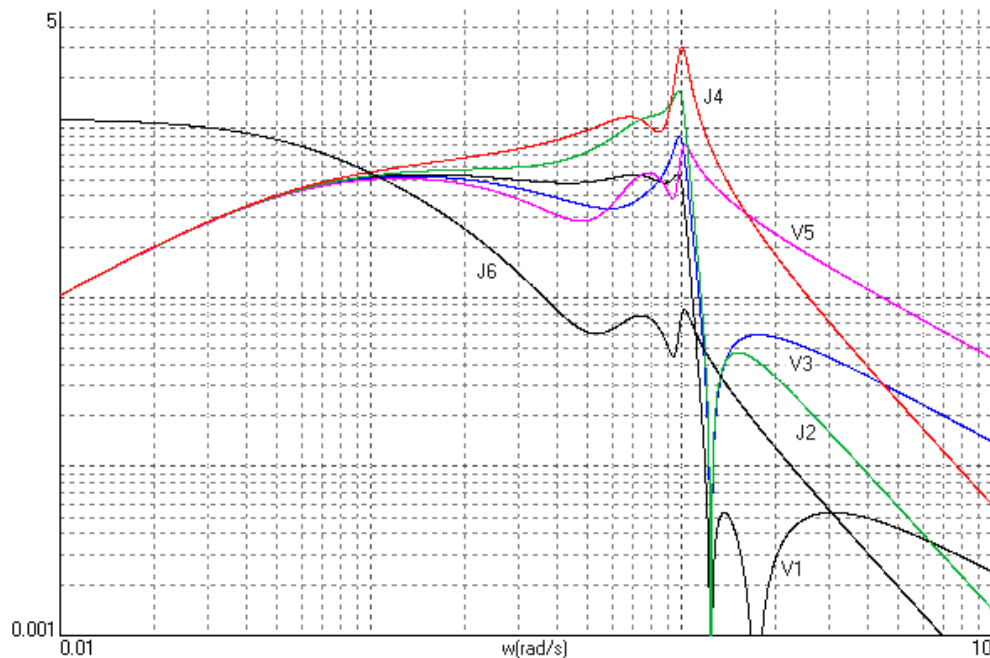


Figura 7.40: Módulos das respostas em frequência da entrada até as variáveis de estado, no protótipo da figura 7.38, que são os mesmos da simulação ativa.

Uma análise de sensibilidades das duas redes normalizadas, mostrada na figura 7.41, mostra o esperado aumento de desvio do módulo aproximadamente proporcional à raiz quadrada do número de componentes, e surpreendentemente baixos desvios na banda de rejeição na forma ativa, indicando que a realização de zeros de transmissão com a técnica de “capacitores cruzados” produz filtros de boa qualidade. Um exame das sensibilidades dos zeros revela que apenas os elementos marcados na figura tomam parte na formação dos zeros, todos com sensibilidades de $\pm \frac{Z_i}{2}$ para o zero Z_i (positivas apenas para os resistores que realimentam os inversores). Os outros capacitores cruzados não afetam os zeros, embora todos afetem os polos. Um exame das sensibilidades dos polos⁴ revela que os resistores unitários não afetam a parte

⁴São dois pares complexos e dois reais, em $-0.047748 \pm 0.99823j$, $-0.20667 \pm -0.75204j$, -0.30461 e -0.059167 , devido

real dos polos complexos de frequência menor, e também os capacitores simulando os indutores. Todos os elementos afetam as partes real e imaginária dos polos de maior frequência, e a parte real dos polos reais, com exceção do resistor de entrada, que não afeta os polos ou os zeros. A desnormalização da rede ou o escalamento de faixa dinâmica não alteram estes resultados.

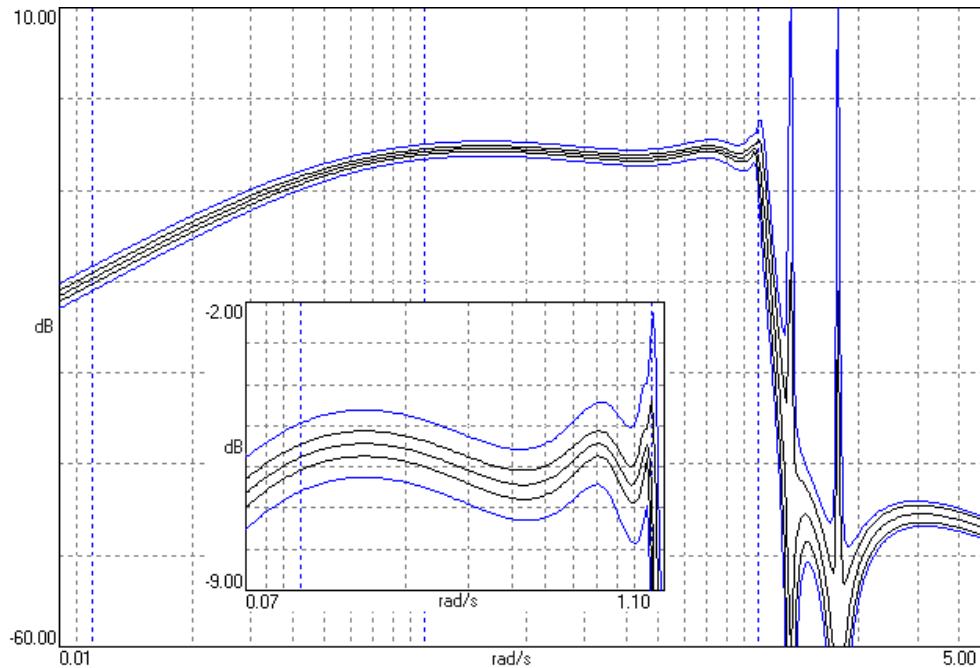


Figura 7.41: Comparação dos desvios estatísticos do módulo calculados por análise de sensibilidades, com tolerâncias de 5%, para o protótipo passivo e a simulação ativa (maior erro), normalizados. O quadro mostra uma ampliação da banda passante.

7.4 Filtros complexos

Uma aplicação importante em sistemas de comunicação é a do defasador de 90° , extensivamente usado em sistemas de modulação e demodulação. Uma forma relativamente simples de gerar estes circuitos é através de “filtros complexos”, que são filtros projetados de forma a terem bandas passantes passando frequências com apenas um sinal, com polos e zeros apenas em um lado do eixo real, sem os conjugados. Estes filtros não são fisicamente realizáveis, por terem coeficientes complexos, mas suas partes real e imaginária são filtros reais normais. Se estes dois filtros forem similares, é natural esperar que uma entrada “real” gere saídas “real” e “imaginária” com defasagem de $\approx 90^\circ$. Estes filtros normalmente não admitem realização prática RLCM, mas realizações ativas incluindo giradores podem facilmente ser obtidas, como se verá. Para gerar um filtro complexo, como na figura 7.42, parte-se de um filtro passa-baixas regular, e desloca-se todos os polos e zeros por um fator $j\omega_0$. Resulta um filtro com resposta diferente para frequências positivas e negativas, com coeficientes complexos. Os filtros realizando as partes real e imaginária deste filtro são filtros reais, com simetria linear, não geométrica, em redor da frequência ω_0 . A geração explícita

à banda passante larga, que gera praticamente um filtro elíptico de ordem 5 com um polo real extra e um zero na origem. Uma banda um tanto mais estreita geraria três pares complexos de polos.

deste filtro é de pouca importância, já que é simples obter diretamente a estrutura do filtro com a aplicação do deslocamento em um sistema de equações de estado descrevendo o protótipo.

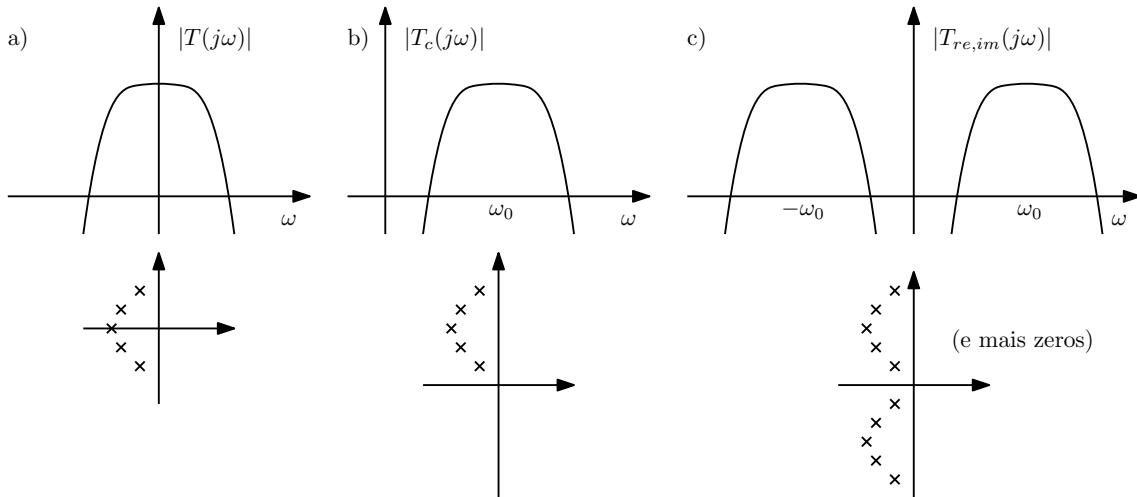


Figura 7.42: a) Filtro passa-baixas. b) Filtro complexo, com polos e zeros deslocados. c) Filtros real e imaginário, similares e reais com defasagem de $\approx 90^\circ$.

Para gerar um filtro complexo “passivo”, considere-se um capacitor e um indutor quando $s \rightarrow s + j\omega_0$. Um capacitor se transforma em um capacitor em paralelo com um resistor imaginário negativo $\frac{-j}{\omega_0 C}$, e um indutor se transforma em um indutor em série com um resistor imaginário positivo $j\omega_0 L$, como na figura 7.43.

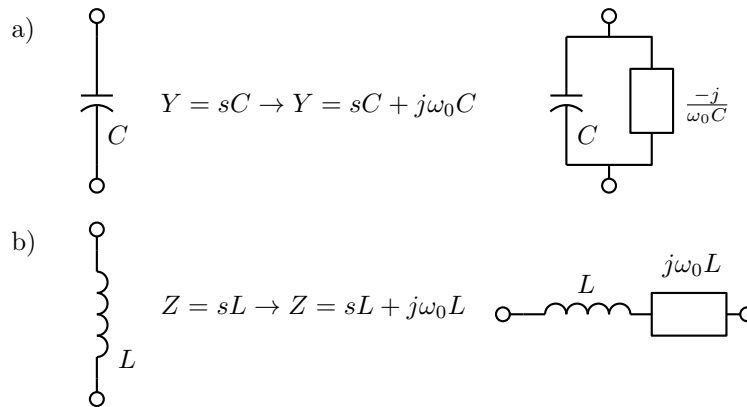


Figura 7.43: a) Transformação de um capacitor. b) Transformação de um indutor.

Cada ramo destes gera uma equação de estado que se divide em duas quando se divide as tensões e correntes nas partes real e imaginária:

$$\begin{aligned}
 sCV &= J \rightarrow (s + j\omega_0)C(V_{re} + jV_{im}) = J_{re} + jJ_{im} \\
 sCV_{re} - \omega_0CV_{im} &= J_{re} \\
 sCV_{im} - \omega_0CV_{re} &= J_{im} \\
 sLJ &= V \rightarrow (s + j\omega_0)L(J_{re} + jJ_{im}) = V_{re} + jV_{im} \\
 sLJ_{re} - \omega_0LJ_{im} &= V_{re} \\
 sLJ_{im} - \omega_0LJ_{re} &= V_{im}
 \end{aligned}$$

Estas equações descrevem pares de capacitores em paralelo com as duas portas de um girador com resistência de giração $\frac{1}{\omega_0 C}$ ou pares de indutores em série com os ramos de um girador com resistência de giração $\omega_0 L$, como na figura 7.44.

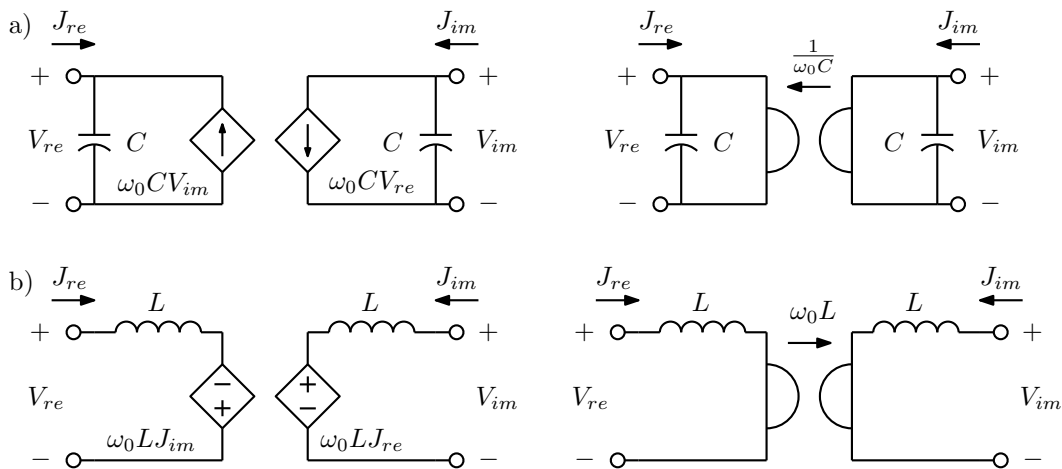


Figura 7.44: a) Equivalente de um capacitor. b) Equivalente de um indutor.

Um filtro racional de ordem 5 LC duplamente terminado seria transformado como na figura 7.45. Note-se que o filtro é ainda passivo, pois giradores não tem perdas. Uma implementação prática pode ser obtida por simulação de equações de estado, ou mais simplesmente pela técnica OTA-C, já que os giradores se reduziram a pares de transdutores.

Exemplo: A figura 7.46 mostra o comportamento de um filtro assim, realizando uma aproximação elíptica com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB com corte normalizado para em 1 rad/s, deslocada de 2 rad/s. As saídas real e imaginária são quase iguais na banda passante, e a diferença de fase entre as saídas é próxima de 90° , apenas na banda passante. A atenuação de 12 dB é devida à entrada real apenas, com quatro terminações. Os polos são realizados precisamente, mas os zeros de transmissão ficam bastante modificados, tornando talvez pouco vantajoso usar filtros racionais para essa aplicação. É possível gerar aproximações especiais otimizadas para filtros complexos em vez de deslocar uma aproximação clássica real. Tais aproximações teriam polos de um lado do eixo real e zeros de transmissão no outro lado, sendo então diretamente aproximações complexas. Nas frequências dos zeros de transmissão a defasagem entre as saídas real e imaginária seria de exatamente 90° .

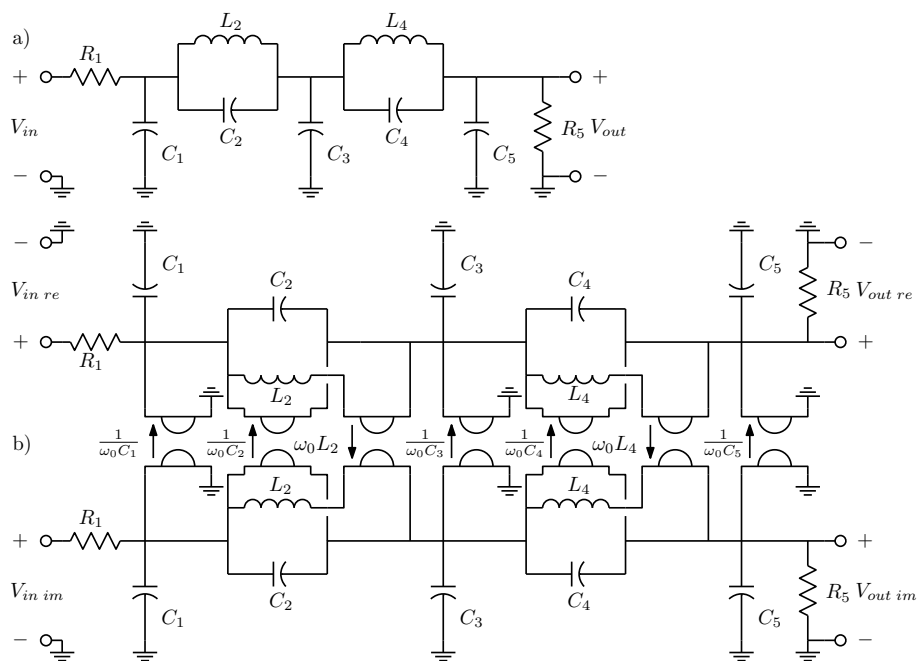


Figura 7.45: a) Filtro protótipo. b) Filtro complexo, duas cópias interligadas por giradores.

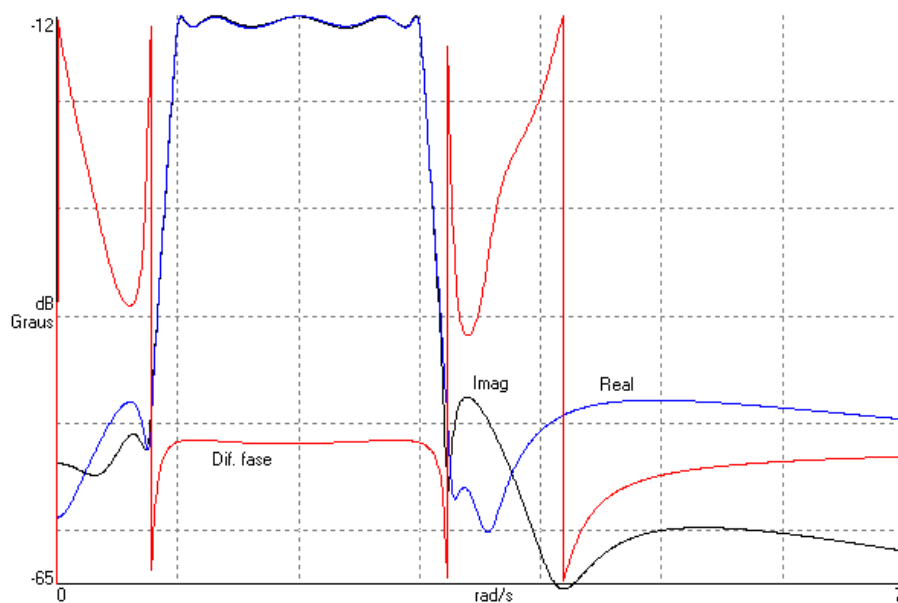


Figura 7.46: Resposta em frequência de um filtro complexo como o da figura 7.45. Saídas real e imaginária com entrada real e diferença de fase. Notar a simetria linear da banda passante.

Capítulo 8

Filtros para microeletrônica

QUANDO filtros ativos são construídos com técnicas de microeletrônica, alguns fatores tem que ser levados em conta: Ajustes são difíceis de realizar, e então são especialmente preferidos filtros de baixa sensibilidade, como os derivados de filtros passivos LC duplamente terminados. Indutores são indesejáveis, e praticamente irrealizáveis com qualidade razoável com valores acima de dezenas de nH, o que restringe o uso de filtros passivos a frequências de GHz. Existem significantes capacitâncias parasitas afetando os elementos, todos construídos por estruturas essencialmente planas sobre o substrato, isoladas deste por finas camadas isolantes. São então preferidas estruturas insensíveis a capacitâncias parasitas, como as simulações por equações de estado de filtros passivos. É possível dispensar esta exigência, mas então as capacitâncias parasitas devem ser bem conhecidas e absorvidas tanto quanto possível na estrutura do filtro. Um problema mais fundamental é a falta de correlação entre elementos de tipos diferentes, como resistores e capacitores. Todos os elementos do mesmo tipo são bem correlacionados entre si, mas as tolerâncias sobre seus valores absolutos são baixas. O efeito disto é que um filtro baseado em elementos de tipos diferentes fica com suas características de resposta em frequência com formas precisas, mas com um possível escalamento aleatório significativo em frequência. As técnicas descritas nas seções seguintes tratam estes problemas por diferentes técnicas. Filtros MOSFET-C e OTA-C operam em tempo contínuo, como os filtros analógicos já vistos. Filtros a capacitores chaveados e corrente chaveada são circuitos periodicamente chaveados, operando em tempo discretizado.

8.1 Filtros MOSFET-C

Filtros MOSFET-C adaptam as estruturas RC-amplificador operacional substituindo os resistores por transistores MOS usados como resistores. Como estes resistores são ajustáveis por uma tensão de controle, o filtro pode ser sintonizado em frequência apenas pela variação desta tensão de controle. Com os transistores operando na região ôhmica:

$$i_d = K \frac{W}{L} (2(v_{gs} - V_t)v_{ds} - v_{ds}^2) \approx K \frac{W}{L} 2(v_{gs} - V_t)v_{ds} \therefore R = \frac{v_{ds}}{i_d} = \frac{L}{W} \frac{1}{2K(v_{gs} - V_t)}$$

Um integrador fica então como na figura 8.1, ajustável na frequência pela tensão de controle v_{ctrl} .

$$v_o = -\frac{1}{RC} \int v_{in} dt = -\frac{1}{C} \int K \frac{W}{L} 2(v_{ctrl} - V_t)v_{in} dt$$

Este integrador é significantemente não linear. A máxima tensão de entrada que ainda mantém o transistor na região ôhmica é $v_{in} = v_{ctrl} - V_t$. Para pouca distorção deve ser mantida em uma fração deste valor. Uma forma de reduzir a não linearidade é usar estruturas balanceadas, com duas cópias do

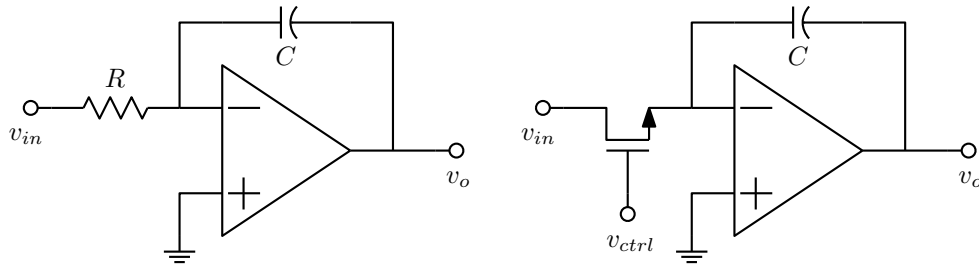


Figura 8.1: Integrador inversor realizado com transistor MOS substituindo o resistor.

sinal com polaridades opostas [30]. Os elementos RC são todos duplicados, e os amplificadores substituídos por versões com saída balanceada, gerando duas saídas com polaridades opostas, como na figura 8.2¹. Os integradores assim construídos integram a diferença das duas correntes de entrada i_1 e i_2 com ganho $-\frac{1}{2C}$. É simples verificar que a subtração das correntes cancela a não linearidade:

$$\begin{aligned}
 i_1 &= K \frac{W}{L} (2(v_{ctrl} - v_x - V_t)(v_{in} - v_x) - (v_{in} - v_x)^2) \\
 i_2 &= K \frac{W}{L} (2(v_{ctrl} - v_x - V_t)(-v_{in} - v_x) - (-v_{in} - v_x)^2) \\
 i_1 - i_2 &= K \frac{W}{L} 4(v_{ctrl} - V_t)v_{in}
 \end{aligned}$$

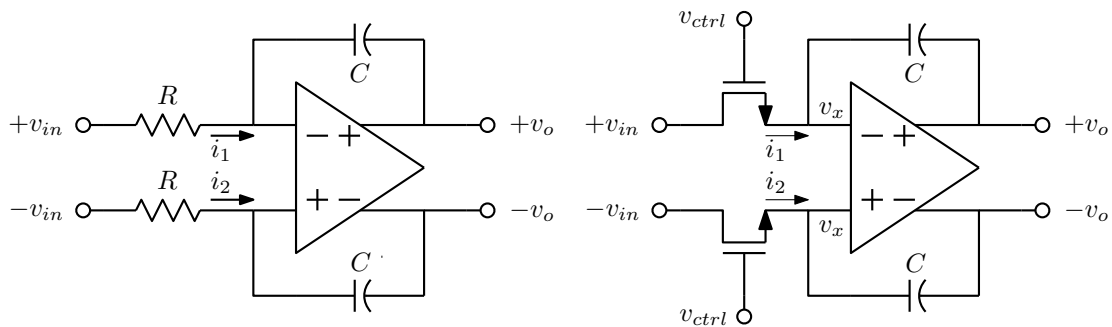


Figura 8.2: Integrador balanceado realizado com transistores MOS substituindo os resistores.

O integrador realiza então a mesma função da versão não balanceada, e para dimensionar o circuito basta considerar a equivalência entre resistores e MOSFETS:

$$v_o = -\frac{1}{2C} \int (i_1 - i_2) dt = -\frac{1}{RC} \int v_{in} dt = -\frac{1}{C} K \frac{W}{L} 2(v_{ctrl} - V_t) \int v_{in} dt$$

Filtros RC-ativos baseados em integradores podem ser diretamente convertidos para a forma MOSFET-C. O balanceamento também elimina a necessidade de integradores não inversores. Quando uma inversão seria requerida, o sinal com polaridade oposta é usado. A preservação das sensibilidades do protótipo é

¹Um amplificador assim é equivalente a um amplificador operacional ideal gerando a saída positiva seguido de um inversor que gera a saída negativa. O inversor pode ser construído com outro amplificador operacional e dois transistores MOS iguais como resistores. Assim a distorção é cancelada.

razoável, e o circuito é razoavelmente insensível a capacitâncias parasitas. Não completamente, pois as tensões de modo comum nas estradas dos amplificadores não são nulas, mas se desviam do zero devido às não-linearidades dos transistores.

Exemplo: Seja obter um filtro MOSFET-C realizando uma simulação de um filtro elíptico de terceira ordem. A figura 8.3 mostra a estrutura. Um protótipo normalizado é usado, a versão RC-ativa normal como a da figura 2.35 é desenhada, e então a versão balanceada é derivada, como duas cópias da rede, com inversores substituídos por conexões ao lado invertido. A estrutura é então desnormalizada e transistores são dimensionados para o papel de resistores, levando em conta as resistências médias necessárias e o nível de sinal com o que o filtro vai operar.

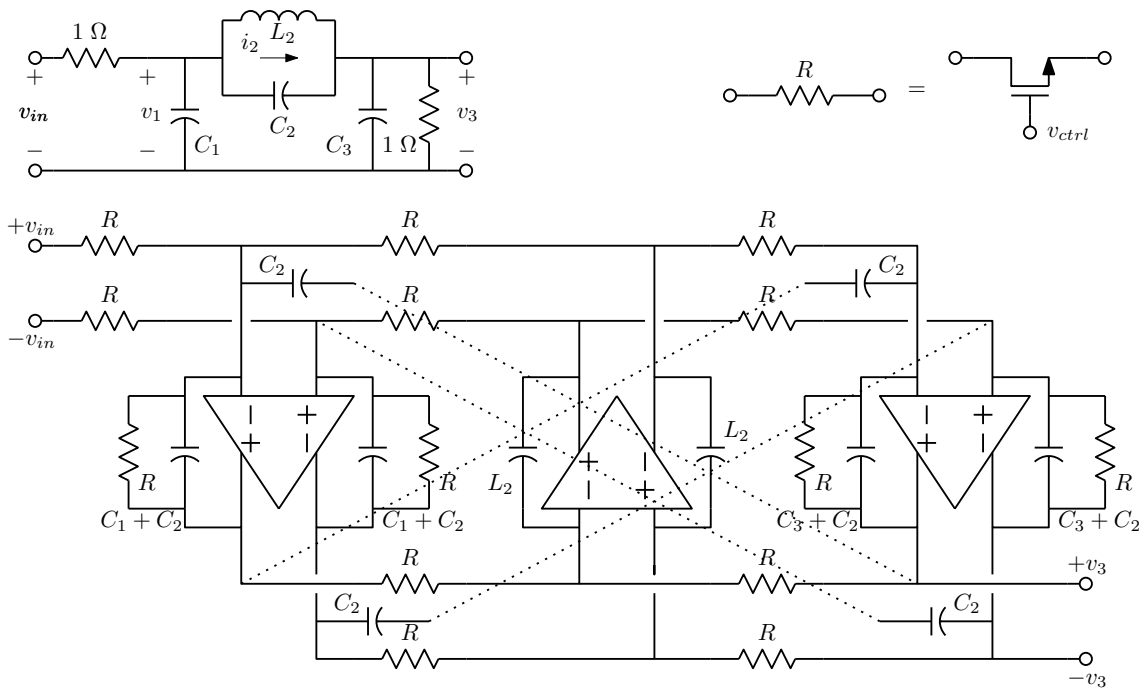


Figura 8.3: Estrutura de um filtro balanceado MOSFET-C de terceira ordem.

É possível dispensar a estrutura balanceada, e também a dependência de V_t , pelo uso de quatro transistores MOS como resistores em vez de apenas dois nas entradas dos integradores, como mostrado na figura 8.4 [31]². A diferença entre as duas correntes de entrada se torna:

$$i_1 = K \frac{W}{L} (2(v_a - v_x - V_t)(v_1 - v_x) - (v_1 - v_x)^2) + K \frac{W}{L} (2(v_b - v_x - V_t)(v_2 - v_x) - (v_2 - v_x)^2)$$

$$i_2 = K \frac{W}{L} (2(v_a - v_x - V_t)(v_2 - v_x) - (v_2 - v_x)^2) + K \frac{W}{L} (2(v_b - v_x - V_t)(v_1 - v_x) - (v_1 - v_x)^2)$$

$$i_1 - i_2 = 2K \frac{W}{L} (v_a - v_b)(v_1 - v_2)$$

Na versão equivalente com resistores tem-se:

²Filtros “MRC”, de “MOS resistive circuit”.

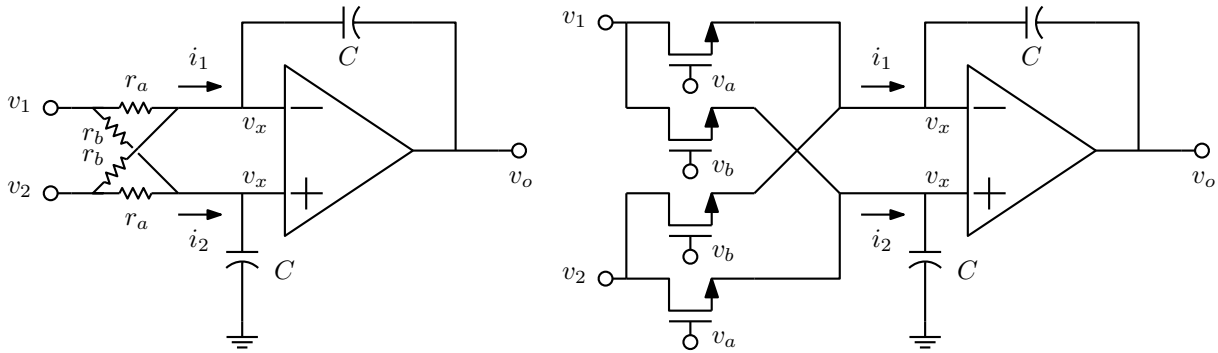


Figura 8.4: Integrador MOSFET-C com quatro resistores, ou quatro transistores.

$$i_1 - i_2 = \frac{v_1 - v_x}{r_a} + \frac{v_2 - v_x}{r_b} - \left(\frac{v_1 - v_x}{r_b} + \frac{v_2 - v_x}{r_a} \right) = \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) (v_1 - v_2)$$

Comparando as expressões tem-se como dimensionar os transistores. Note-se que v_x e V_t não importam, mas devem ser considerados com seus valores nominais no dimensionamento dos transistores:

$$\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} = 2K \frac{W}{L} (v_a - v_b) \quad \therefore \quad r_a = \frac{L}{2KW(v_a - v_x - V_t)}; \quad r_b = \frac{L}{2KW(v_b - v_x - V_t)}$$

O integrador realiza:

$$v_o = -\frac{1}{C} \int (i_1 - i_2) dt = -\frac{1}{C} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \int (v_1 - v_2) dt = -\frac{1}{C} 2K \frac{W}{L} (v_a - v_b) \int (v_1 - v_2) dt$$

Exemplo: Seja realizar o mesmo filtro elíptico de terceira ordem do exemplo anterior. Neste caso pode-se escrever o sistema de equações de estado modificado sem preocupação com os sinais das integrações, já que os integradores podem ter qualquer polaridade:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{C_1 + C_2} \int \left(\frac{v_{in}}{R_1} - \frac{v_1}{R_1} - i_2 \right) dt + \frac{C_2}{C_1 + C_2} v_3 \\ i_2 &= \frac{1}{L_2} \int (v_1 - v_3) dt \\ v_3 &= \frac{1}{C_2 + C_3} \int \left(i_2 - \frac{v_3}{R_3} \right) dt + \frac{C_2}{C_2 + C_3} v_1 \end{aligned}$$

Os acoplamentos diretos que geravam os capacitores cruzados no caso da figura 8.3 podem ser realizados como na figura 8.5. A estrutura resultante é a da figura 8.6. Os grupos de 4 resistores foram orientados como nas equações, com o primeiro integrador sendo feito com dois blocos, pois exige três entradas. Novamente, um protótipo normalizado com terminações R_1 e R_3 unitárias é usado. Os resistores r_a e r_b podem ser dimensionados tais que $\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} = 1$ antes da desnormalização. As tensões de controle tem que ser diferentes.

Esta estrutura não preserva sensibilidades perfeitamente, embora sem maiores problemas, e é sensível a capacitâncias parasitas, pois as tensões de modo comum nas entradas dos amplificadores não são nulas nem na versão linear.

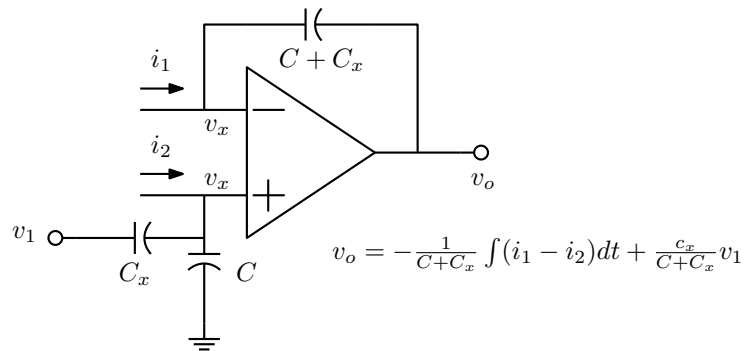


Figura 8.5: Entrada somadora em um integrador.

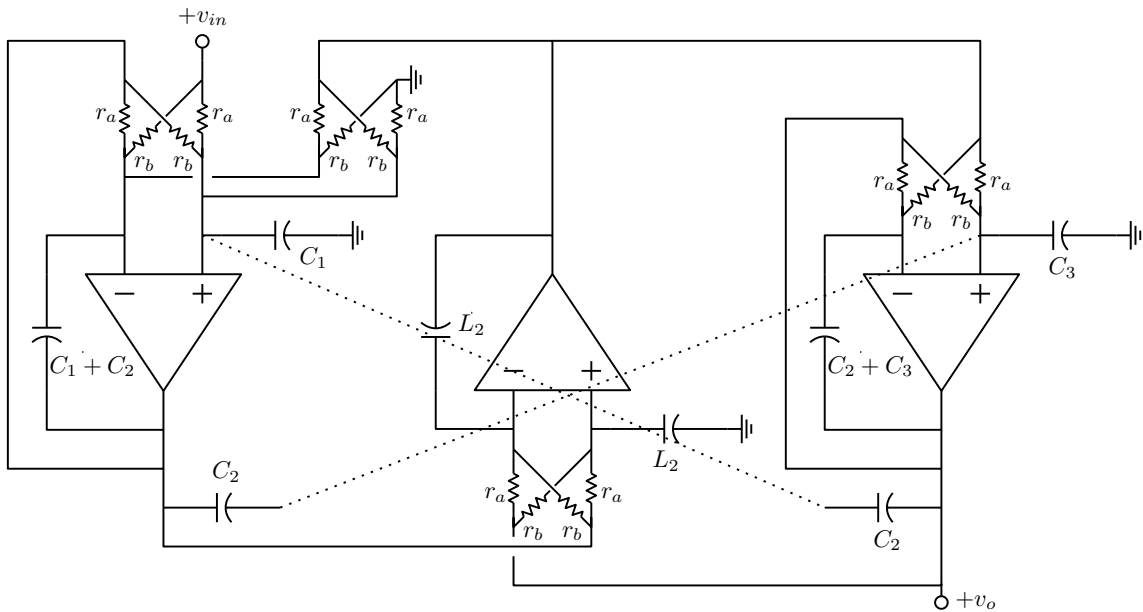


Figura 8.6: Filtro de terceira ordem com zeros finitos, realização com integradores com quatro resistores, ou transistores.

8.1.1 Frequências naturais de modo comum

A estrutura balanceada da figura 8.3 realiza um filtro de terceira ordem com uma estrutura de sexta ordem. O circuito tem 10 capacitores, mas os amplificadores balanceados forçam tensões sobre os capacitores cruzados iguais às sobre os capacitores que os realimentam, eliminando quatro ordens da complexidade, considerando a versão linear da estrutura. Três das frequências naturais são os polos do filtro realizado. As outras três correspondem a tensões em modo comum que podem aparecer nas entradas dos amplificadores. Estas tensões não afetam o comportamento ideal do filtro, correspondendo às tensões v_x consideradas na análise não linear. A localização destas frequências naturais pode ser obtida considerando-se sinais diferenciais nulos, o que anula as tensões nas saídas dos amplificadores. Observa-se então que os capacitores que realimentam os amplificadores se descarregam pelos resistores R ligados às

entradas dos amplificadores. Resultam três frequências naturais no semieixo real negativo:

$$s_1 = -\frac{1}{(2C_2 + C_1)R//R//R}$$

$$s_2 = -\frac{1}{L_2R//R}$$

$$s_3 = -\frac{1}{(2C_2 + C_3)R//R}$$

No caso da estrutura da figura 8.6, também a ordem de complexidade da estrutura é seis, pois a rede tem oito capacitores mas os “nullators” nas entradas dos amplificadores completam dois ciclos capacitivos independentes, reduzindo a ordem de complexidade em dois. As frequências naturais extra também correspondem às tensões v_x em modo comum nas entradas dos amplificadores. Suas localizações podem ser obtidas zerando os sinais normais do filtro, o que zera as tensões nas saídas dos amplificadores. Observando por onde os capacitores se descarregam resultam também frequências naturais no semieixo real negativo:

$$s_1 = -\frac{1}{(C_1 + C_2)r_a//r_b//r_a//r_b}$$

$$s_2 = -\frac{1}{L_2r_a//r_b}$$

$$s_3 = -\frac{1}{(C_2 + C_3)r_a//r_b}$$

Nestes casos não surgem potenciais problemas de estabilidade. Sempre que circuitos de ordem maior que o necessário são usados é importante realizar esta verificação, inclusive considerando capacitâncias parasitas, que nos casos analisados não provocam aumento de ordem.

8.2 Sintonia automática

Os filtros MOSFET-C são sintonizáveis em frequência através das tensões de controle, e isto deve ser usado para compensar a falta de correlação entre capacitâncias e resistências. É possível usar técnicas de “mestre-escravo”, onde um filtro básico é ajustado e o filtro principal, ou vários filtros, feitos com componentes casados, ficam também ajustados. Também é possível sintonizar um filtro “off-line”, retirando-o de sua operação normal temporariamente enquanto ele é ligado a um sistema de calibração. As tensões de controle seriam então geradas digitalmente e aplicadas através de conversores digital-analógico. As técnicas mestre-escravo podem ser realizadas apenas com circuitos analógicos.

8.2.1 Sintonia com oscilador

Esta técnica de sintonia mestre-escravo usa como mestre um oscilador controlado a tensão³ realizado com componentes similares aos dos filtros a calibrar. Um oscilador pode ser criado como um biquad de Q infinito, que atrasos na resposta dos amplificadores tornam ligeiramente instável. A saída do oscilador é comparada com um oscilador externo de frequência f_0 através de um comparador de fase, e a saída deste é filtrada e aplicada como tensão de controle. O circuito é então similar ao de um “phase-locked loop”, que procura fazer o oscilador oscilar na frequência f_0 . Uma possível estrutura é mostrada na figura 8.7, onde uma porta lógica XOR é usada como comparador de fase. A tensão de controle normal seria próxima ao centro da faixa de tensão gerada pela porta.

³VCO, do inglês “voltage-controlled oscillator”.

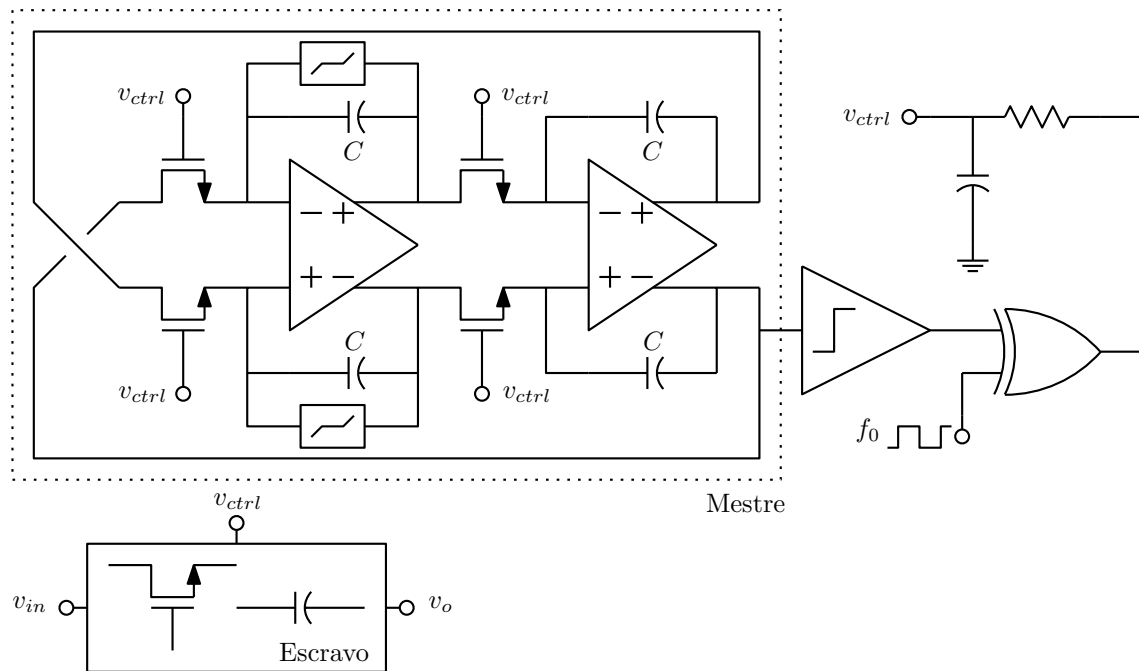


Figura 8.7: Circuito de sintonia automática usando oscilador controlado a tensão.

Inconveniências desta técnica são a necessidade de controlar a amplitude da oscilação do oscilador, e de garantir que a oscilação ocorra. Normalmente é necessário apenas acrescentar alguma forma de limitação suave e confiar que o oscilador vai ficar instável (como resistores não lineares em paralelo, como pares de diodos, com um dos pares de capacitores, como mostrado). Se a limitação for muito abrupta a distorção causará descasamento entre o mestre e os escravos. Também existe problema de interferência do oscilador nos filtros escravos, o que pode ser minimizado colocando-se a frequência da oscilação fora da banda passante dos filtros, mas não muito para bom casamento. O circuito opera de acordo com a dinâmica de um “phase-locked loop”, que é de segunda ordem se um filtro RC for usado. A resposta a uma mudança abrupta da frequência padrão pode ser oscilatória se o filtro de malha (a rede RC) for lento.

8.2.2 Sintonia com filtro controlado a tensão

É possível eliminar os vários problemas do oscilador controlado a tensão com um filtro controlado a tensão⁴, como mostrado na figura 8.8. O filtro é um biquad de Q alto feito com técnica MOSFET-C, e o comparador de fase é usado para comparar a entrada e a saída do filtro. Se for usada a saída passa-faixa, um comparador de fase com saída nula com fase nula deve ser usado⁵. Com a saída passa-baixas um comparador de fase com porta XOR pode ser usado, pois sua saída tem média nula para $\pm 90^\circ$ de defasagem. O circuito procura então ajustar a tensão de controle de forma a que a frequência de ressonância do biquad fique próxima à do sinal padrão aplicado. Com um filtro de malha tipo integrador o erro tenderia a zero, sem problemas de estabilidade. A dinâmica do circuito é essencialmente de primeira ordem, e então uma mudança repentina da frequência padrão não gera estabilização oscilatória. O sinal

⁴VCF, do inglês “voltage-controlled filter”.

⁵Como o comparador II do circuito integrado CMOS 4046.

padrão pode ser senoidal, como mostrado. Uma onda quadrada também funcionaria.

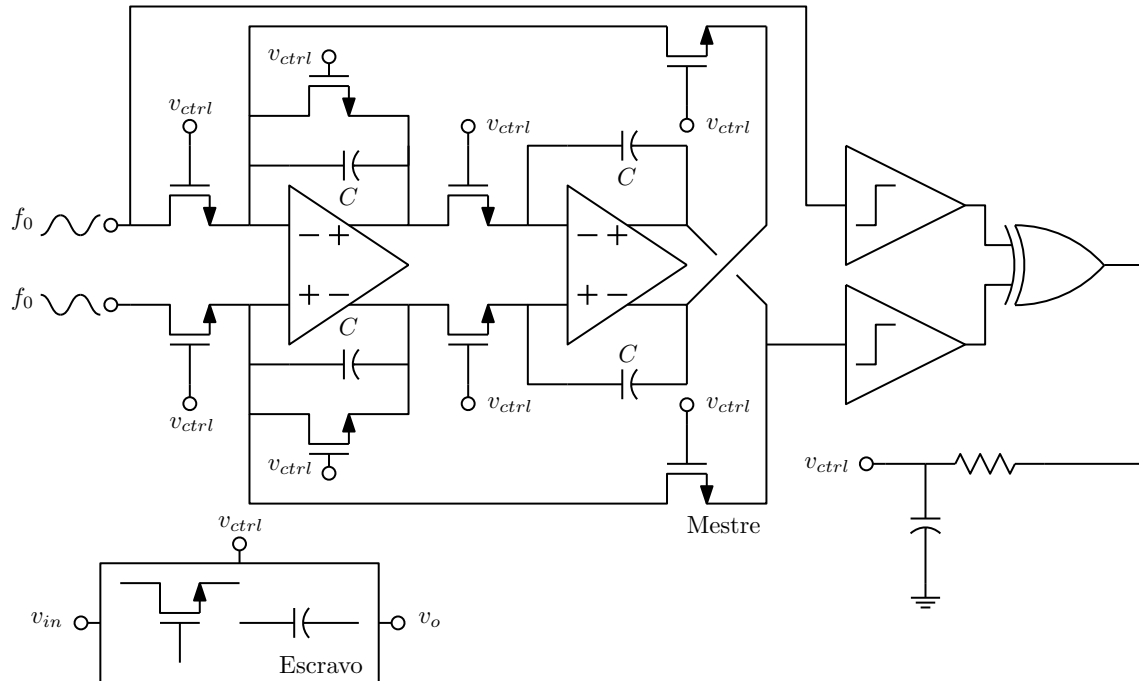


Figura 8.8: Circuito de sintonia automática usando filtro controlado a tensão.

8.3 Filtros OTA-C

O problema da falta de correlação entre capacitâncias e resistências pode também ser tratado pelo uso de transdutores ajustáveis no lugar de resistores. Os transdutores podem ser realizados como amplificadores operacionais de transcondutância⁶, que geram uma corrente de saída proporcional a uma tensão, usualmente diferencial, de entrada. Um filtro OTA-C [40] já foi usado para ilustrar a simulação de equações de estado, na figura 2.38. Com as transcondutâncias ajustadas simultaneamente, o filtro pode ser sintonizado em frequência. A sintonia automática usaria versões OTA-C dos circuitos de sintonia já mostrados. Nos filtros OTA-C, os elementos usados são apenas os da figura 8.9, transdutores com transcondutância ajustável e capacitores. Assume-se que ambos são lineares, e que os transdutores tem impedâncias infinitas de entrada e de saída. Um típico OTA operando em classe AB é mostrado na figura 8.10. Sua transcondutância é igual à do par diferencial $M_1 - M_2$, polarizado com a metade da corrente I por M_9 , que é ajustada pela tensão de controle v_{ctrl} . O transcondutor não é linear, mas a faixa de tensão de entrada onde a linearidade é razoável depende das dimensões dos transistores do par diferencial de entrada. Cascodes M_{10} e M_{11} são usados para aumentar a impedância de saída, se necessário.

Com estes elementos, é simples obter integradores, como na figura 8.11, resistores, como na figura 8.12, e usando giradores feitos com conjuntos de OTAs, indutores simulados, como na figura 8.13.

Com o uso das equivalências pode-se obter estruturas para filtros OTA-C diretamente de estruturas passivas. Um filtro bassa-baixas de ordem 5 já foi mostrado na figura 2.38, onde pode ser observado que

⁶OTA, do inglês “operational transconductance amplifier”.

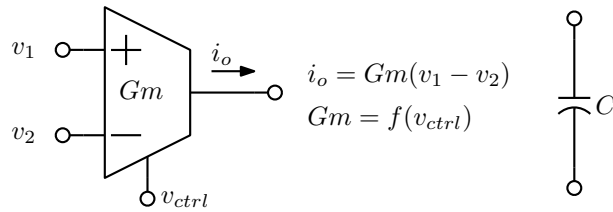


Figura 8.9: Elementos de um filtro OTA-C. Transcondutores ajustáveis e capacitores.

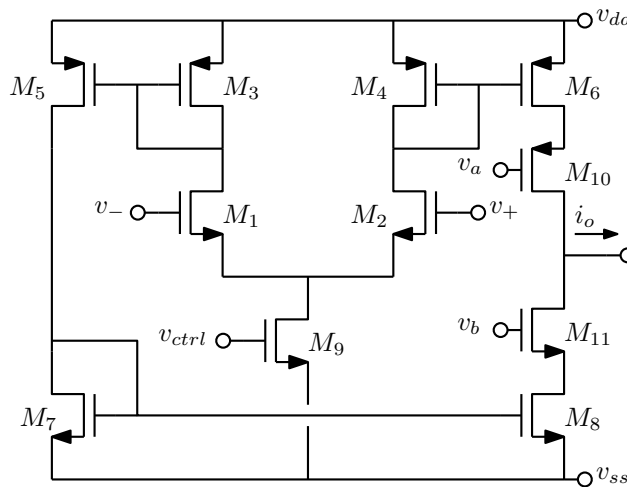


Figura 8.10: OTA em classe AB.

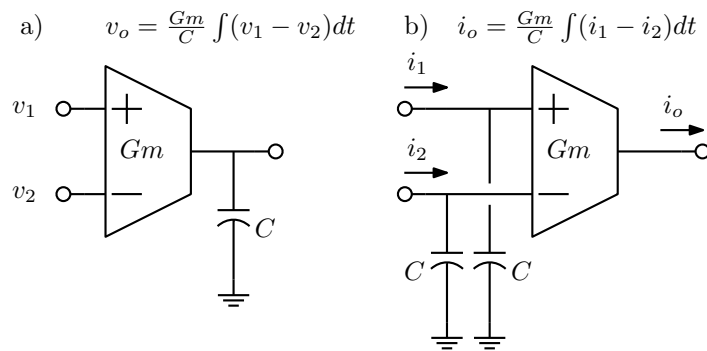


Figura 8.11: Integradores OTA-C. a) Em modo de tensão. b) Em modo de corrente.

a entrada usa o equivalente de uma fonte de tensão com resistor em série, a rede capacitiva fica como no protótipo, os dois indutores suspensos compartilham o OTA central, e para a terminação de saída foi aproveitada a entrada negativa do OTA que faz o indutor da direita. Filtros assim são sensíveis a capacitâncias parasitas, que devem ser cuidadosamente levadas em conta para uma realização precisa. Há também um problema de preservação imperfeita de sensibilidades da rede passiva. Erros nos três OTAs

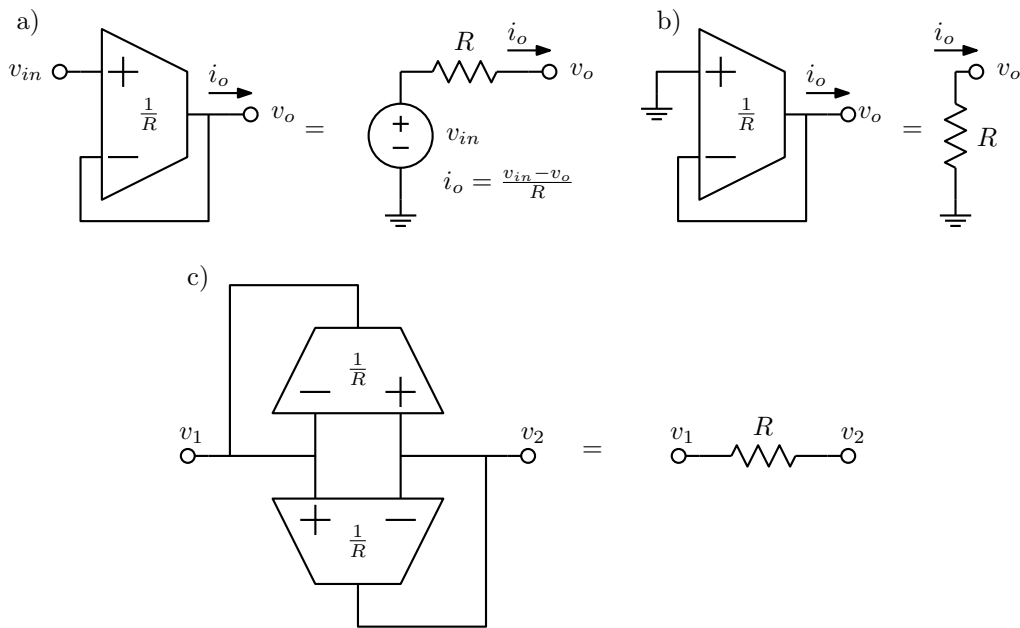


Figura 8.12: Circuitos resistivos OTA-C. a) Fonte de tensão com resistor em série. b) Resistor aterrado. c) Resistor suspenso (raramente necessário).

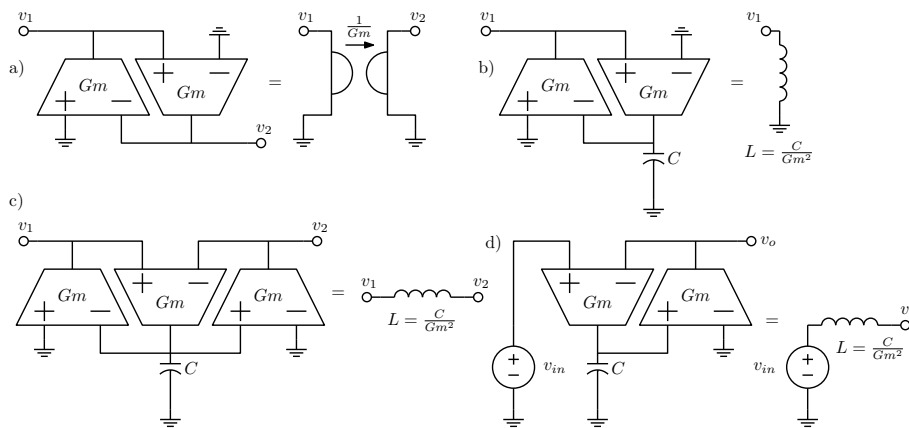


Figura 8.13: a) Girador e (b, c) indutores simulados OTA-C, incluindo uma fonte de tensão em série com indutor (d), obtida pela omissão do girador da esquerda no indutor suspenso (c).

que alimentam a rede capacitiva a partir da rede indutiva simulada não tem correspondente no protótipo. Aqueles OTAs devem então ser bem casados entre si. O problema não ocorre se for realizado um filtro polinomial, pois a ausência dos capacitores suspensos mapeia erros naqueles três OTAs como erros em elementos passivos. A condição para boa preservação de sensibilidades é que a estrutura deve ser tal que cada OTA alimente um circuito independente aterrado. Assim um erro na sua transcondutância equivale a um erro no nível de impedância na rede ligada a sua saída.

8.3.1 Filtros OTA-C usando giradores multiporta

Uma interessante forma sistemática para a geração de estruturas OTA-C envolve o conceito do girador multiporta, ou “Conversor de tensão de porta para corrente de terminal”[45]. O uso da técnica é ilustrado no exemplo a seguir.

Exemplo: Seja obter uma estrutura OTA-C para um filtro passa-faixa irregular como o da figura 8.14a. Primeiramente a rede indutiva é desconectada, portas ligando seus terminais são identificadas, e um circuito dual é gerado, com cada porta gerando um terminal no dual, como na figura 8.14b.

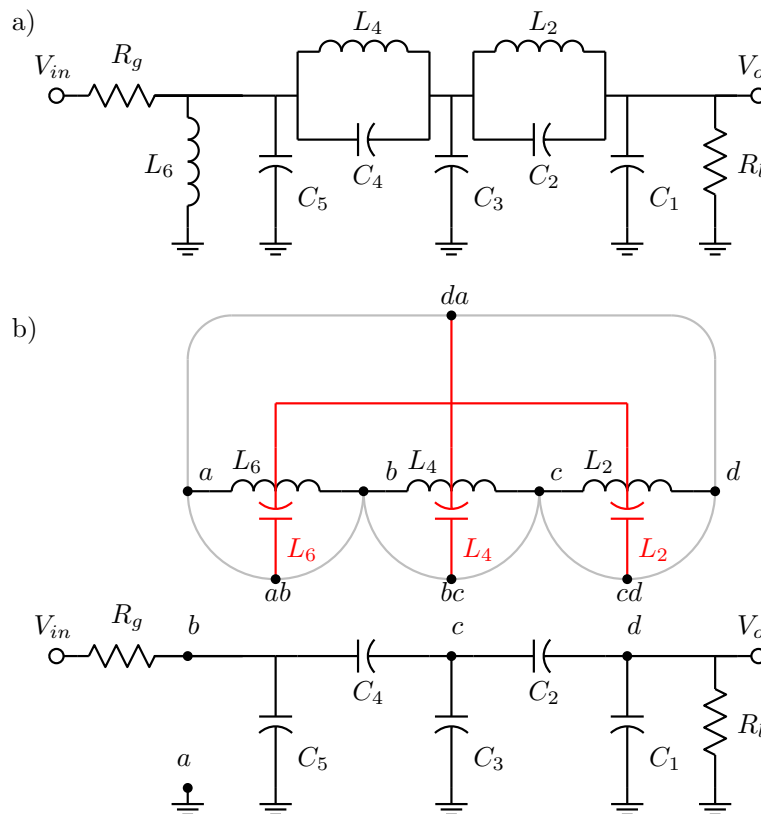


Figura 8.14: a) Filtro passa-faixa irregular. b) Dualização da rede indutiva e suas quatro portas.

A seguir, a rede dualizada é conectada à rede original por um girador generalizado, como na figura 8.15a. O girador multiporta, representado como mostrado, é um anel fechado de OTAs idênticos, no caso normalizados, com direções alternadas. Os pares de nós $x_1 - x_2$ e $y_1 - y_2$ são interconectados, fechando o anel⁷. Os terminais de um lado se conectam aos terminais da rede original e os do outro lado aos terminais da rede dualizada, de acordo com a ordem das portas. O efeito é de conectar o dual da rede dualizada à rede original restante, o que realiza a função da rede original completa. No caso, um girador de quatro portas é requerido pois as redes tem quatro portas cada. A rede dualizada está suspensa, e deve ser referenciada a alguma tensão da rede original restante. O óbvio é aterrar o nó da para obter o circuito mais prático, com capacitores aterrados simulando os indutores, mas um nó qualquer da rede dualizada pode ser conectado a um nó qualquer da rede original restante gerando um circuito também

⁷Um girador simples é o caso com duas portas.

funcional⁸. OTAs do girador multiporta que ficam com a saída aterrada são então eliminados, no caso os dois à direita. O circuito redesenhado com OTAs toma a forma da figura 8.15b, onde foi assumido que $R_l = 1 \Omega$ na estrutura normalizada, e o OTA que o realizaria foi unido com a ponta livre do girador multiporta que seria aterrada, nó *da*.

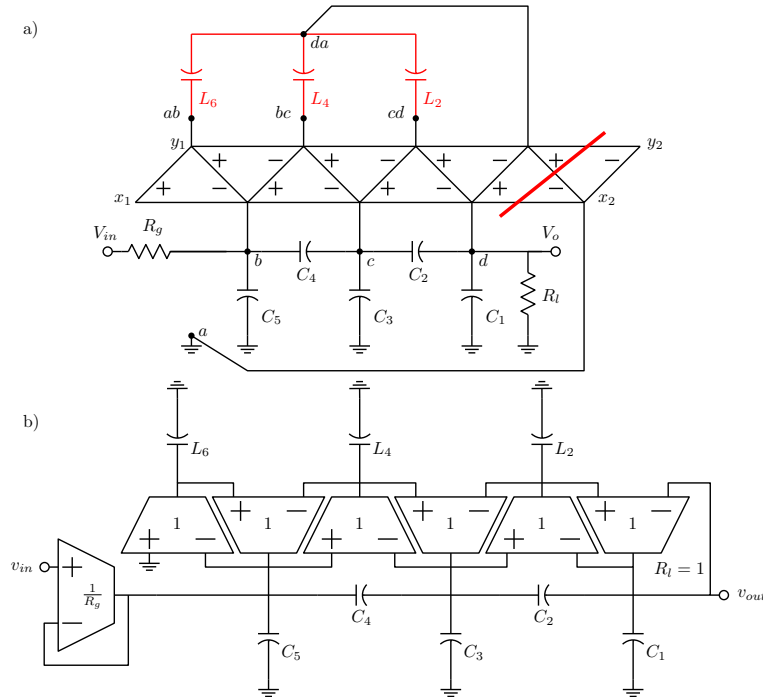


Figura 8.15: a) Conexão da rede original com a dualizada por um girador multiporta. b) Estrutura normalizada OTA-C correspondente.

O conceito da dualização pode ser estendido a redes contendo capacitores e resistores, com estes elementos movidos da rede original para a rede dualizada. Assim a saída de um filtro de ordem par pode ser movida para a parte dualizada, resultando um filtro com terminações iguais nos casos em que as terminações na estrutura passiva normalizada são resistências de valores inversos⁹. Redes de capacitores podem ser transformadas em redes de indutores na rede dualizada, e então dualizadas novamente. Isto pode permitir a geração de filtros com todos os capacitores aterrados, mas é preciso ter cuidado em não quebrar ciclos capacitivos no processo, ou são geradas redes com nós com impedância indutiva em alta frequência, gerando problemas de estabilidade devido à presença de capacitâncias parasitas e OTAs com resposta em frequência limitada [46].

8.3.2 Eliminação de capacitores suspensos

Estruturas OTA-C derivadas de filtros passa-baixas racionais apresentam capacitores suspensos, que podem ser inconvenientes para realizações em microeletrônica, por apresentarem ao menos uma grande capacitância parasita, da placa inferior para o substrato. Esta capacitância tem que ser levada em conta

⁸ Talvez com más características de sensibilidade.

⁹ Estruturas fisicamente assimétricas, como as de filtros de Chebyshev duplamente terminados de ordens pares ou outros filtros irregulares, como o do exemplo, que também usualmente gera terminações diferentes.

no projeto, com a complicação de ser construída em outro passo do processo de fabricação, sendo portanto mal correlacionada com as capacitâncias do filtro¹⁰. É possível eliminar capacitores suspensos de várias formas, usando OTAs para realizar as mesmas operações. Uma forma bastante eficaz de fazer isto é usar o “equivalente Norton controlado a corrente” de uma rede π capacitiva [47]¹¹, como na figura 8.16.

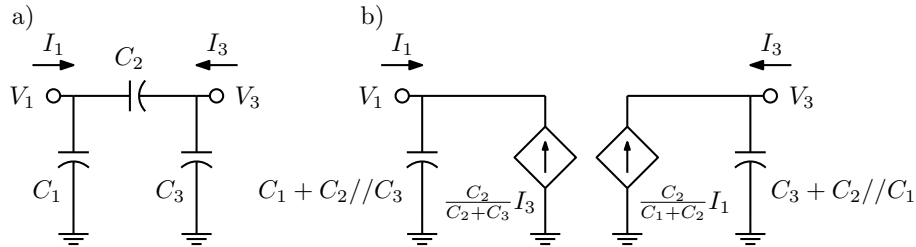


Figura 8.16: a) Ciclo simples de capacitores. b) Equivalente Norton controlado a corrente.

Uma implementação com OTAs é relativamente simples, requerendo OTAs com duas saídas, como na figura 8.17.

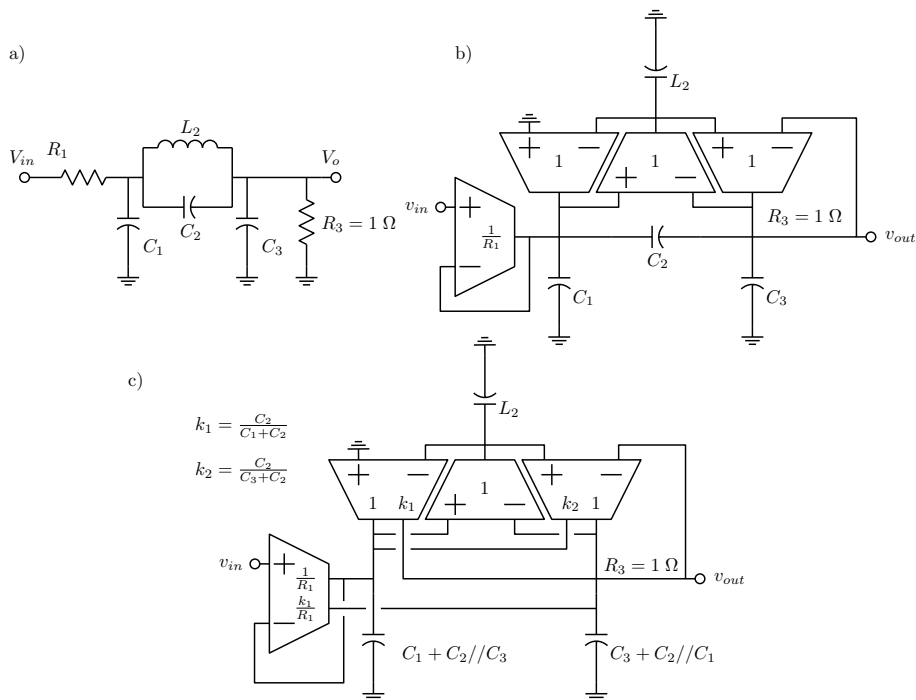


Figura 8.17: a) Filtro passivo com ciclo capacitivo simples. b) Filtro OTA-C. c) Versão com o ciclo capacitivo eliminado.

¹⁰É possível construir um capacitor suspenso como dois capacitores iguais em paralelo, mas com a placa superior de um ligada na inferior do outro, e vice-versa. Assim se distribui as capacitâncias parasitas, reduzidas à metade, igualmente entre as duas placas do capacitor.

¹¹Ou um equivalente Norton em um modelo de parâmetros Z.

Esta técnica é aplicável apenas a redes com ciclos capacitivos simples. Em casos com mais ciclos capacitivos acoplados, como em filtros passa-baixas racionais de ordem 5 que geram dois ciclos, a ideia do equivalente requereria um circuito excessivamente complicado, montado com OTAs com três saídas. A dispersão de valores de transcondutâncias seria grande e a preservação de sensibilidades do protótipo seria ruim. É melhor então gerar aproximações modificadas para a geração de redes adequadas, com menos zeros finitos de transmissão, ou usar realizações passivas alternativas, sempre com ciclos capacitivos simples.

Exemplo: Uma estrutura passiva que sempre gera ciclos capacitivos simples na realização OTA-C é a da “lattice” desbalanceada [48]. A conversão para a forma OTA-C de uma realizando um filtro passa-baixas racional de ordem 5 é mostrada na figura 8.18¹². Com o aterramento de qualquer nó da rede dualizada, no caso o nó ab , os dois ciclos capacitivos podem ser eliminados, resultando a forma da figura 8.19.

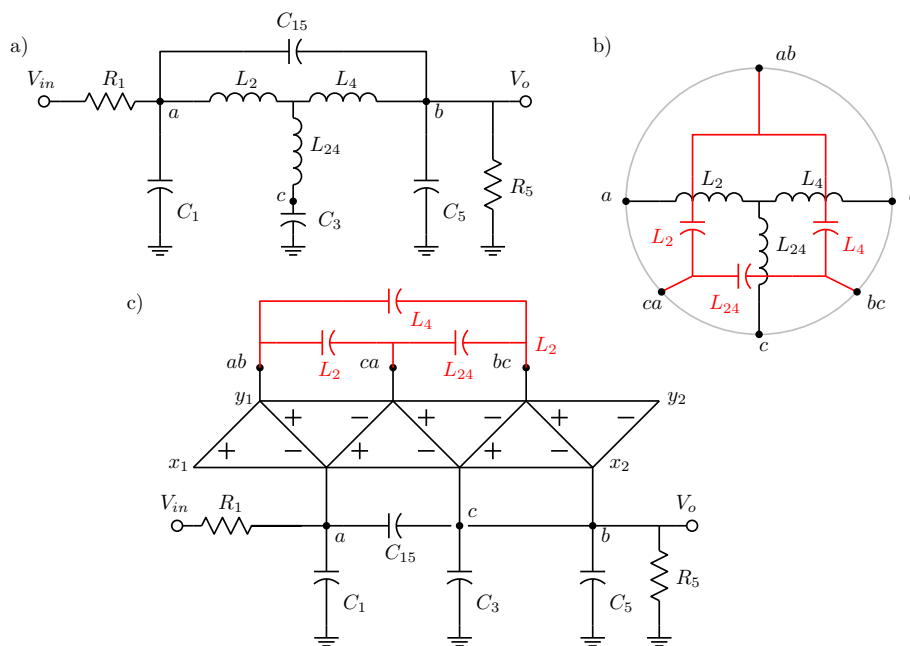


Figura 8.18: a) Filtro passivo em “lattice” desbalanceada. b) Dualização da rede indutiva. c) Estrutura com girador multiporta.

A realização em “lattice” desbalanceada tem sensibilidades altas na banda de rejeição. A forma OTA-C introduz mais problemas devido aos pares de OTAs que alimentam os dois ciclos capacitivos, que devem ser bem casados. A forma com o ciclo eliminado tem sensibilidades ainda maiores, como mostrado na figura 8.20¹³. A melhor forma em termos de sensibilidade é sempre a do filtro polinomial, onde todos os capacitores estão aterrados, desde que a seletividade requerida permita.

¹²Notar que as polaridades do girador multiporta foram invertidas, para permitir a absorção do resistor de terminação da saída.

¹³Análise no programa Sensi.

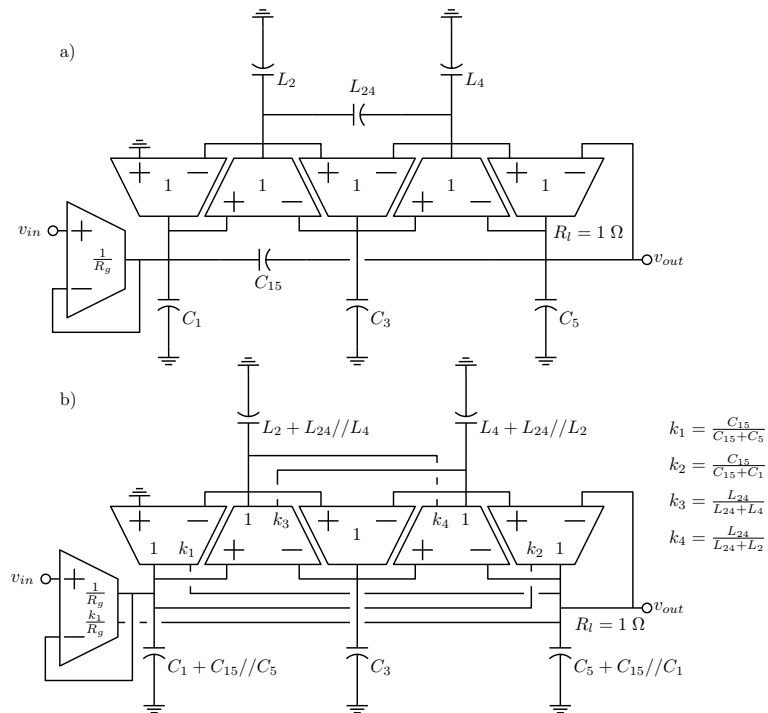


Figura 8.19: a) Filtro OTA-C realizando uma “lattice” desbalanceada. b) Versão com ciclos capacitivos eliminados.

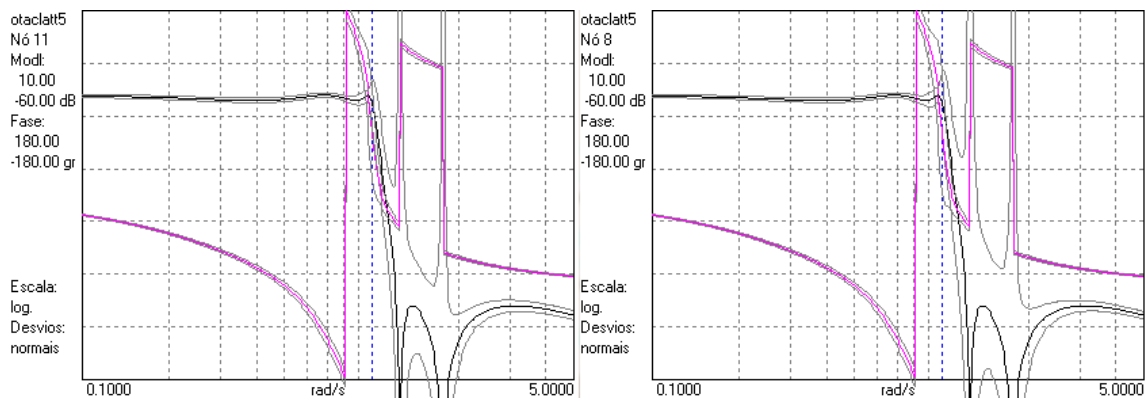


Figura 8.20: Respostas em frequência com desvios estatísticos para os filtros da figura 8.19, para 5% de variabilidade nos componentes. À esquerda a versão com ciclos capacitivos, à direita a versão com os ciclos eliminados. Comparar com a mesma figura para redes passivas, 6.1.

8.3.3 Escalamento de faixa dinâmica em filtros OTA-C

Estruturas normalizadas podem sempre ser geradas com OTAs unitários, talvez a menos de um para simulação de filtros LC com terminações diferentes, e as estruturas copiam as características de faixa dinâmica dos protótipos passivos. A simulação de uma rede LC duplamente terminada passa-baixas

com terminações iguais unitárias gera ganho de tensão $1/2$ da entrada para todas as tensões e correntes simuladas em baixa frequência, o que pode já ser suficiente para cobrir ressonâncias dentro da banda passante. Correções de faixa dinâmica podem ser feitas como em [40]. No caso mais simples de estruturas com capacitores aterrados, para dividir a tensão sobre um capacitor aterrado por M sem afetar o resto do circuito, basta dividir por M as transcondutâncias dos OTAs suprindo corrente ao capacitor e multiplicar por M as transcondutâncias dos OTAs com entradas ligadas ao capacitor. Esta última operação pode requerer que OTAs com entrada diferencial sejam partidos em dois com entradas simples e transcondutâncias diferentes. O caso onde existam redes capacitivas com capacitores suspensos ligados aos nós a serem equalizados é mais complexo, mas também mostrado em [40].

Exemplo: Seja dividir por M_3 a tensão nodal v_3 de um filtro passa-baixas racional de ordem cinco como o da figura 8.21a. O usual seria $M_3 = 0.5$ para dobrar o nível de saída sem alterar os outros. A rede capacitiva tem que ser alterada de forma a multiplicar por M_3^2 o nível de admitância do nó de v_3 , e todos os OTAs com entradas ou saídas ligadas a v_3 devem ter suas transcondutâncias multiplicadas por M_3 . Os que fornecem corrente para que v_3 fique dividida por M_3 , e não M_3^2 . Os que tem entrada lá para compensar a divisão da tensão. A alteração de nível de admitância é feita multiplicando-se por M_3 a coluna e a linha 3 da matriz nodal de capacitâncias da rede capacitiva original¹⁴:

$$\begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & C_1 + C_2 + C_3 & -C_4 \\ 0 & -C_4 & C_4 + C_5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 & 0 \\ -C_2 & C_1 + C_2 + C_3 & -M_3 C_4 \\ 0 & -M_3 C_4 & M_3^2 (C_4 + C_5) \end{bmatrix}$$

A matriz modificada é então interpretada como uma nova rede capacitiva¹⁵. O resultado é o da figura 8.21b, já com os OTAs modificados. Procedimentos similares podem ajustar os níveis nos outros dois nós. O ajuste dos níveis correspondentes às correntes nos indutores não requer alterações de nível de admitância, pois existem apenas capacitores simples aterrados, embora ela possa ser feita também. As redes escaladas ficam com OTAs sem entrada diferencial¹⁶ e com transcondutâncias diferentes, complicando a estrutura e causando problemas de casamento de valores, tornando o escalamento em algo a usar apenas quando muito necessário. Uma implementação econômica destes filtros poderia usar OTAs com múltiplos estágios de entrada e possivelmente de saída também, economizando alguns circuitos e energia.

8.3.4 Filtros balanceados OTA-C

Como amplificadores operacionais de transcondutância, especialmente se ajustáveis, são invariavelmente bastante não lineares, pode-se recorrer a estruturas balanceadas para reduzir os efeitos das não linearidades, já que então ao menos a geração de harmônicos de ordem par é reduzida pelo balanceamento. OTAs com entrada diferencial e saída balanceada são usados, exemplificados pelas estruturas mostradas na figura 8.22, mostrando um OTA balanceado de classe AB e uma versão mais simples em classe A, com uma versão que troca a polaridade da transcondutância de modo comum [42]. A estrutura em classe AB apresenta alta rejeição de tensões de modo comum nas entradas, apresentando transcondutância de modo comum muito baixa mas de polaridade incerta. A forma em classe A apresenta significativa transcondutância positiva de modo comum se a condutância de dreno do transistor que faz a fonte de corrente de polarização do par diferencial for significativa ($\lambda \neq 0$). A versão (c) inverte a transcondutância de modo comum, o que afeta a estabilidade da estrutura (ver adiante).

Para gerar uma estrutura OTA-C balanceada basta decompor todos os OTAs em pares de transdutores simples e então duplicar todo o circuito, identificando OTAs com entrada diferencial e saída balanceada na estrutura (considerando capacitores parasitas para a terra em todos os nós), como na figura

¹⁴Um processo similar pode ser usado com filtros passivos para alterar níveis internos de sinal.

¹⁵Notar que pode não existir solução com capacitâncias positivas.

¹⁶Se duas tensões ligadas nas entradas de um mesmo OTA forem escaladas pelo mesmo fator ele não precisa ser dividido. Isto pode ser útil com as simulações das correntes nos indutores.

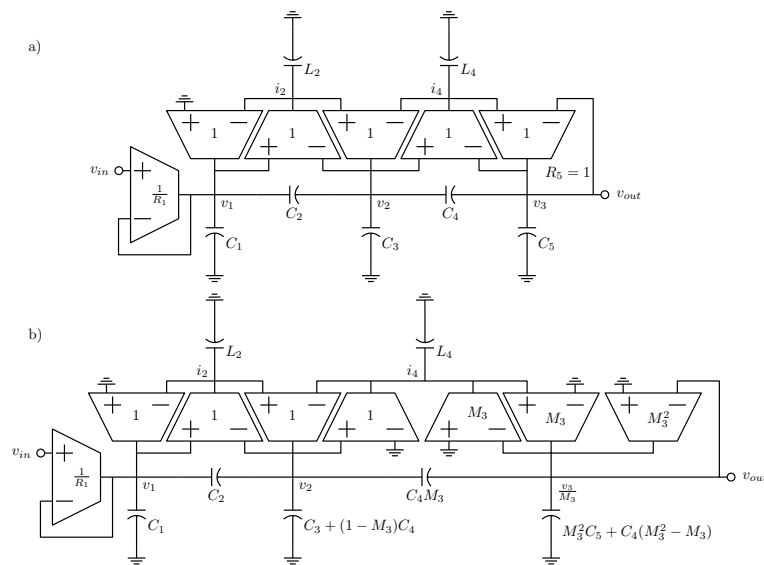


Figura 8.21: Escalamento de nível de sinal em filtros OTA-C. a) Filtro original. b) Filtro com v_3 dividida por M_3 .

8.23. Os capacitores aterrados podem ser mantidos, ou tratados como dois em série, como na figura. As transcondutâncias ficam reduzidas à metade pois os sinais de entrada ficam dobrados.

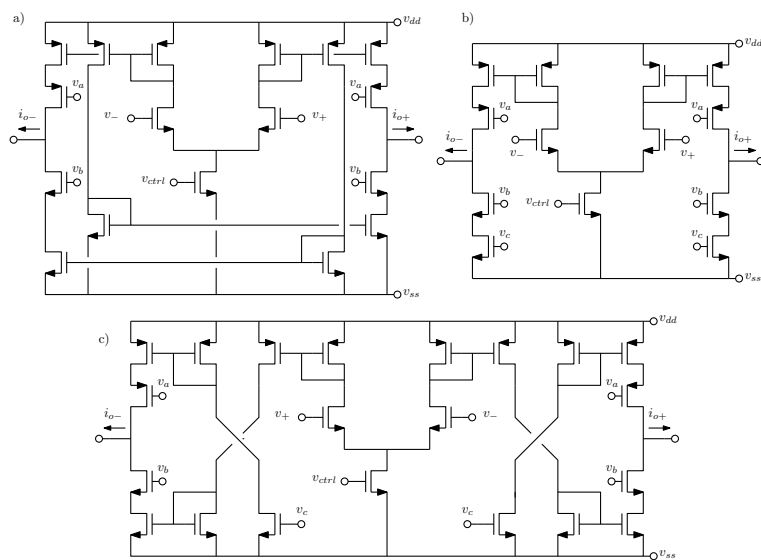


Figura 8.22: Estruturas para OTAs balanceados. a) Classe AB. b) Classe A. c) Classe A com ganho de modo comum negativo.

O filtro balanceado retém as características de faixa dinâmica do protótipo, e em grande parte as de sensibilidade também. Um problema que surge é o das frequências naturais de modo comum. Note-se

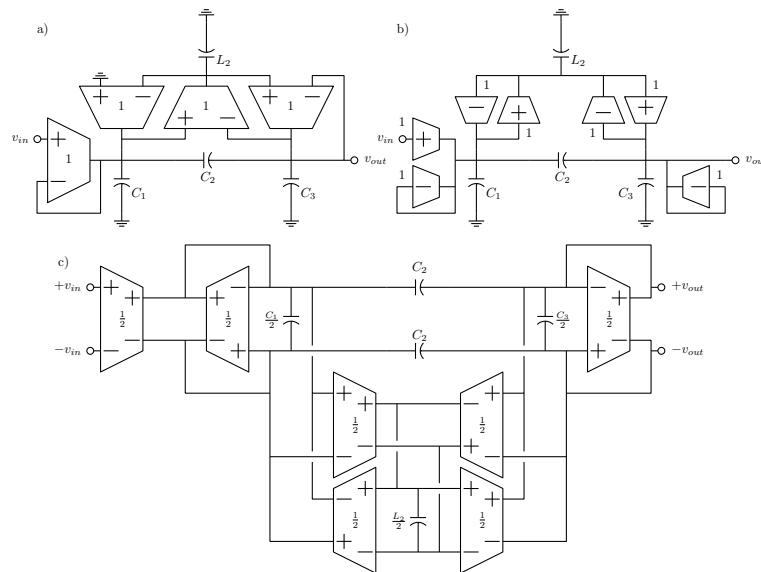


Figura 8.23: Geração de um filtro OTA-C balanceado, para um filtro passa-baixas de ordem 3 normalizado. a) Forma não balanceada. b) Versão com transdutores simples. c) Estrutura balanceada.

que o balanceamento dobra a ordem de complexidade da estrutura, dobrando o número de frequências naturais, como já foi visto já na discussão sobre filtros balanceados MOSFET-C. Neste caso entretanto as frequências naturais geradas estão idealmente todas em zero, pois os OTAs tem saída em corrente e as entradas diferenciais não percebem os níveis de modo comum nas entradas. Isto faz com o que o filtro ideal gere níveis de tensão indeterminados em modo comum nas entradas de todos os OTAs. Em uma realização prática, pequenos “offsets” de corrente nas saídas podem gerar tensões crescentes de modo comum, levando os OTAs à saturação por excesso de tensão de modo comum. Pode também ocorrer que transcondutâncias de modo comum nos OTAs balanceados instabilizem a estrutura, gerando laços de realimentação positiva em modo comum. Um caso particularmente sério deste efeito é a construção dos OTAs balanceados como pares de transdutores inversores simples, como na figura 8.24. Esta forma não distingue as transcondutâncias de modo comum das de modo diferencial. Ela é equivalente à da figura 8.23 com transcondutâncias de modo comum normalizadas de -1 siemens.

Exemplo: A figura 8.25 mostra um filtro balanceado OTA-C de ordem 5 para um filtro racional, como desenhado no editor Edfil. Os transdutores tem transcondutância normalizada $G_m = 0.5$ e transcondutâncias de modo comum G_c de dois tipos, G_1 e G_2 , atribuídas aos OTAs como mostrado¹⁷. Se as transcondutâncias de modo comum forem nulas, a estrutura tem 5 frequências naturais de modo comum em zero. Se forem todas com a mesma polaridade, o filtro é instável, com algumas f. n. de modo comum no eixo real positivo. Se as transcondutâncias de modo comum tiverem polaridades diferentes, Com $G_1 < 0$ e $G_2 > 0$, organizadas como no exemplo na figura, entretanto, o filtro fica estável, Se as polaridades das transcondutâncias de modo comum forem trocadas, ou arranjadas de outra forma, a estrutura é instável [41], [42].

O mesmo filtro com transdutores inversores separados fica como na figura 8.26. Não há como impedir frequências naturais de modo comum no semieixo real positivo sem acrescentar circuitos de controle de modo comum (ver adiante). O cálculo de polos e zeros para a função de transferência do filtro

¹⁷Os “labels” 0 e 9 na entrada são diferentes dos na saída.

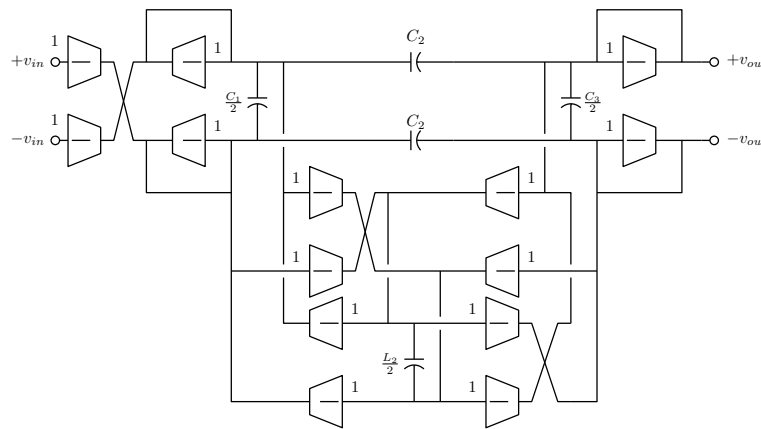


Figura 8.24: Filtro OTA-C balanceado com transdutores inversores simples, instável em modo comum.

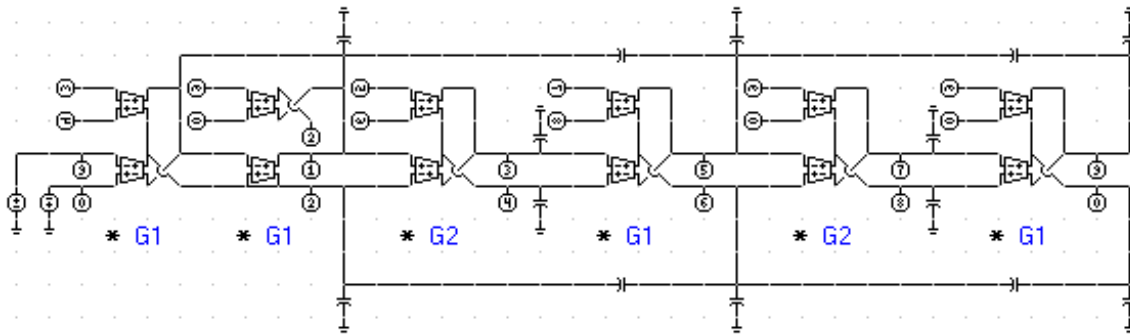


Figura 8.25: Filtro convencional OTA-C para um filtro racional passa-baixas de ordem 5. O OTA de entrada é mostrado duplicado por razão explicada adiante.

da figura 8.25¹⁸ resulta como na figura 8.27, para várias possibilidades das transcondutâncias de modo comum. As frequências naturais de modo comum aparecem como pares polo-zero cancelados. Só o caso (d) é estável.

8.3.4.1 Filtros OTA-C balanceados com distorção reduzida

As estruturas balanceadas OTA-C, embora usadas para reduzir não linearidades, podem gerar ainda mais não linearidade que as simples, devido à dobra de amplitude dos sinais nas entradas dos OTAs. Há um recurso possível para evitar isto, que é observar que cada grupo de OTAs fornecendo correntes a um par de nós do filtro tem entradas no lado “positivo” e no lado “negativo” do filtro. Se existirem dois OTAs idênticos, com polaridades opostas, alimentando cada par de nós, é possível rearranjar as conexões das entradas de forma que todos os OTAs tenham suas duas entradas ligadas no lado de mesma polaridade. Para dois OTAs com transcondutâncias $\pm G_m$ com entradas em pares de nós a e b :

$$G_m(e_{a+} - e_{a-}) - G_m(e_{b+} - e_{b-}) = G_m(e_{a+} - e_{b+}) - G_m(e_{a-} - e_{b-})$$

¹⁸Programa IFFT.

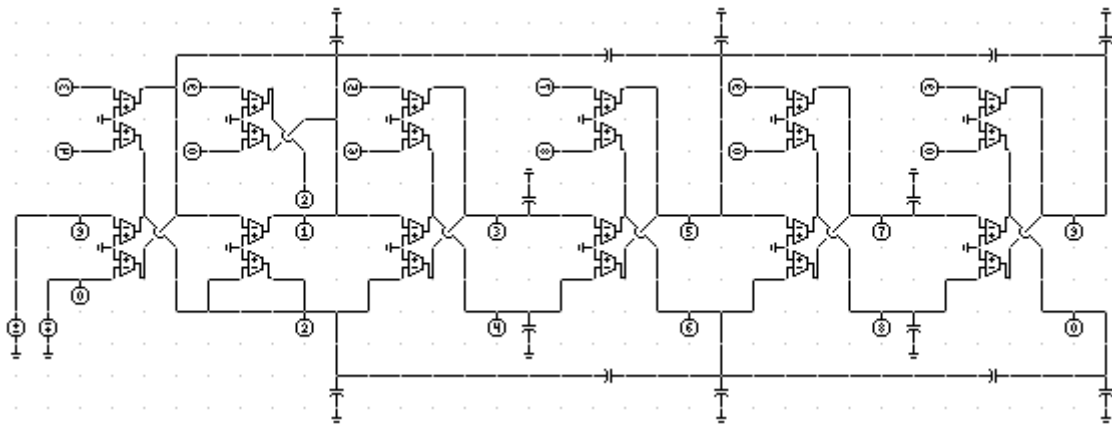


Figura 8.26: Filtro OTA-C com transdutores simples, realizando a mesma função do da figura 8.25.

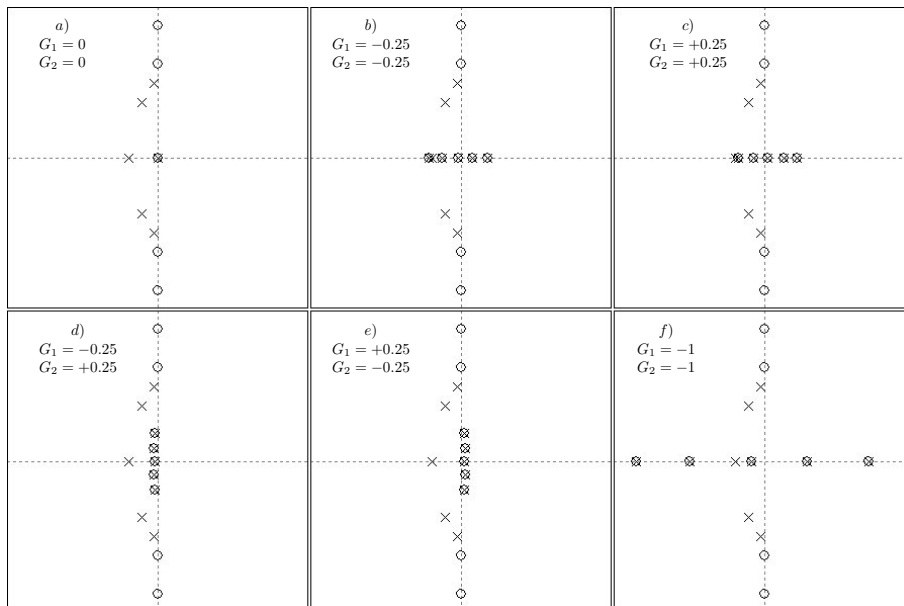


Figura 8.27: Polos e zeros para o filtro da figura 8.25 para possíveis transcondutâncias de modo comum. O caso (f) equivale à figura 8.26.

Na estrutura da figura 8.25 existe precisamente isto, com os pares de OTAs correspondentes desenhados alinhados verticalmente. Faltaria um OTA para ser agrupado com o que realiza a terminação da entrada [41], mas ele pode ser provido com a duplicação do OTA de entrada [42]. A modificação da figura 8.25 para isto fica como na figura 8.28. As transcondutâncias de modo comum também podem estabilizar esta estrutura, da mesma forma que na original. A redução dos níveis de sinal nas entradas também gera sensibilidades mais baixas no início da banda passante, pois as tensões nas entradas dos OTAs são todas nulas em frequência zero, e portanto as sensibilidades em relação às transcondutâncias diferenciais são nulas também. É possível aplicar a ideia à estrutura com OTAs simples da figura 8.26 obtendo um filtro

com as mesmas características, mas não parece haver vantagem naquele caso pois não existem entradas diferenciais.

Exemplo: A figura 8.29 mostra espectros calculados¹⁹ para os filtros das figuras 8.25 e 8.28, para entradas senoidais somadas de 1 V na borda da banda passante em 1 rad/s e em 0.25 rad/s. Os OTAs são modelados com transcondutâncias polinomiais com distorção cúbica tipo $i_{out} = 0.5v_{in} + 1/(6v_{max}^2)v_{in}^3$, para $v_{max} = 20$ V. Isto causa derivada nula para entrada de ± 20 V e uma suave distorção para tensões menores. Não há transcondutâncias de modo comum, mas as frequências naturais em zero não são excitadas pela distorção com correntes simétricas nas duas saídas dos OTAs. Observa-se a menor distorção na forma modificada, com menos componentes harmônicos e de intermodulação gerados. A redução de distorção é menos efetiva para sinais na borda da banda passante, onde os sinais nas entradas dos OTAs crescem de forma similar nas duas versões.

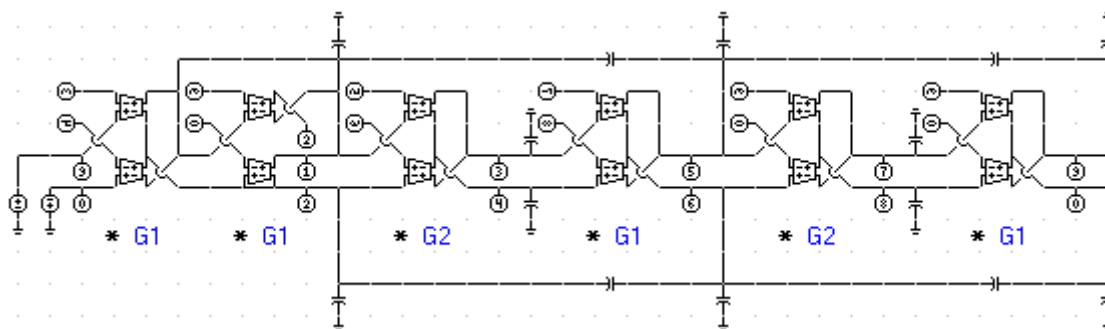


Figura 8.28: Filtro OTA-C com distorção reduzida pela conexão de todas as entradas dos OTAs nos lados com mesma polaridade da estrutura.

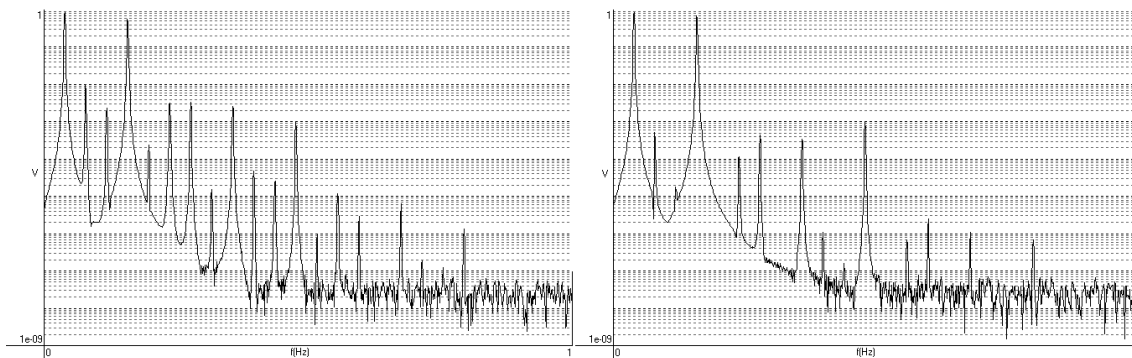


Figura 8.29: Espectros da saída para os filtros das figuras 8.25 (esquerda) e 8.28 (direita), para entradas senoidais em duas frequências.

8.3.4.2 Controle de modo comum

Uma forma de impedir a instabilidade causada por frequências naturais de modo comum, não sendo possível ajustar as transcondutâncias de modo comum, é acrescentar circuitos de controle de modo comum,

¹⁹Programa Mnae.

que tem a função de manter opostas as duas tensões nas saídas dos OTAs balanceados. Uma forma de conseguir isto é mostrada na figura 8.30. Um circuito montado com transdutores feitos com transistores mede a média das tensões em dois nós que deveriam ter polaridades opostas e realimenta correntes iguais nestes mesmos nós. Com transcondutâncias grandes o bastante as frequências naturais de modo comum são todas movidas para o semiplano lateral esquerdo. Para filtros que idealmente teriam frequências naturais de modo comum em zero, um pequeno controle basta. Quando existe instabilidade causada por transcondutâncias significativas de modo comum, o controle tem que ser mais forte, máximo em casos como o da figura 8.26. A implementação do controle de modo comum pode usar transdutores de saída já presentes na estrutura, como os que realizam fontes de corrente com controle v_c na figura 8.22. Basta então conectar um circuito medidor de modo comum como o da figura 8.30b aos nós de controle das fontes de corrente, com a polaridade necessária para que a realimentação seja negativa, usando v_{c1} para a figura 8.22c e v_{c2} para a figura 8.22b.

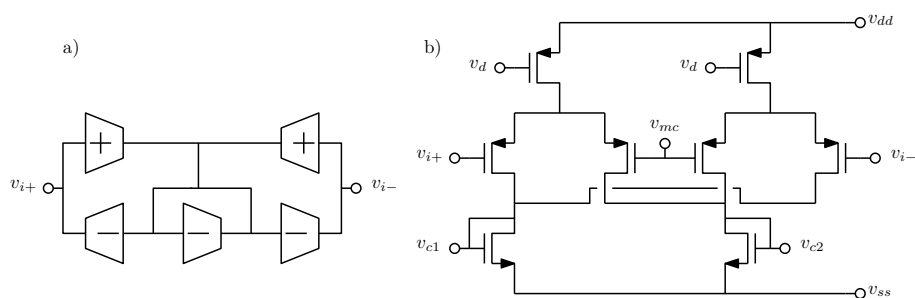


Figura 8.30: Bloco de controle de modo comum. a) Diagrama básico. b) Possível implementação, a conectar nos nós de controle v_c das fontes de corrente nas figuras 8.22b e 8.22c.

Os medidores de modo comum usam dois pares diferenciais iguais ligados a uma tensão desejada de modo comum v_{cm} , de forma a não gerarem distorção quando os sinais nos nós v_{i+} e v_{i-} estiverem opostos em torno de v_{cm} . As tensões de controle v_{c1} e v_{c2} permanecem idealmente constantes nessa condição, mesmo que os pares diferenciais não tenham transcondutância linear. O uso de pares diferenciais com transistores PMOS permite o uso de fonte (“source”) conectada ao substrato naqueles transistores, evitando variações de V_t com v_{bs} que iriam gerar distorção.

Outra forma de controle de modo comum é mostrada na figura 8.31 [43]. Um resistor é montado entre os dois nós do par complementar e também dois transdutores cruzados. Se $G_m = 2/R$ não passa corrente pelo resistor para sinais balanceados, mas os dois transdutores atuam como resistores $1/G_m$ para terra para sinais em modo comum. O compensador é mostrado montado junto com um par de transdutores simples, utilizáveis em filtros como o da figura 8.26, em uma realização prática para filtros de alta frequência, já que não tem nós internos com sinal. A tensão de controle v_f ajusta a transcondutância e a tensão v_Q ajusta o valor da resistência. Com sistemas adequados de sintonia automática [44] o circuito pode também cancelar a condutância de saída do OTA balanceado, que está em paralelo com R , sem o uso de cascodes.

Exemplo: O filtro da figura 8.26 com blocos de controle de modo comum como os da figura 8.31 fica como na figura 8.32. Os polos de modo comum são todos deslocados para o semiplano lateral esquerdo com R pouco maior que 1, na estrutura normalizada, como mostrado na figura 8.33. Se as transcondutâncias de modo comum fossem positivas, os mesmos blocos colocariam o filtro no limite da estabilidade, com uma frequência natural em zero [41].

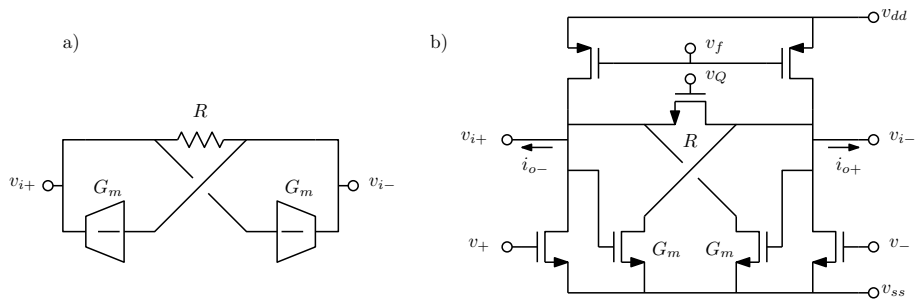


Figura 8.31: Bloco de controle de modo comum para circuitos de alta frequência. a) Diagrama básico. b) Possível implementação em um OTA balanceado de alta frequência, feito com dois transdutores simples, sem nós internos.

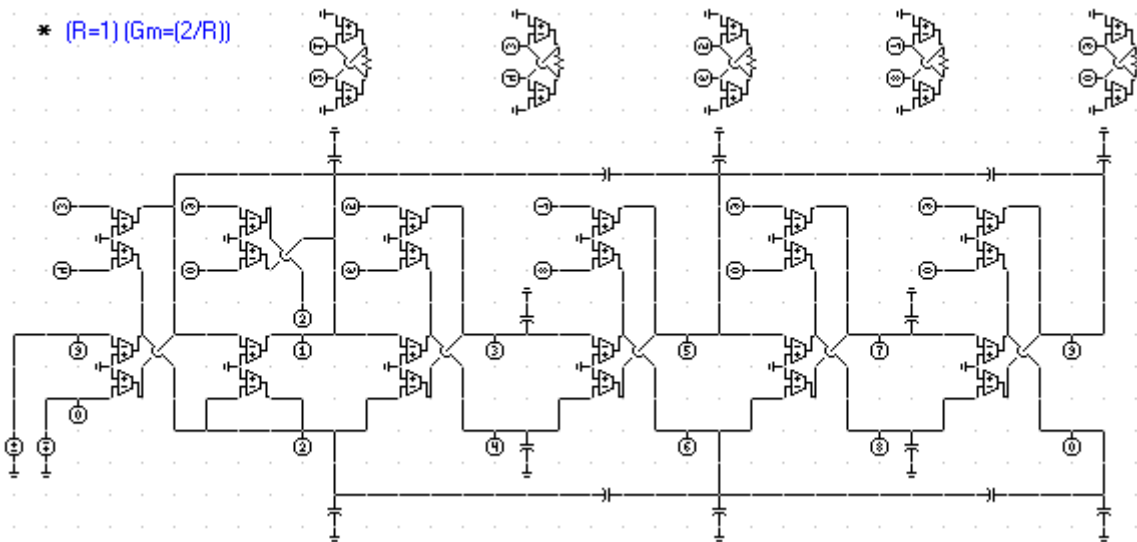


Figura 8.32: Filtro da figura 8.26 com blocos de controle de modo comum.

8.3.5 Biquads OTA-C

Com o problema de não linearidade dos transdutores e a sensibilidade a capacitâncias parasitas, estruturas OTA-C parecem mais adequadas para a construção de filtros relativamente simples, como biquads. Uma família de realizações pode ser obtida de estruturas passivas RLC com a aplicação dos equivalentes. A figura 8.34 mostra filtros RLC derivados do circuito RLC paralelo, e a figura 8.35 mostra as formas equivalentes derivadas do circuito RLC série. São mostradas as formas realizando zeros de transmissão no infinito, em zero, e no eixo imaginário. Existem outras possibilidades, como formas com zeros no eixo real negativo.

As duas formas diferem no denominador da função de transferência, que para as formas derivadas do circuito paralelo vale $s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}$, e para as formas derivadas do circuito série vale $s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}$. Nas formas com zeros finitos, tem-se $C = C_1 + C_2$ e $L = L_1 // L_2$ para as formas da figura 8.34 e $C = C_1 // C_2$ e $L = L_1 + L_2$ para as formas da figura 8.35. Os numeradores são obtidos apenas observando-se o

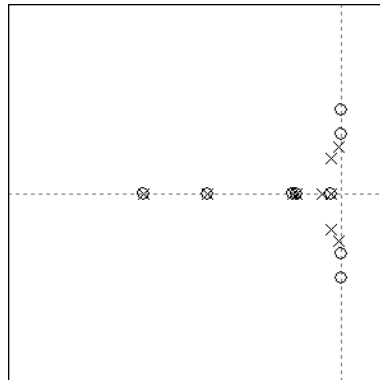


Figura 8.33: Polos e zeros para o filtro da figura 8.32.

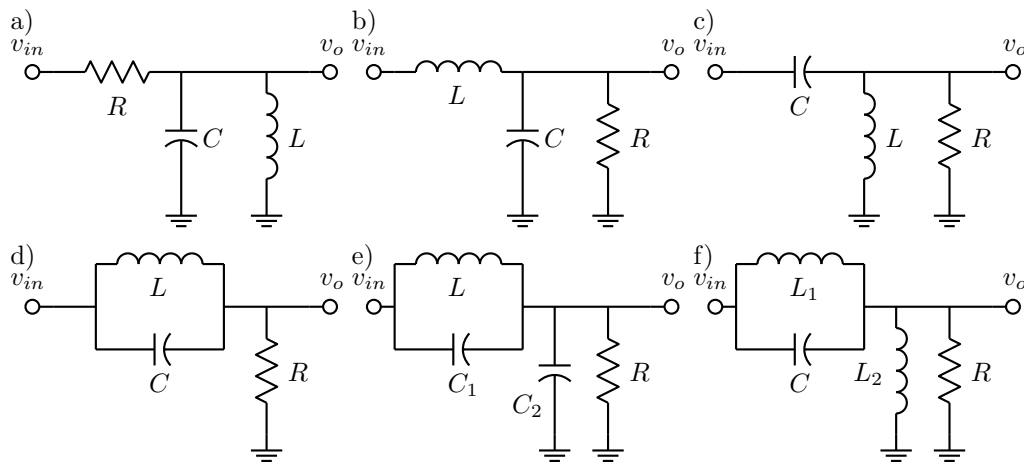


Figura 8.34: Filtros de segunda ordem obtidos do circuito RLC paralelo. a) Passa-faixa. b) Passa-baixas. c) Passa-altas. d) Rejeita-faixa. e) Passa-baixas com zeros finitos. f) Passa-altas com zeros finitos.

ganho, no centro da banda, em baixa frequência ou em alta frequência. A tabela 8.1 lista as funções de transferência.

Todas as estruturas tem realizações OTA-C pela simples substituição de equivalentes, mais ou menos complexas. É interessante que os biquads gerados possam ser ligados em cascata, o que requer impedância de entrada infinita. Isto torna mais adequadas as estruturas que tem resistor ou indutor ligados à entrada, pois o resistor pode ser realizado na forma da figura 8.12a e o indutor na forma da figura 8.13d. Todas as formas derivadas do circuito RLC série satisfazem essa condição, enquanto só as formas passa-faixa e passa-baixas derivadas do circuito RLC paralelo são adequadas. Várias estruturas requerem capacitores suspensos, inconvenientes para realização em microeletrônica. A forma da figura 8.35e apresenta impedância indutiva no nó de saída em alta frequência, o que pode levar a uma ressonância indesejada com capacitores parasitas, ou mesmo instabilidade por efeito das respostas em frequência dos OTAs. A forma da figura 8.34f não pode ser operada com sinal com nível contínuo na entrada, devido à impedância de entrada indutiva. A forma 8.35f tem a saída com nível contínuo indefinido. Ficam então faltando boas formas de realização para os biquads com zeros de transmissão finitos.

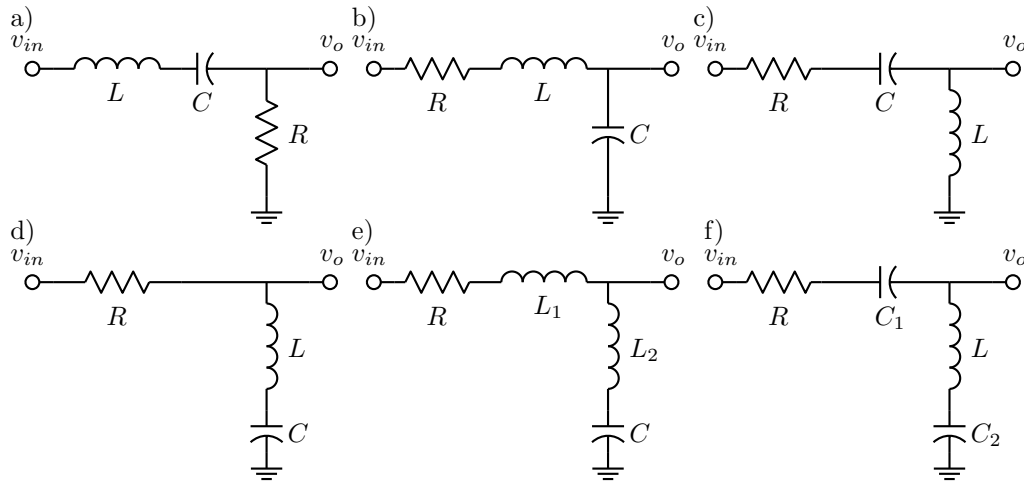


Figura 8.35: Filtros de segunda ordem obtidos do circuito RLC série. a) Passa-faixa. b) Passa-baixas. c) Passa-altas. d) Rejeita-faixa. e) Passa-baixas com zeros finitos. f) Passa-altas com zeros finitos.

*	a) P. faixa	b) P. baixas	c) P. altas	d) R. faixa	e) P. b. c/zeros	f) P. a. c/zeros
//	$\frac{\frac{1}{RC}s}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$	$\frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$	$\frac{s^2}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$	$\frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$	$\frac{\frac{C_1}{C_1+C_2} \left(s^2 + \frac{1}{LC_1} \right)}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$	$\frac{s^2 + \frac{1}{L_1C}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$
Série	$\frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	$\frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	$\frac{s^2}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	$\frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	$\frac{\frac{L_2}{L_1+L_2} \left(s^2 + \frac{1}{L_2C} \right)}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	$\frac{s^2 + \frac{1}{LC_2}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$

Tabela 8.1: Funções de transferência das redes RLC.

Exemplo: A figura 8.36 mostra um biquad OTA-C completo, montado superpondo-se os efeitos de três entradas, em série com os três elementos de um circuito RLC paralelo. A tensão de saída da rede (a) pode ser obtida como:

$$V_o(s) = \frac{V_1(s)s^2 + V_3(s)\frac{1}{RC}s + V_2(s)\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$$

A tensão v_1 tem que ser aplicada em série com o capacitor, gerando os inconvenientes já descritos. As duas outras entradas podem ser geradas através de equivalentes, como correntes em paralelo com os elementos dualizados, resultando em:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{s^2 + k_2 \frac{1}{RC}s + k_1 \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$$

8.4 Filtros a capacitores chaveados

Nesta técnica, filtros operando com sinais discretizados no tempo são obtidos, com resistores de filtros baseados em integradores substituídos por “capacitores chaveados”. A figura 8.37 mostra a ideia. Um capacitor aterrado é carregado alternadamente pelas fontes v_1 e v_2 com um período T , através de duas chaves (que seriam implementadas com transistores MOS). A carga no capacitor então se alterna entre

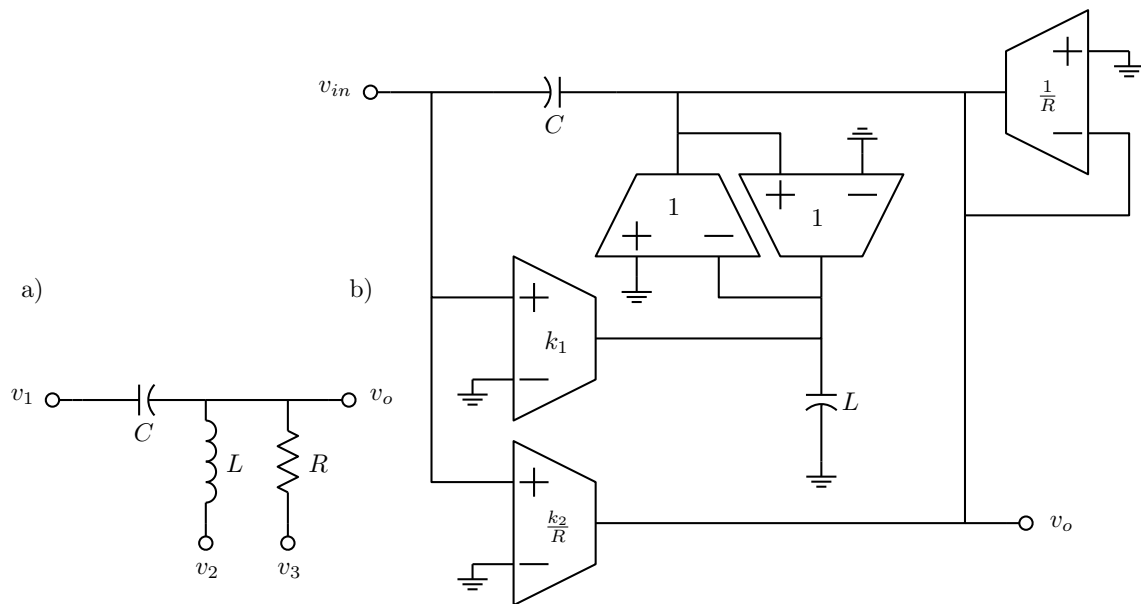


Figura 8.36: Biquad completo OTA-C. a) Protótipo. b) Equivalente OTA-C (normalizado).

$Q_1 = Cv_1$ e $Q_2 = Cv_2$. A cada período passa uma carga entre v_1 e v_2 igual a $\Delta Q = C(v_1 - v_2)$. Comparando com a corrente média \bar{i} que passaria por um resistor R_{eq} entre v_1 e v_2 obtém-se a equivalência do capacitor chaveado com um resistor:

$$\bar{i} = \frac{v_1 - v_2}{R_{eq}} = \frac{C}{T}(v_1 - v_2) \therefore R_{eq} = \frac{C}{T}$$

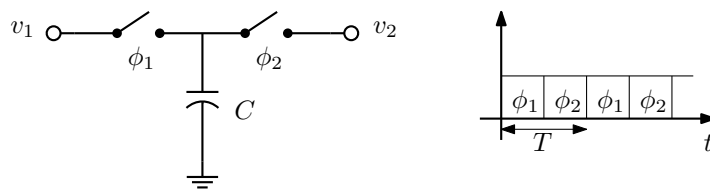


Figura 8.37: Capacitor chaveado.

A equivalência vale para a corrente média, que entre fontes de tensão ideais toma a forma de um trem de impulsos, com valor médio igual ao da corrente pelo resistor. Um circuito onde esta diferença tem pouco efeito é em um integrador Miller, como na figura 8.38. A figura mostra duas possíveis formas de substituição do resistor do integrador, uma, (a), usando o capacitor chaveado da figura 8.37 e outra, (b) com uma forma alternativa, que carrega os dois capacitores simultaneamente na fase ϕ_1 , descarregando C_1 na fase ϕ_2 . Em ambos os casos, a função de transferência do integrador pode ser aproximada como:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = -\frac{1}{sR_{eq}C_2} = -\frac{1}{s} \frac{C_1}{C_2} \frac{1}{T}$$

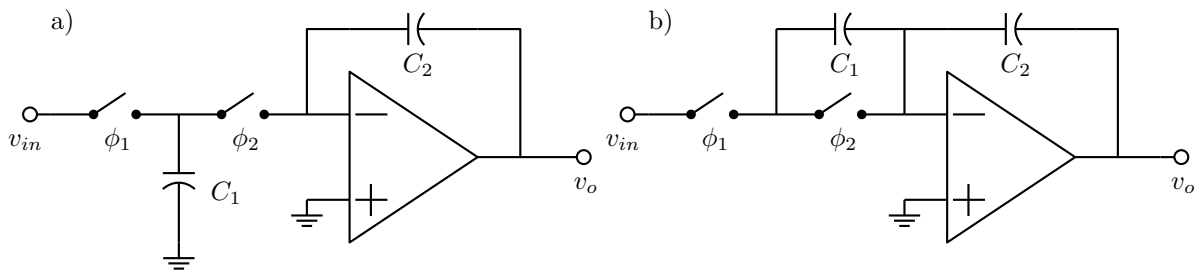


Figura 8.38: Integradores a capacitores chaveados.

Esses integradores são lineares, se os capacitores forem lineares, e tem um ganho que depende apenas de razão de capacitâncias e da frequência de chaveamento, sendo então adequados para a construção de filtros precisos. Qualquer tipo de filtro baseado em integradores inversores pode ser realizado com a equivalência. As formas da figura 8.38, entretanto, não são insensíveis a capacitâncias parasitas, associadas às placas dos próprios capacitores e às chaves. As formas alternativas da figura 8.39 resolvem o problema. Capacitâncias no nó esquerdo de C_1 são carregadas pela fonte de entrada e descarregadas para a terra. Capacitâncias no nó direito de C_1 ficam ligadas alternadamente entre o terra virtual na entrada do amplificador e a terra. Ambas então não tem efeito, idealmente, na operação do integrador²⁰. O integrador equivalente ao da figura 8.38a fica com ganho positivo, devido à reversão das conexões do capacitor C_1 , um “capacitor chaveado inversor”, enquanto o outro continua com ganho negativo.

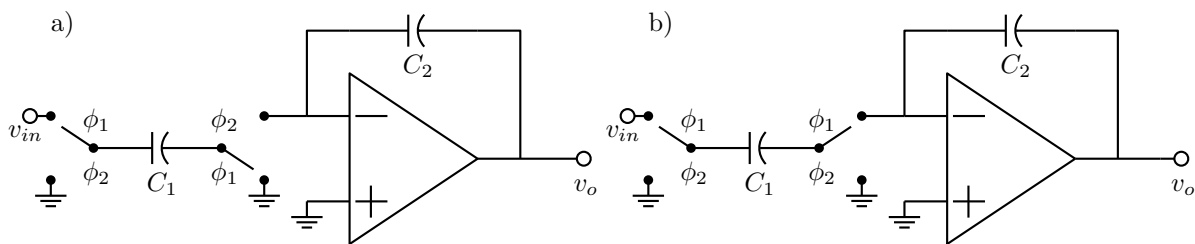


Figura 8.39: Integradores a capacitores chaveados insensíveis a capacitâncias parasitas. a) Não inversor. b) Inversor.

Exemplo: É simples gerar filtros pela conversão de estruturas RC-Ativas baseadas em integradores, como o biquad Tow-Thomas da figura 7.1. Basta substituir os resistores por capacitores chaveados, usando a equivalência $C = \frac{T}{R}$, e então, se conveniente, simplificar o circuito eliminando chaves redundantes. Inversões são eliminadas com o uso de integradores não inversores. A figura 8.40 mostra o resultado. Para dimensionar o filtro, pode-se partir do biquad RC-ativo, melhor normalizado em frequência e impedância. Escolhe-se então a razão entre frequência de chaveamento $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ e a frequência de corte do filtro ω_0 , obtendo T , que é usado no cálculo dos capacitores chaveados. Um escalamento em impedância, ou no caso em capacitância, se necessário, gera os capacitores finais. A frequência de corte do filtro segue a frequência de chaveamento, mantendo a razão usada no cálculo de T . Um filtro ressonando em 1 rad/s com $Q = 5$ é obtido com $C_a = C_b = 1$ F, $C_e = \frac{T}{5}$ F e os demais $C_i = T$ F. Com frequência de chaveamento n vezes maior que a de ressonância, resulta $T = \frac{2\pi}{n}$.

²⁰Uma tensão de “offset” na entrada do amplificador faria a capacitância parasita do nó direito de C_1 ficar ligada entre tensões diferentes, provocando integração da tensão de “offset”.

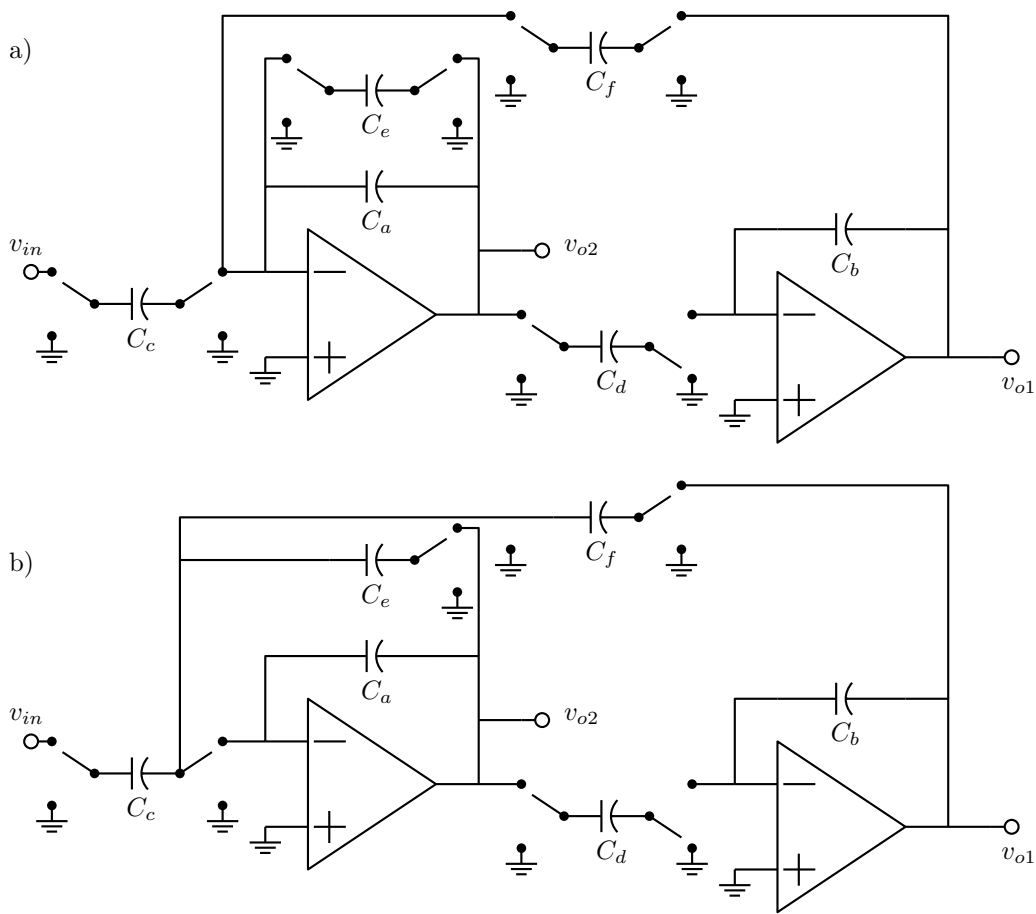


Figura 8.40: Biquad Tow-Thomas em capacitores chaveados. a) Versão obtida diretamente da substituição dos resistores. b) Versão com chaves simplificadas.

8.4.1 Análise em transformada Z

A substituição de resistores introduz alguns artefatos na resposta do filtro, criados pela discretização no tempo dos sinais. Para caracterizar mais cuidadosamente o que acontece, o circuito pode ser analisado em transformada Z^{21} .

8.4.1.1 Sinais em filtros chaveados

Considere-se um sinal $x(t)$ multiplicado, ou amostrado, por um trem de impulsos unitários separados por um período T , gerando $x^\#(t)$, como na figura 8.41a:

$$x^\#(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma(t - nT) = x(t)S(t)$$

Fazendo a série de Fourier deste sinal:

²¹Ou, equivalentemente, em transformada de Laplace, considerando-se a transformada do atraso $x(t - T) \Leftrightarrow e^{-sT} X(s)$. A transformada Z apenas substitui $z = e^{sT}$

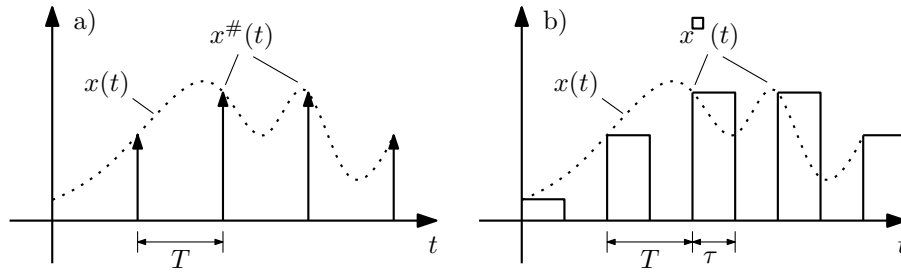


Figura 8.41: a) Amostragem impulsional. b) Amostragem com retenção.

$$x^\#(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_c k t} \quad \text{onde } C_k = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) e^{-j\omega_c k t} dt, \quad \omega_c = \frac{2\pi}{T}$$

Como a integral só integra o impulso em $t = 0$, todos os coeficientes da série valem $C_k = \frac{1}{T}$, e então:

$$x^\#(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega_c k t}$$

Para obter o espectro deste sinal, usa-se a transformada de Fourier, pela definição²²:

$$X^\#(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^\#(t) e^{j\omega t} dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{(j\omega_c k - \omega)t} dt$$

O resultado corresponde a uma série de cópias do espectro de $x(t)$, $X(j\omega)$, separadas por intervalos de frequência angular ω_c e divididas por T , como mostrado na figura 8.42:

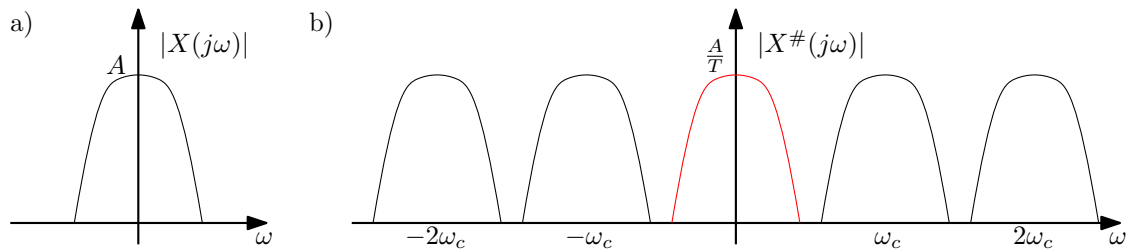


Figura 8.42: Sinal amostrado por impulsos unitários. a) Espectro original. b) Espectro do sinal amostrado.

$$X^\#(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_c))$$

²²Propriedades não detalhadas aqui, mas relacionadas com a transformada de Laplace e a análise com fasores. Para as análises seguintes, basta usar que a integração equivale à divisão por $j\omega$ e o atraso de τ segundos à multiplicação por $e^{-j\omega\tau}$. Em geral a transformada de Fourier é similar à de Laplace com $j\omega$ no lugar de s , e representa os espectros de sinais no domínio da frequência.

O componente principal, que ocupa o mesmo espectro original de $x(t)$, é o termo central da série, $X_0^\#(j\omega) = \frac{1}{T}X(j\omega)$. Nota-se que se o espectro $X(j\omega)$ se estende acima de $\omega = \frac{\omega_c}{2} = \frac{\pi}{T}$, ou a metade da frequência do trem de impulsos que amostra o sinal, os espectros laterais interferem com o principal, gerando o que se conhece como subamostragem, ou “aliasing”.

Considere-se agora um sinal amostrado e retido, $x^\square(t)$, amostrado com período T e retido por tempo τ , como na figura 8.41b. Ele pode ser gerado pela integração da diferença de dois sinais amostrados por trens de impulsos com período T , com atraso τ entre eles:

$$x^\square(t) = \int_{-\infty}^t \left(x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma(t - nT) - x(t - \tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma(t - nT - \tau) \right) dt$$

A série de Fourier deste sinal é também a integral da diferença de duas séries:

$$x^\square(t) = \int_{-\infty}^t \left(x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{j\omega_c k t} - x(t - \tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{j\omega_c k (t - \tau)} \right) dt$$

E o espectro do sinal pode ser obtido pela série de Fourier:

$$X^\square(j\omega) = \frac{1}{T} \frac{1}{j\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(X(j(\omega - k\omega_c)) - e^{-j(\omega - k\omega_c)\tau} X(j(\omega - k\omega_c)) \right)$$

Simplificando, nota-se que surge o mesmo espectro obtido pela amostragem impulsional multiplicado por um fator dependente da frequência:

$$X^\square(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega\tau}}{j\omega T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (X(j(\omega - k\omega_c)))$$

Tomando apenas o espectro principal, vem $X_0^\square(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega\tau}}{j\omega T} X(j\omega)$. Para retenção completa, $\tau = T$, o efeito no módulo do sinal é como na figura 8.43, pois:

$$\left| \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega T} \right| = \left| \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right|$$

Para $\omega = 0$ o limite vale 1. Existem nulos para ω igual aos múltiplos não nulos de $\omega_c = \frac{2\pi}{T}$. Para $\tau = T/n$, os nulos ficam a cada n múltiplos da frequência de amostragem ω_c , e a amplitude fica dividida por n .

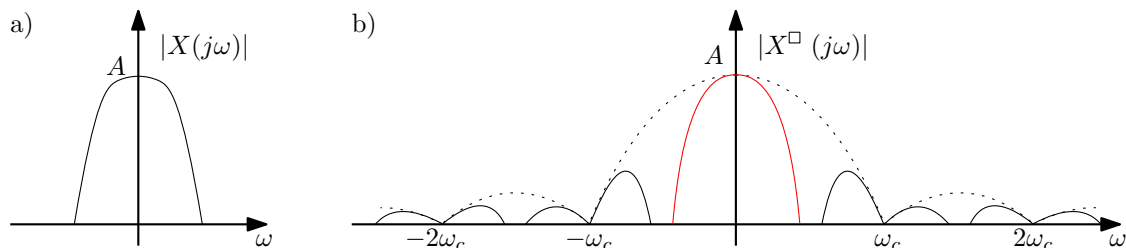


Figura 8.43: Sinal amostrado com amostragem e retenção. a) Espectro original. b) Espectro do sinal amostrado, para o caso $\tau = T$.

Note-se que o mesmo espectro é gerado se a entrada estiver em qualquer das cópias geradas pela amostragem. Uma vez gerado o sinal amostrado com componentes espectrais nas frequências $\pm k\omega_c \pm \omega_0$,

não há como saber quais dos componentes pertencem à entrada. Normalmente interessa que sejam os em $\pm\omega_0$, e para isto deve-se garantir que não entre no sistema nenhuma frequência acima da metade da frequência de amostragem (talvez usando filtros “anti-aliasing”). Há casos em que interessa fazer conversão de frequência com amostragem, e então o efeito de “aliasing” seria usado propositalmente.

8.4.1.2 Análise dos integradores a capacitores chaveados

Seja o integrador não inversor da figura 8.39a. A análise é feita nas duas fases do chaveamento, usando como incógnitas os sinais nas duas fases. Modelos e equações são montados considerando os capacitores carregados com as tensões do fim da fase anterior, $T/2$ segundos atrás, ou $v_c(t - T/2) \Leftrightarrow V_c z^{-1/2}$, como na figura 8.44.

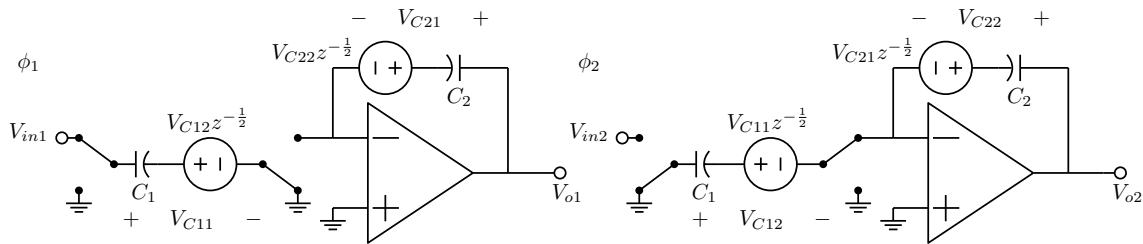


Figura 8.44: Modelos para análise em transformada Z do integrador não inversor da figura 8.39a.

A análise do circuito para o cálculo das tensões de saída é simples:

$$\begin{aligned} \phi_1 : V_{C11} &= V_{in1}; & V_{o1} &= V_{C21} = V_{C22} z^{-\frac{1}{2}} \\ \phi_2 : V_{C12} &= 0; & V_{o2} &= V_{C22} = V_{C21} z^{-\frac{1}{2}} + \frac{C_1}{C_2} V_{C11} z^{-\frac{1}{2}} \\ \therefore V_{o1} &= V_{o1} z^{-1} + \frac{C_1}{C_2} V_{in1} z^{-1}; & V_{o2} &= V_{o2} z^{-1} + \frac{C_1}{C_2} V_{in1} z^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Considerando entradas e saídas nas duas fases, existem quatro funções de transferência em transformada Z:

$$\begin{aligned} \frac{V_{o1}}{V_{in1}}(z) &= \frac{C_1 z^{-1}}{1-z^{-1}} & \frac{V_{o1}}{V_{in2}}(z) &= 0 \\ \frac{V_{o2}}{V_{in1}}(z) &= \frac{C_1 z^{-\frac{1}{2}}}{1-z^{-1}} & \frac{V_{o2}}{V_{in2}}(z) &= 0 \end{aligned}$$

A função principal $\frac{V_{o1}}{V_{in1}}(z)$ é uma integração explícita, “forward” de Euler não inversora. Com a saída na fase ϕ_2 tem-se uma integração de ponto médio, ou apenas uma versão adiantada de meio período. As outras duas são nulas pois V_{in2} não afeta a saída.

O mesmo pode ser feito para o integrador inversor da figura 8.39b, resultando os modelos da figura 8.45.

A análise do circuito para o cálculo das tensões de saída é igualmente simples:

$$\begin{aligned} \phi_1 : V_{C11} &= V_{in1}; & V_{o1} &= V_{C21} = V_{C22} z^{-\frac{1}{2}} - \frac{C_1}{C_2} (V_{in1} - V_{C12} z^{-\frac{1}{2}}) \\ \phi_2 : V_{C12} &= 0; & V_{o2} &= V_{C22} = V_{C21} z^{-\frac{1}{2}} \\ \therefore V_{o1} &= V_{o1} z^{-1} - \frac{C_1}{C_2} V_{in1}; & V_{o2} &= V_{o2} z^{-1} - \frac{C_1}{C_2} V_{in1} z^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

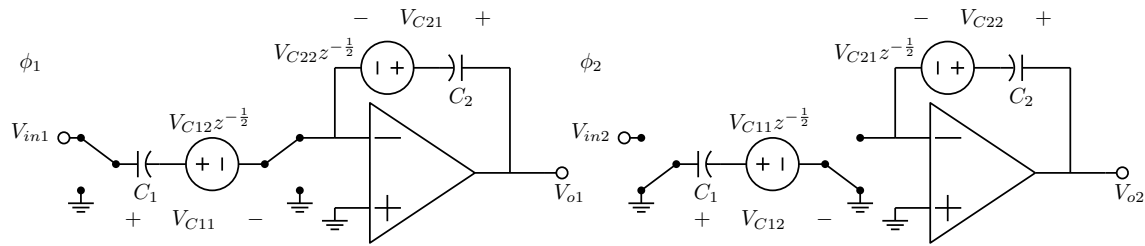


Figura 8.45: Modelos para análise em transformada Z do integrador inversor da figura 8.39b.

Também neste caso existem quatro funções de transferência em transformada Z:

$$\begin{aligned} \frac{V_{o1}}{V_{in1}}(z) &= \frac{-C_1}{1-z^{-1}} & \frac{V_{o1}}{V_{in2}}(z) &= 0 \\ \frac{V_{o2}}{V_{in1}}(z) &= \frac{-C_1 z^{-\frac{1}{2}}}{1-z^{-1}} & \frac{V_{o2}}{V_{in2}}(z) &= 0 \end{aligned}$$

A função principal $\frac{V_{o1}}{V_{in1}}(z)$ é uma integração implícita, “backward” de Euler inversora. Com a saída na fase ϕ_2 tem-se novamente uma integração de ponto médio, ou apenas uma versão atrasada. As outras duas também são nulas pois V_{in2} não afeta a saída. O mesmo método pode ser usado para a análise de circuitos mais complexos, e pode ser sistematizado de forma similar ao feito com a análise de circuitos contínuos no tempo.

Estas análises permitem o cálculo das formas de onda e também das respostas em frequência pela substituição de s por $j\omega$. As respostas em frequência calculadas desta forma assumem que os sinais são trens de impulsos, e somente consideram a componente do sinal de saída com a mesma frequência do sinal de entrada. A amostragem feita pelos chaveamentos gera outras frequências no sinal de saída. Para um sinal de entrada de frequência ω_0 , são gerados componentes nas frequências $\pm \frac{2\pi}{T} \pm \omega_0$. Isto restringe a máxima frequência do sinal de entrada a $\omega_0 = \frac{\pi}{T}$, ou a metade da frequência de chaveamento, do contrário é gerado componente espectral abaixo da frequência de entrada (“aliasing”). Em casos simples como estes a operação do circuito pode ser descrita por uma única função de transferência, mas no caso geral é necessário considerar todas as quatro, ou mais se mais de duas fases forem usadas. Considera-se então que todos os sinais são compostos de componentes em cada fase, que são nulos nas demais fases, que somados, no domínio do tempo ou no domínio da frequência, geram os sinais completos. A função de transferência completa é então a soma das funções de transferência parciais, e para considerar que as formas de onda são amostradas e retidas deve-se multiplicar a soma pelo fator de correção:²³

$$A(\omega) = \frac{1 - e^{-\frac{j\omega T}{2}}}{j\omega T}$$

Exemplo: Uma análise precisa da resposta em frequência do integrador não inversor da figura 8.39a é obtida na forma:

$$\frac{V_o}{V_{in}}(j\omega) = A(\omega) \sum T_{ij}(j\omega) = \frac{1 - e^{-\frac{j\omega T}{2}}}{j\omega T} \frac{C_1}{C_2} \frac{(e^{-j\omega T} + e^{-\frac{j\omega T}{2}})}{1 - e^{-j\omega T}} = \frac{C_1}{C_2} \frac{e^{-\frac{j\omega T}{2}}}{j\omega T}$$

²³Forma para duas fases, com $\tau = T/2$. Se for considerada apenas a função de transferência principal, não há a divisão por 2 (ou pelo número de fases) pois $\tau = T$. A correção é aplicada apenas quando se quer o espectro correto do sinal amostrado e retido. Não se aplica, por exemplo, quando circuitos a capacitores chaveados são conectados em cascata, onde deve ser aplicada apenas ao produto das funções de transferência.

O integrador opera precisamente como esperado para o integrador obtido pela substituição do resistor pelo capacitor chaveado (inversor), mas tem um atraso adicional de $T/2$ segundos²⁴.

8.4.2 Análise simplificada de circuitos a capacitores chaveados

Quando a estrutura do circuito contém apenas os blocos usados para construir o biquad da figura 8.40, uma análise simplificada por “flow-graph” é possível, calculando as funções de transferência principais, com entrada e saída na fase ϕ_1 . Basta substituir os blocos como na figura 8.46. Foi incluído também um capacitor fazendo uma ligação direta, que pode ser usado desde que na entrada de integrador onde fique ligado esteja ligado também um capacitor chaveado (do contrário a entrada do amplificador fica sem referência CC).

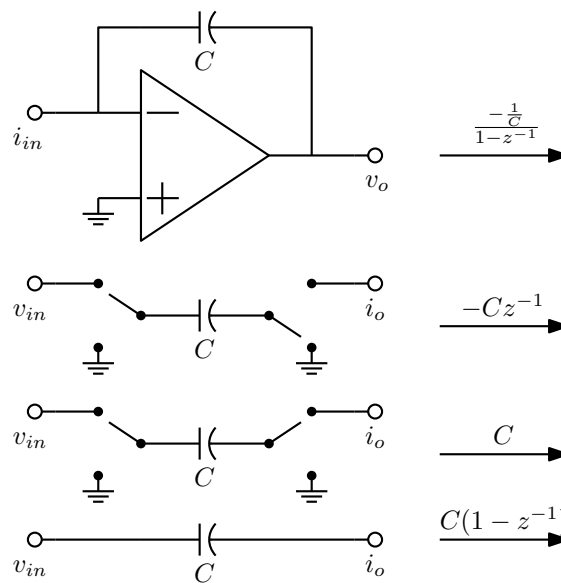


Figura 8.46: Modelamento de blocos para uma análise simplificada.

A figura 8.47 mostra o modelo para o biquad da figura 8.40, com as capacitâncias representadas pelos sufixos apenas para simplificar a notação. As equações para análise são imediatamente obtidas como:

$$V_{o2} = -\frac{1}{a} \frac{1}{1 - z^{-1}} (cV_{in} + eV_{o2} + fV_{o1})$$

$$V_{o1} = -\frac{1}{b} \frac{1}{1 - z^{-1}} (-dz^{-1}V_{o2})$$

Resolvendo para V_{o1} e V_{o2} vem as duas funções de transferência, válidas para entrada e saída na fase 1 (chaves posicionadas como na figura):

²⁴O atraso ocorre porque a análise assume que a entrada é amostrada e retida no início de cada fase, de forma a que o valor da entrada na fase ϕ_1 é uma versão atrasada de $T/2$ segundos em relação ao sinal contínuo. Se a entrada não for amostrada e retida, o atraso desaparece. No caso da figura 8.39b variações de v_{in} durante a fase ϕ_1 passam à saída através do amplificador inversor formado pelos dois capacitores, influenciando a resposta em frequência. Isto acontece sempre que há um caminho sem amostragem entre a entrada e a saída. O efeito é considerado pelo programa ASIZ, que faz a análise do caso geral destes circuitos, calculando funções de transferência em transformada Z, formas de onda, respostas e frequência, espectros e sensibilidades.

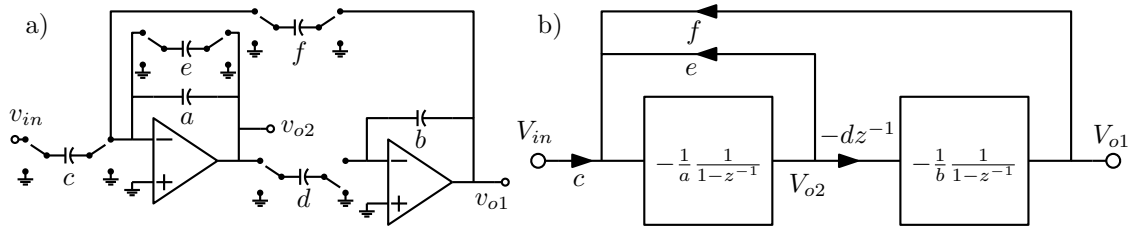


Figura 8.47: Modelamento do biquad Tow-Thomas (a) por “flow-graph” (b).

$$\frac{V_{o21}}{V_{in1}}(z) = \frac{-\frac{c}{a}z(z-1)}{\left(1 + \frac{e}{a}\right)z^2 + \left(\frac{df}{ab} - \frac{e}{a} - 2\right) + 1}$$

$$\frac{V_{o11}}{V_{in1}}(z) = \frac{-\frac{cd}{ab}z}{\left(1 + \frac{e}{a}\right)z^2 + \left(\frac{df}{ab} - \frac{e}{a} - 2\right) + 1}$$

Nos dois casos existem dois polos no plano Z, usualmente complexos. A função V_{o21}/V_{in1} tem zeros em $z = 1$, o que corresponde a $\omega = 0$. Com o efeito dos polos, gera um filtro passa-faixa. A função V_{o11}/V_{in1} tem apenas o efeito dos polos, gerando um filtro passa-baixas. Os zeros em zero são apenas um adiantamento de um período. Os zeros no infinito que as duas funções tem na forma com tempo contínuo aparecem apenas como uma atenuação, que é máxima próximo à metade da frequência de chaveamento. O projeto direto em Z pode ser feito pela comparação de coeficientes. Seja a função passa-baixas, que em transformada Z teria a forma:

$$T(z) = \frac{k_0}{z^2 + a_1z + a_0} = \frac{\frac{k_0}{a_0}}{\frac{1}{a_0}z^2 + \frac{a_1}{a_0}z + 1}$$

Comparando com a fórmula para V_{o11}/V_{in1} obtida da análise, ignorando a inversão:

$$\frac{cd}{ab} = \frac{k_0}{a_0}; \quad 1 + \frac{e}{a} = \frac{1}{a_0}; \quad \frac{df}{ab} - \frac{e}{a} - 2 = \frac{a_1}{a_0}$$

Pode-se normalizar $c = d = 1$ e também fazer $b = a$, resultando em:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{k_0}{a_0} \therefore a = \sqrt{\frac{a_0}{k_0}}$$

$$e = a \left(\frac{1}{a_0} - 1 \right) \therefore e = \sqrt{\frac{a_0}{k_0}} \left(\frac{1}{a_0} - 1 \right)$$

$$f = a^2 \left(\frac{a_1}{a_0} + 2 + \frac{1}{a_0} - 1 \right) \therefore f = \frac{a_1}{k_0} + \frac{1}{k_0} + \frac{a_0}{k_0}$$

Exemplo: O filtro projetado a partir da substituição de resistores, com $Q = 5$ resultaria em $a = b = 1$, $e = \frac{T}{5}$, e $c = d = f = T$. Com o nível de impedância como no projeto acima os valores seriam $a = b = \frac{1}{T}$, $e = \frac{1}{5}$, e $c = d = f = 1$. A função de transferência do filtro passa-baixas fica como:

$$\frac{V_{o11}}{V_{in1}}(z) = \frac{-\frac{cd}{ab}z}{\left(1 + \frac{e}{a}\right)z^2 + \left(\frac{df}{ab} - \frac{e}{a} - 2\right) + 1} = \frac{-T^2z}{\left(1 + \frac{T}{5}\right)z^2 + \left(T^2 - \frac{T}{5} - 2\right) + 1}$$

Usando $T = \frac{2\pi}{10}$, para 10 amostras por ciclo na frequência de ressonância, ou razão de 10 entre a frequência de chaveamento e a de ressonância, o gráfico de $\frac{V_{o11}}{V_{in1}}(z)$ para $z = e^{j\omega T}$ fica como na figura 8.48, para chaveamento normalizado em 10 Hz²⁵. Notar que o ganho em baixa frequência obtido é a metade do do filtro original, -6.0206 dB, pois é considerado que a função só existe na metade do tempo. A função acima dá o ganho correto, 1, para $z = 1$. Somando a outra função não nula, $\frac{V_{o12}}{V_{in1}}(z)$, idêntica a menos de um adiantamento de meio período (multiplicação por $z^{\frac{1}{2}}$), o ganho simulado fica correto. Adicionando a correção para amostragem e retenção, a curva obtida fica como na figura 8.49.

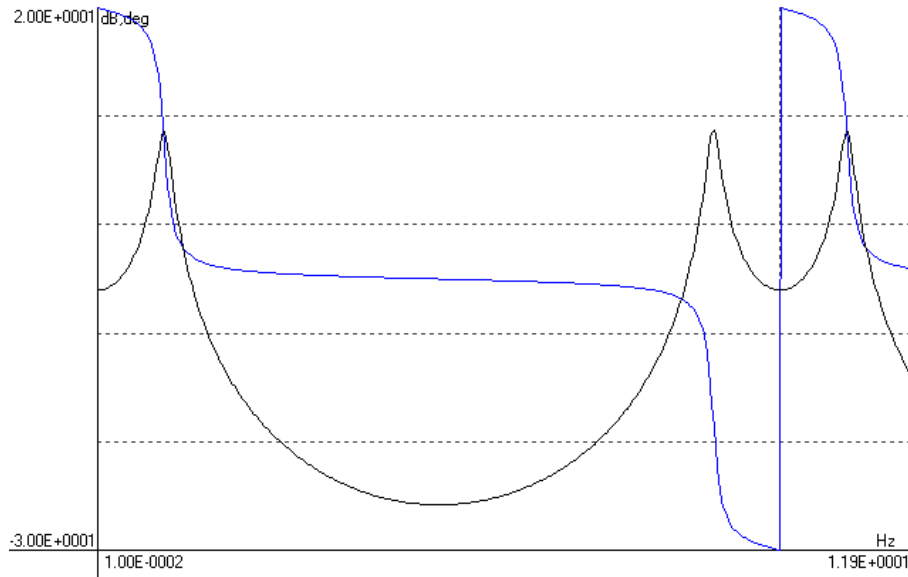


Figura 8.48: Resposta em frequência para a função $\frac{V_{o11}}{V_{in1}}$, para amostragem impulsional. Módulo em dB e fase em graus ($\pm 180^\circ$).

O biquad Tow-Thomas não permite a realização de zeros finitos de transmissão, que em um filtro em Z estariam em pares conjugados sobre o círculo unitário. Um biquad completo em capacitores chaveados, que os permite, é mostrado na figura 8.50, juntamente com sua representação simplificada. As equações para sua análise são:

$$V_{o2} = -\frac{1}{a} \frac{1}{1 - z^{-1}} (cV_{in} + eV_{o1} + f(1 - z^{-1})V_{o1})$$

$$V_{o1} = -\frac{1}{b} \frac{1}{1 - z^{-1}} (-dz^{-1}V_{o2} + gV_{in} + h(1 - z^{-1})V_{in})$$

A função $V_{o11}/V_{in1}(z)$, para $C_a = C_b$ normalizados para 1 F, resulta em um “biquad” completo:

$$\frac{V_{o11}}{V_{in1}}(z) = -\frac{(g + h)z^2 + (cd - g - 2h)z + h}{z^2 + (de + df - 2)z + 1 - df} = -\frac{b_2z^2 + b_1z + b_0}{z^2 + a_1z + a_0}$$

O projeto normalizado é então completado, por comparação de coeficientes, na forma:

²⁵Simulação com o programa ASIZ, numerador parcial 1,1 com amostragem impulsional. A próxima curva usa o numerador completo, com amostragem “sample and hold”.

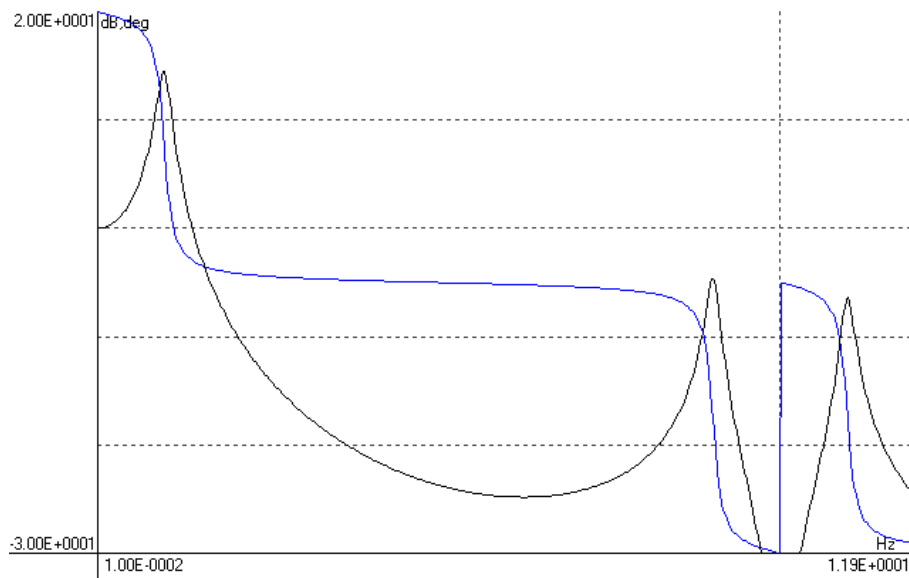


Figura 8.49: Resposta em frequência para a função $\frac{V_{o11}}{V_{in1}} + \frac{V_{o12}}{V_{in1}}$, com correção para amostragem e retenção. Módulo em dB e fase em graus ($\pm 180^\circ$).

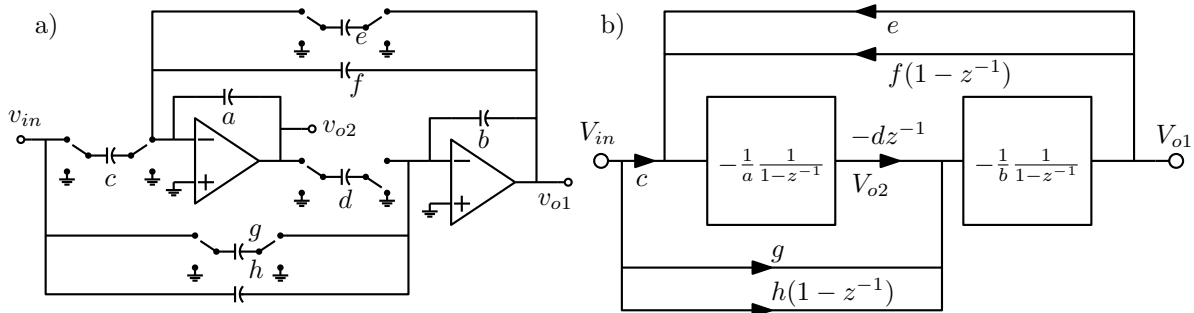


Figura 8.50: Biquad completo (a) e seu modelamento por “flow-graph” (b).

$$C_d = C_e = \sqrt{a_1 + a_0 + 1}; \quad C_f = \frac{1 - a_0}{\sqrt{a_1 + a_0 + 1}}$$

$$C_h = b_0; \quad C_c = \frac{b_2 + b_1 + b_0}{\sqrt{a_1 + a_0 + 1}}$$

A estrutura realiza polos complexos apenas dentro do círculo unitário, pois $C_f \geq 0$, e com $C_h \geq 0$ não realiza numeradores úteis como $(z^2 - 1)^{26}$. Naturalmente, qualquer “biquad” RC-ativo pode ser convertido para a forma em capacitores chaveados e projetado aproximadamente por substituição de resistores por capacitores chaveados. O projeto direto em transformada Z, entretanto, exige aproximações adequadas.

²⁶Numerador para um filtro passa-faixa bilinear.

8.4.3 Transformações de “s” para “z”

O projeto direto de “biquads” em transformada Z requer as aproximações também em transformada Z. Transformações entre os domínios “s” e “z” podem ser obtidas observando-se as fórmulas para integração discretizada. Já se viu que os integradores básicos em capacitores chaveados realizam as integrações de Euler, o que gera as transformações:

$$\text{Transformação “forward” de Euler: } s = \frac{z-1}{T} \therefore z = sT + 1$$

$$\text{Transformação “backward” de Euler: } s = \frac{z-1}{zT} \therefore z = \frac{1}{1-sT}$$

Estas transformações geram significantes distorções nas curvas de resposta em frequência, correspondendo à imperfeição dos métodos de integração. A transformação “forward” de Euler mapeia o eixo imaginário em uma reta passando por $z = 1$ para $\omega = 0$, e coloca polos complexos próximos ao eixo imaginário mais próximos do círculo unitário do que deveriam estar, possivelmente fora do círculo, causando instabilidade. A aproximação “backward” de Euler faz o oposto, mapeando o eixo imaginário em um círculo dentro do lado direito do círculo unitário passando por $z = 1$ e $z = 0$, onde $\omega = \infty$ fica mapeada. Os fatores de qualidade de polos complexos ficam reduzidos²⁷. Ambas não mapeiam zeros sobre o eixo imaginário em zeros sobre o círculo unitário. Uma melhor transformação é a transformação bilinear, que corresponde à integração pelo método dos trapézios:

$$\text{Transformação bilinear: } s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \therefore z = \frac{2+sT}{2-sT}$$

A transformação bilinear mapeia o eixo imaginário sobre o círculo unitário, mapeando a origem $s = 0$ em $z = 1$ e $s = \infty$ em $z = -1$. Assim, polos e zeros tem seus fatores de qualidade mantidos, ocorrendo apenas uma compressão em frequência. Isto pode ser verificado calculando-se s para $z = e^{j\omega T}$, o que resulta em um valor imaginário correspondendo à frequência do equivalente contínuo no tempo, que dá $s = j\omega$ para $z = -1$, ou $\omega = \frac{\pi}{T}$, a metade da frequência de chaveamento:

$$s = \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{e^{j\omega \frac{T}{2}} + e^{-j\omega \frac{T}{2}}} = j \frac{2}{T} \frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{2 \cos \frac{\omega T}{2}} = j \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$$

Uma outra fórmula de integração útil é a de ponto médio, ou transformação LDI, de “lossless discrete integration”, que resulta em:

$$\text{Transformação de ponto médio: } s = \frac{z-1}{Tz^{\frac{1}{2}}} \therefore z = \left(\frac{sT + \sqrt{s^2 T^2 + 4}}{2} \right)^2$$

Esta transformação também mapeia o eixo imaginário no círculo unitário, como pode ser mostrado da mesma forma usada para a transformação bilinear:

$$s = \frac{1}{T} \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega \frac{T}{2}}} = \frac{1}{T} \frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{1} = j \frac{2}{T} \sin \frac{\omega T}{2}$$

O mapeamento, entretanto, só vai até a frequência $\omega = \frac{2}{T}$, mapeada em $z = -1$, a metade da frequência de chaveamento, resultando em uma expansão na frequência. Nas outras três transformações, basta partir da função de transferência em transformada de Laplace e substituir s pela expressão para z . Na transformação LDI isto não pode ser feito, pois resultaria em uma função de transferência em $z^{\frac{1}{2}}$,

²⁷Notar a relação com as condições de estabilidade para os métodos de integração quando usados na análise de circuitos no domínio do tempo.

que fica também instável, com metade dos polos fora do círculo unitário²⁸. A transformação pode ser feita, entretanto, mapeando-se os polos e zeros pela fórmula para z (o que pode ser feito com as outras transformações também). A figura 8.51 mostra como fica o mapeamento do eixo imaginário $s = j\omega$ e de polos e zeros para estas transformações, e o tipo de distorção a esperar.

8.4.4 Predistorção em frequência

Não há muito o que fazer para corrigir os erros introduzidos pelas transformações de Euler, mas no caso das transformações bilinear e LDI pode ser feita uma predistorção em frequência, com as frequências características da aproximação em tempo contínuo predistorcidas de forma a que a versão em tempo discreto as coloque onde desejado. Basta aplicar as fórmulas obtidas acima de mapeamento do eixo imaginário:

$$\text{Transformação bilinear: } \Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$$

$$\text{Transformação LDI: } \Omega = \frac{2}{T} \sin \frac{\omega T}{2}$$

Exemplo: Seja projetar um filtro elíptico de ordem 4, com máxima atenuação na banda passante de 1 dB, mínima atenuação na banda de rejeição de 40 dB e razão entre frequência de chaveamento e borda da banda passante de 10. O filtro pode ser construído com dois biquads completos em cascata. A aproximação é obtida partindo-se de uma aproximação contínua com borda da banda passante em 1 rad/s. Primeiramente a aproximação é escalada em frequência pelo fator de predistorção, com $T = \frac{10}{2\pi}$, para ter a borda da banda passante em 1.282990585 rad/s. A seguir é aplicada a transformação, ou pela substituição de s pela expressão da transformação, ou pelo recálculo dos pólos e zeros. Os biquads são obtidos como no caso contínuo, agrupando-se pólos com zeros próximos, procurando colocar primeiro seções de banda mais larga, e realizando uma equalização de faixa dinâmica²⁹. Resultam os dois biquads:

$$T_1(z)_{BIL} = \frac{b_{21}z^2 + b_{11}z + b_{01}}{z^2 + a_{11}z + a_{01}} \quad T_2(z)_{BIL} = \frac{b_{22}z^2 + b_{12}z + b_{02}}{z^2 + a_{12}z + a_{02}}$$

$$b_{21} : 0.138298988544728 \quad a_{11} : -1.508807836284854$$

$$b_{11} : -0.157791410559676 \quad a_{01} : 0.628635879272809$$

$$b_{01} : 0.138298988544728 \quad a_{12} : -1.524201703214023$$

$$b_{22} : 0.142260613232422 \quad a_{02} : 0.883431820582814$$

$$b_{12} : 0.038397948189869$$

$$b_{02} : 0.142260613232422$$

Realizando o projeto usando a estrutura da figura 8.50 resultam os valores abaixo, normalizados. Os capacitores g são nulos pois os zeros de transmissão estão sobre o círculo unitário:

Biquad 1 bilinear	Biquad 2 bilinear
$C_{a1} : 1 \text{ F}$	$C_{a2} : 1 \text{ F}$
$C_{b1} : 1 \text{ F}$	$C_{b2} : 1 \text{ F}$
$C_{c1} : 0.343211010410983 \text{ F}$	$C_{c2} : 0.538775034902944 \text{ F}$
$C_{d1} : 0.346161873966436 \text{ F}$	$C_{d2} : 0.599358087764561 \text{ F}$
$C_{e1} : 0.346161873966436 \text{ F}$	$C_{e2} : 0.599358087764561 \text{ F}$
$C_{f1} : 1.07280480219263 \text{ F}$	$C_{f2} : 0.194488373139258 \text{ F}$
$C_{g1} : 0 \text{ F}$	$C_{g2} : 0 \text{ F}$
$C_{h1} : 0.138298988544728 \text{ F}$	$C_{h2} : 0.142260613232422 \text{ F}$

²⁸Seja transformar $T(s) = \frac{A_0 P}{s+P}$: $T(z) = \frac{A_0 P}{\frac{1}{T} \frac{z-1}{z^{1/2}} + P} = \frac{T A_0 P z^{1/2}}{z + T P z^{1/2} - 1}$. Os polos ficam em $z^{1/2} = \frac{-T P \pm \sqrt{T^2 P^2 + 4}}{2}$, um dentro e outro fora do círculo unitário.

²⁹O programa FDSZ realiza todo o cálculo.

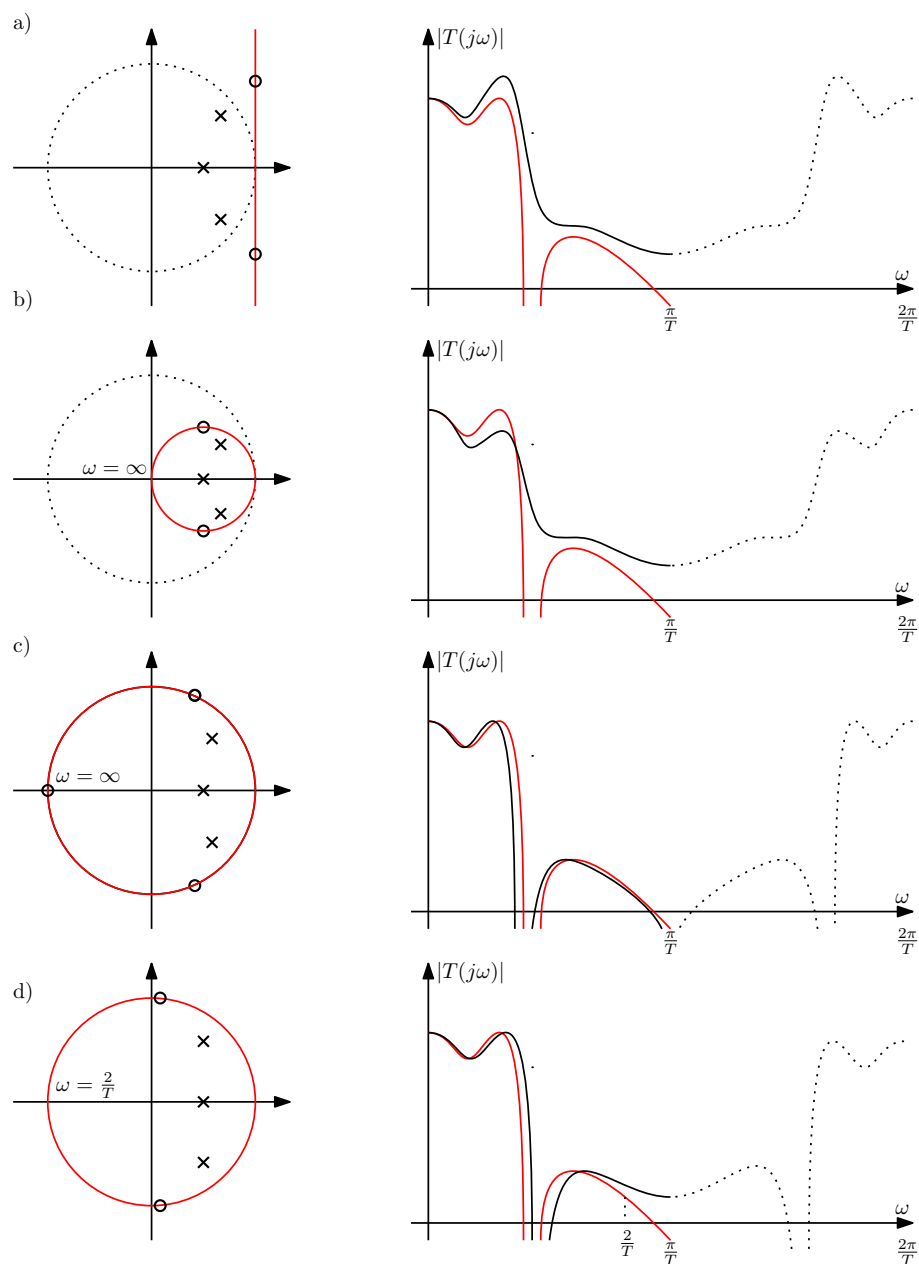


Figura 8.51: Transformações de “s” para “z”. Mapeamento do eixo imaginário $s = j\omega$ e de polos e zeros no plano complexo “z” com o círculo unitário indicado, e efeito em um filtro elíptico de ordem 3, para as transformações: a) Forward. b) Backward. c) Bilinear. d) LDI.

O módulo da resposta obtido é mostrado na figura 8.52, para chaveamento normalizado em 10 Hz³⁰. A curva com os zeros de transmissão corretos e atenuação de 6.0206 dB corresponde à função de transferência

³⁰Cálculo com o programa ASIZ.

$\frac{V_{o1}}{V_{in1}}$, usada no projeto, como esperado. A função de transferência completa não fica perfeita, pois a estrutura não atualiza as saídas apenas uma vez por período, introduzindo um pequeno erro. Notar a frequência infinita do filtro contínuo mapeada em 5 Hz. O projeto equalizou os máximos níveis de saída dos dois biquads, mas não os níveis de saída dos primeiros amplificadores dos biquads. Os níveis obtidos ficaram adequados, entretanto.

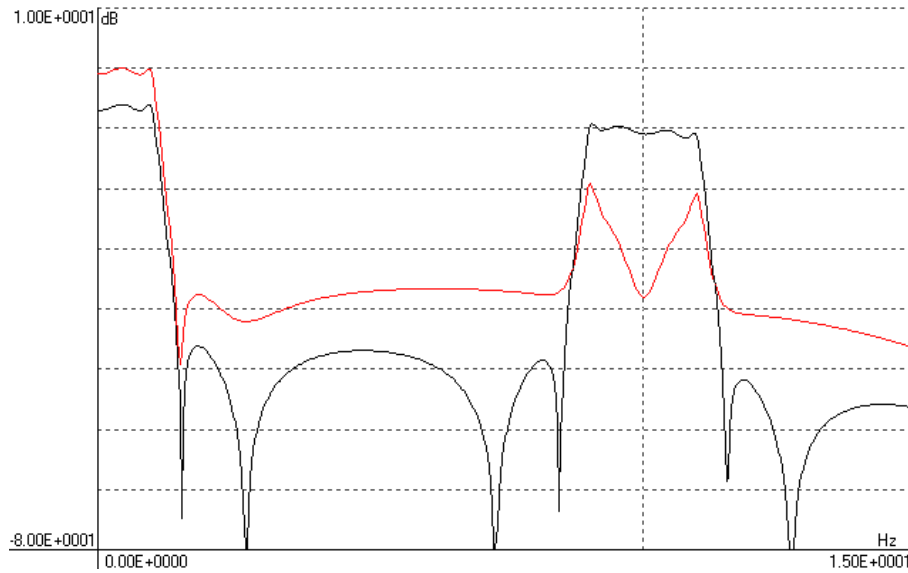


Figura 8.52: Módulos da função de transferência $\frac{V_{o1}}{V_{in1}}$, abaixo, e da função de transferência global, acima. A correção para amostragem e retenção zero (no caso imperfeitamente, porque há transmissão direta de sinal até a saída através dos caminhos capacitivos) a função principal na frequência de amostragem (10 Hz), mas zera a função $\frac{V_{o1}}{V_{in1}}$ apenas no dobro dela.

O mesmo projeto pode ser feito com a aproximação LDI. A função contínua é escalada em frequência, agora para borda da banda passante em 0.897748946 rad/s. Os polos e zeros são transformados pela transformação LDI e a faixa dinâmica ajustada. No caso o segundo par de zeros de transmissão do filtro contínuo fica acima da máxima frequência mapeada pela transformação, e não aparece, ficando os zeros mapeados no eixo real. Resultam os biquads e elementos abaixo, e as curvas mostradas na figura 8.53. Novamente, apenas a função $\frac{V_{o1}}{V_{in1}}$ é correta.

$$T_1(z)_{LDI} = \frac{b_{21}z^2 + b_{11}z + b_{01}}{z^2 + a_{11}z + a_{01}} \quad T_2(z)_{LDI} = \frac{b_{22}z^2 + b_{12}z + b_{02}}{z^2 + a_{12}z + a_{02}}$$

$b_{21} : 0.022523303026616$	$a_{11} : -1.524815087501837$
$b_{11} : 0.061870172524302$	$a_{01} : 0.634922213322888$
$b_{01} : 0.022523303026616$	
$b_{22} : 0.330402533808818$	$a_{12} : -1.516015454660034$
$b_{12} : -0.333858147960620$	$a_{02} : 0.872226249761641$
$b_{02} : 0.330402533808818$	

Biquad 1 LDI	Biquad 2 LDI
$C_{a1} : 1 \text{ F}$	$C_{a2} : 1 \text{ F}$
$C_{b1} : 1 \text{ F}$	$C_{b2} : 1 \text{ F}$
$C_{c1} : 0.322209359656853 \text{ F}$	$C_{c2} : 0.547802123731895 \text{ F}$
$C_{d1} : 0.331823937986775 \text{ F}$	$C_{d2} : 0.596833976162221 \text{ F}$
$C_{e1} : 0.331823937986775 \text{ F}$	$C_{e2} : 0.596833976162221 \text{ F}$
$C_{f1} : 1.10021533977353 \text{ F}$	$C_{f2} : 0.214085918935067 \text{ F}$
$C_{g1} : 0 \text{ F}$	$C_{g2} : 0 \text{ F}$
$C_{h1} : 0.022523303026616 \text{ F}$	$C_{h2} : 0.330402533808818 \text{ F}$

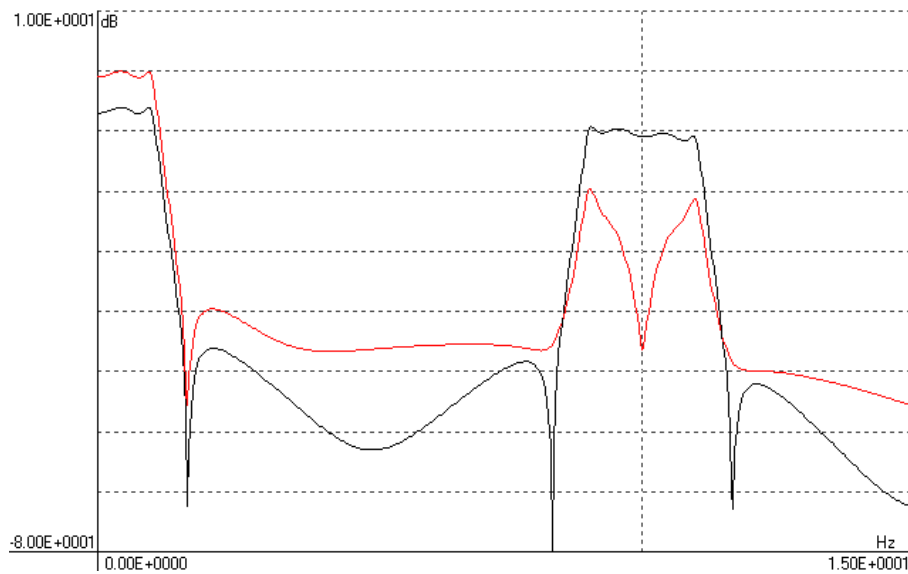


Figura 8.53: Módulos da função de transferência $\frac{V_{o1}}{V_{in1}}$, abaixo, e da função de transferência global, acima, para a transformação LDI. O segundo zero de transmissão da aproximação não aparece, e a seletividade é um pouco menor.

É possível alterar os biquads de forma a obter a função de transferência global correta. O que tem que ser feito é impedir a entrada de sinal na fase ϕ_2 através do capacitor C_h , e impedir que a saída seja modificada na fase ϕ_2 . Isto pode ser obtido amostrando a entrada na fase ϕ_1 e a retendo na fase ϕ_2 ³¹, e trocando as fases das chaves ligadas aos capacitores C_d .

8.4.5 Simulação Redes “ladder” em capacitores chaveados

A simulação de qualquer estrutura baseada em integradores pode ser feita por substituição de resistores por capacitores chaveados. Seja a estrutura normalizada para a simulação de uma rede “ladder” realizando um filtro passa-baixas racional de ordem 5, mostrada na figura 8.54. A substituição de todos os resistores por capacitores chaveados, na forma insensível a capacitâncias parasitas e com os próprios capacitores chaveados fazendo as inversões onde necessário, leva à rede da figura 8.55. Mantendo a normalização, os resistores R_i foram substituídos por capacitores chaveados de valores $C_i = \frac{T}{R_i}$, e chaves redundantes foram combinadas. Qualquer filtro obtido por simulação de equações de estado admite uma realização

³¹Ou colocando uma chave de fase ϕ_1 em série com C_h no primeiro biquad.

assim em capacitores chaveados. A versão final da rede é obtida por uma desnormalização em impedância. Escalamento de faixa dinâmica pode ser feito na rede contínua ou na chaveada, de formas similares.

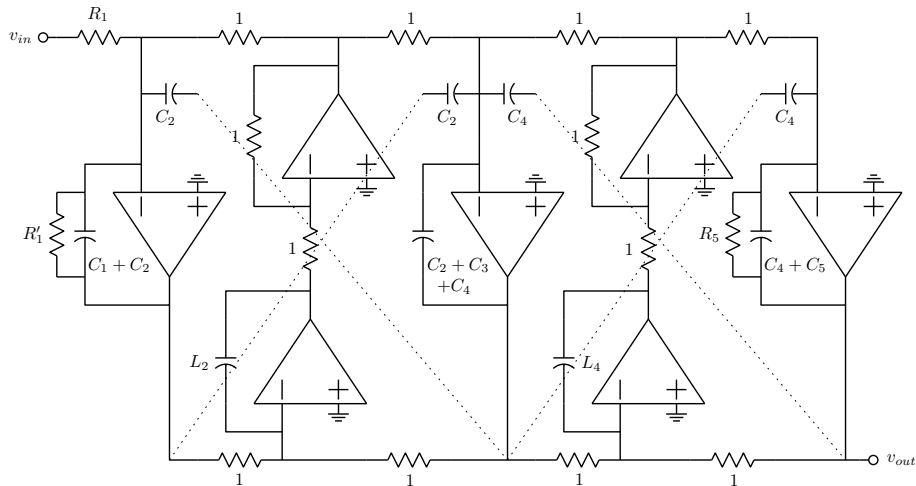


Figura 8.54: Rede “ladder” simulada de ordem 5, normalizada.

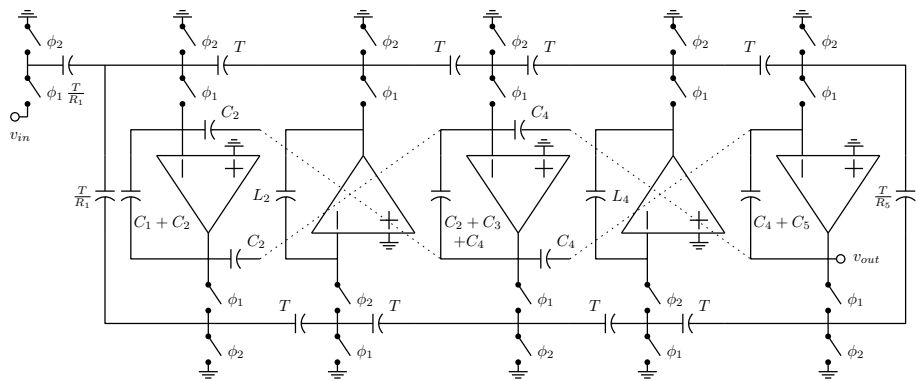


Figura 8.55: Rede “ladder” simulada de ordem 5, com capacitores chaveados, normalizada.

Esta realização não é exata. A estrutura alterna integradores “forward” de Euler (não inversores) e “backward” de Euler (inversores) ao longo da estrutura, o que deveria resultar, em média, em algo semelhante a uma realização LDI. As terminações, entretanto, fazem conexões “instantâneas”, e quebram a exatidão da transformação. Para verificar o que acontece, considere-se a rede da figura 2.34. As equações de estado modificadas em forma integral em transformada de Laplace ficam na forma:

$$V_1 = \frac{1}{s(C_1 + C_2)} \left(\frac{V_{in}}{R_1} - \frac{V_1}{R_1} - I_2 \right) + \frac{C_2}{C_1 + C_2} V_3$$

$$I_2 = \frac{1}{sL_2} (V_1 - V_3)$$

$$V_3 = \frac{1}{s(C_2 + C_3)} \left(I_2 - \frac{V_3}{R_3} \right) + \frac{C_2}{C_2 + C_3} V_1$$

Fazendo a substituição $s \rightarrow \frac{1}{T} \frac{1-z^{-1}}{z^{-\frac{1}{2}}}$ e procurando deixar integrações de Euler resulta:

$$V_1 = \frac{T}{(1-z^{-1})(C_1+C_2)} \left(\frac{V_{in}}{R_1} z^{-\frac{1}{2}} - \frac{V_1}{R_1} z^{-\frac{1}{2}} - I_2 z^{-\frac{1}{2}} \right) + \frac{C_2}{C_1+C_2} V_3$$

$$I_2 z^{-\frac{1}{2}} = \frac{T z^{-1}}{(1-z^{-1})L_2} (V_1 - V_3)$$

$$V_3 = \frac{T}{(1-z^{-1})(C_2+C_3)} \left(I_2 z^{-\frac{1}{2}} - \frac{V_3}{R_3} z^{-\frac{1}{2}} \right) + \frac{C_2}{C_2+C_3} V_1$$

O atraso na entrada e a simulação da corrente I_2 com atraso de meio período não são problema, mas não há como obter as versões atrasadas de V_1 e V_3 que aparecem na simulação das terminações (marcadas) com a realização por substituição de resistores, que implementa os termos correspondentes sem os atrasos, como na figura 8.56³².

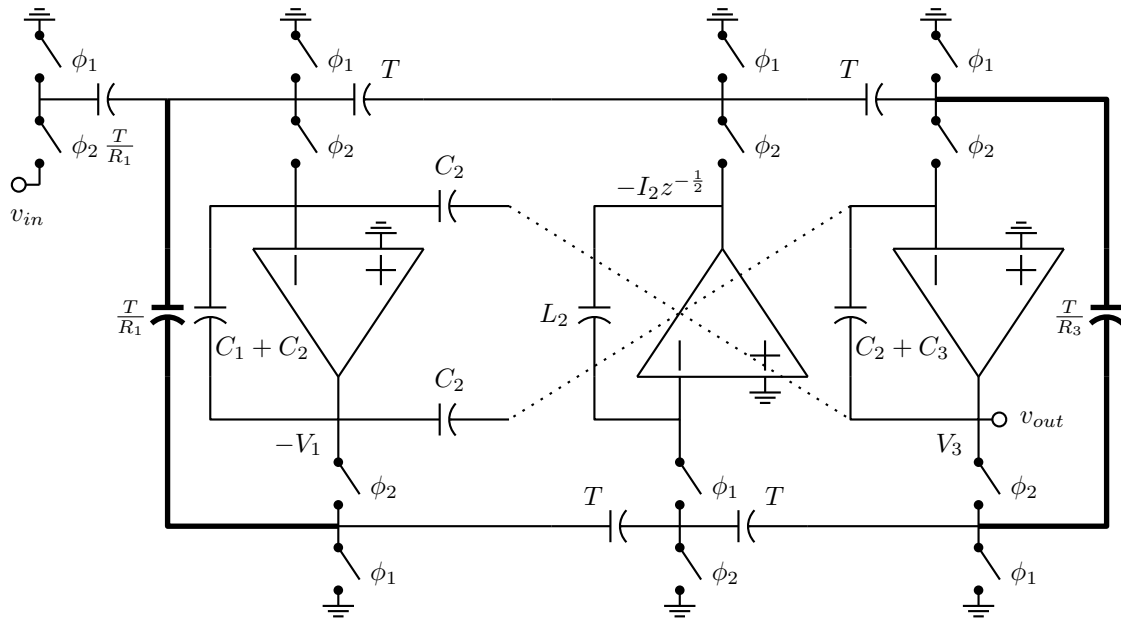


Figura 8.56: Rede “ladder” simulada em capacitores chaveados de ordem 3 implementando a transformação LDI aproximada, normalizada. Os capacitores marcados não realizam as terminações corretamente.

8.4.5.1 Rede “ladder” bilinear exata em capacitores chaveados com integradores de Euler

É possível obter realizações exatas bilineares com pequenas alterações na rede em capacitores chaveados. Para ver os problemas que aparecem, sejam novamente as equações de estado modificadas em forma integral para a rede da figura 2.34, com a transformação bilinear $s \rightarrow \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, com os termos $\frac{1+z^{-1}}{2}$ (média de duas amostras sucessivas) distribuídos nos termos a integrar:

³²Por conveniência, ver a síntese bilinear adiante, a entrada é mostrada amostrada na fase ϕ_2 .

$$V_1 = \frac{T}{(1-z^{-1})(C_1+C_2)} \left(\frac{V_{in}}{R_1} \frac{1+z^{-1}}{2} - \frac{V_1}{R_1} \frac{1+z^{-1}}{2} - I_2 \frac{1+z^{-1}}{2} \right) + \frac{C_2}{C_1+C_2} V_3$$

$$I_2 = \frac{T}{(1-z^{-1})L_2} \frac{1+z^{-1}}{2} (V_1 - V_3)$$

$$V_3 = \frac{T}{(1-z^{-1})(C_2+C_3)} \left(I_2 \frac{1+z^{-1}}{2} - \frac{V_3}{R_3} \frac{1+z^{-1}}{2} \right) + \frac{C_2}{C_2+C_3} V_1$$

Nota-se que existem três problemas a tratar: As integrações bilineares das correntes nas terminações, das correntes nos indutores, e da entrada. As terminações podem ser tratadas como mostrado na figura 8.57. Capacitores C em paralelo com as terminações R são divididos em dois, um deles com valor $C_s = \frac{T}{2R}$, tratado como impedância³³. Com a aplicação da transformação bilinear resultam vários cancelamentos e desaparece a integração bilinear da corrente $\frac{V}{R}$ na terminação, restando uma integração “forward” de Euler:

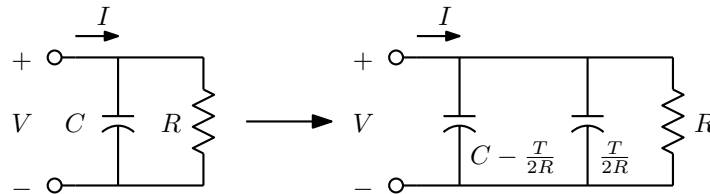


Figura 8.57: Transformação do protótipo onde existem resistores, para realização bilinear com integradores de Euler.

$$V = \frac{1}{s(C - C_s)} \left(I - \frac{V}{R} - sC_s V \right) \therefore$$

$$V = \frac{T/(C - C_s)}{1 - z^{-1}} \left(\frac{1+z^{-1}}{2} I - \frac{1+z^{-1}}{2} \frac{V}{R} - \frac{1+z^{-1}}{2} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \frac{V}{2R} \right) \therefore$$

$$V = \frac{T/(C - C_s)}{1 - z^{-1}} \left(\frac{1+z^{-1}}{2} I - \frac{V}{2R} - \frac{V}{2R} z^{-1} - \frac{V}{2R} + \frac{V}{2R} z^{-1} \right) \therefore$$

$$V = \frac{T/(C - C_s)}{1 - z^{-1}} \left(\frac{1+z^{-1}}{2} I - \frac{V}{R} \right)$$

A implementação é como na figura 8.58. Basta reduzir os valores dos capacitores C_i em paralelo com as terminações R_i para $C_i - \frac{T}{2R_i}$. As integrações das correntes devem ser das médias entre valores sucessivos.

O tratamento das integrações das correntes nos indutores é feito com a transformação mostrada na figura 8.59. Em paralelo com cada indutor L é acrescentado um capacitor negativo de valor $-C_L = -\frac{T^2}{4L}$, com um capacitor positivo $+C_L$ também acrescentado. A corrente simulada passa a ser no circuito paralelo L, C_L . A aplicação da transformação bilinear também causa uma série de cancelamentos, restando uma integração “backward” de Euler da tensão, gerando uma corrente multiplicada pelo termo $\frac{1+z^{-1}}{2}$, necessário para as integrações nas terminações.

³³A mesma ideia se aplicaria a qualquer resistor no protótipo passivo.

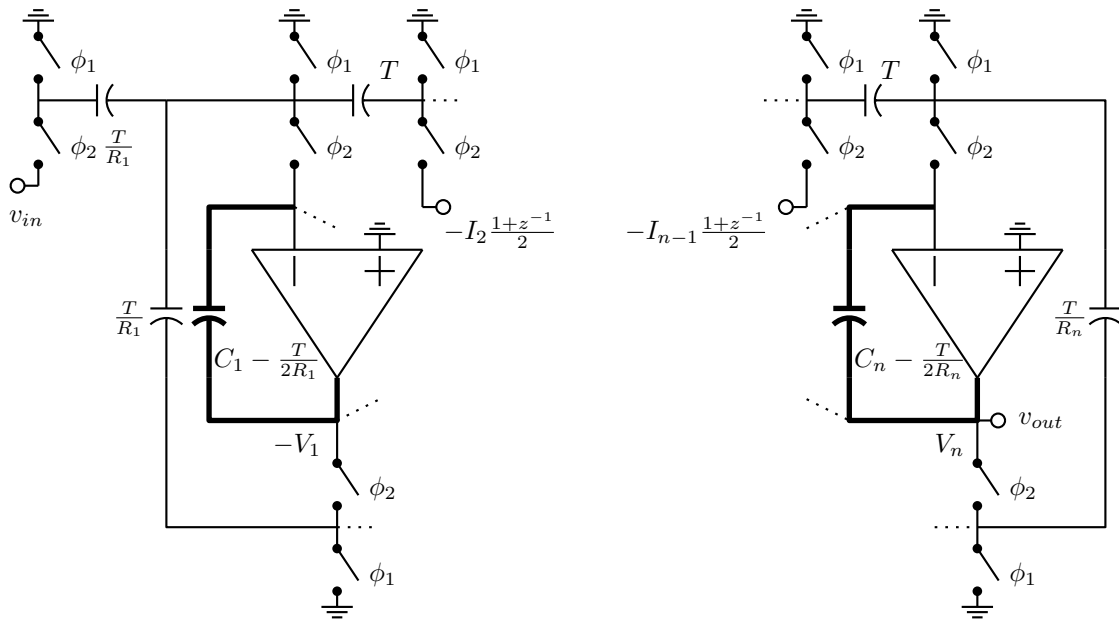


Figura 8.58: Modificações nas estruturas ligadas às terminações.

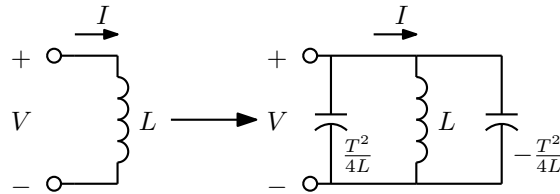


Figura 8.59: Transformação do protótipo para realizar integrações bilineares de correntes em indutores.

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{sL} - sC_L}\right) I = V \therefore \left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{T}{2} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} L} - \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \frac{T^2}{4L}}\right) I = V \therefore$$

$$\frac{L}{\frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{T}{2} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} I = V \therefore \frac{L \frac{T^2}{4} (1-z^{-1})(1+z^{-1})}{\cancel{\chi + 2z^{-1} + z^2} - \cancel{\chi + 2z^{-1} - z^2}} I = V \therefore$$

$$\frac{1+z^{-1}}{2} I = \frac{Tz^{-1}}{L(1-z^{-1})} V$$

A equação diz que a única transformação necessária é a adição dos capacitores $C_{Li} = \frac{T^2}{4L_i}$ em paralelo com os indutores L_i no protótipo passivo. Eles aparecem como “capacitores cruzados” na realização ativa, mesmo em aproximações polinomiais. O integrador fica como na figura 8.60, apenas um integrador não inversor normal, gerando a corrente simulada na forma de média entre valores sucessivos.

Precisa-se ainda da integração bilinear da entrada. Uma forma de realizá-la é usando o integrador mostrado na figura 8.61a. Ele tem a estrutura de um integrador não inversor, com um capacitor e

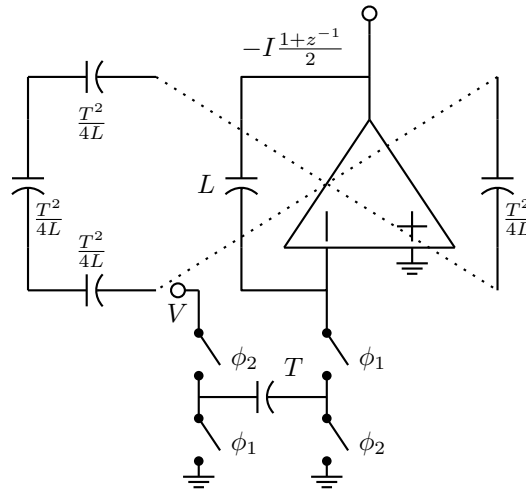


Figura 8.60: Modificações nas estruturas relacionadas a indutores.

uma chave extras. Seu funcionamento é deduzido calculando-se as funções de transferência, a partir dos modelos da figura 8.61c. A entrada deve ser amostrada na fase ϕ_1 e retida, de forma que possa-se escrever $V_{in1} = V_{in2}z^{\frac{1}{2}}$. Dos modelos vem:

$$\begin{aligned} \phi_1 : V_{C31} &= V_{C32}z^{-\frac{1}{2}}; & V_{C11} &= V_{in1}; & V_{o1} &= V_{C21} = V_{C22}z^{-\frac{1}{2}} \\ \phi_2 : V_{C32} &= V_{in2}; & V_{C12} &= 0; & V_{o2} &= V_{C22} = V_{C21}z^{-\frac{1}{2}} + \frac{C_1}{C_2}V_{C11}z^{-\frac{1}{2}} - \frac{C_1}{2C_2}(V_{in2} - V_{C31}z^{-\frac{1}{2}}) \\ \therefore V_{o2} &= V_{C22} = V_{C22}z^{-1} + \frac{C_1}{C_2}V_{in1}z^{-\frac{1}{2}} - \frac{C_1}{2C_2}(V_{in2} - V_{in2}z^{-1}) \\ \therefore V_{o2} &= V_{o2}z^{-1} + \frac{C_1}{C_2}V_{in2} - \frac{C_1}{2C_2}(V_{in2} - V_{in2}z^{-1}) \\ \therefore \frac{V_{o2}}{V_{in2}}(z) &= \frac{1}{2} \frac{C_1}{C_2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \end{aligned}$$

O circuito realiza uma integração bilinear na função de transferência $\frac{V_{o2}}{V_{in2}}$. A chave simples ϕ_2 poderia ser omitida, deixada sempre fechada, mas aí a saída do integrador somente seria válida na fase ϕ_2 . Com a chave ela varia na fase ϕ_2 e fica retida na fase ϕ_1 . Note-se que a entrada é amostrada e retida na forma oposta, o que complica o uso geral deste integrador para realizar transformações bilineares. Para uso apenas na integração da entrada de um filtro bilinear feito com integradores de Eules, ele é adequado. A chave simples parece tornar o circuito sensível à capacitância no terminal desconectado de C_3 , mas ocorre que na fase ϕ_1 este capacitor recebe alguma carga quando V_{in} varia, com a mesma carga entrando em C_1 , e ambos transferem a carga correta para C_2 na fase ϕ_2 . A rede completa, modificação da rede da figura 8.56 realizando a transformação bilinear, é então a da figura 8.62.

Esta técnica realiza diretamente simulações de redes “ladder” de ordens ímpares. Para ordens pares há o problema da realização de uma das terminações associada a um indutor, o que exige uma técnica diferente da tratada aqui.

Exemplo: Um filtro elíptico passa-baixas de ordem 5, com $A_{max} = 1$ dB e $A_{min} = 40$ dB, normalizado para banda passante em 1 rad/s, resulta nos elementos, para a estrutura “ladder” π convencional:

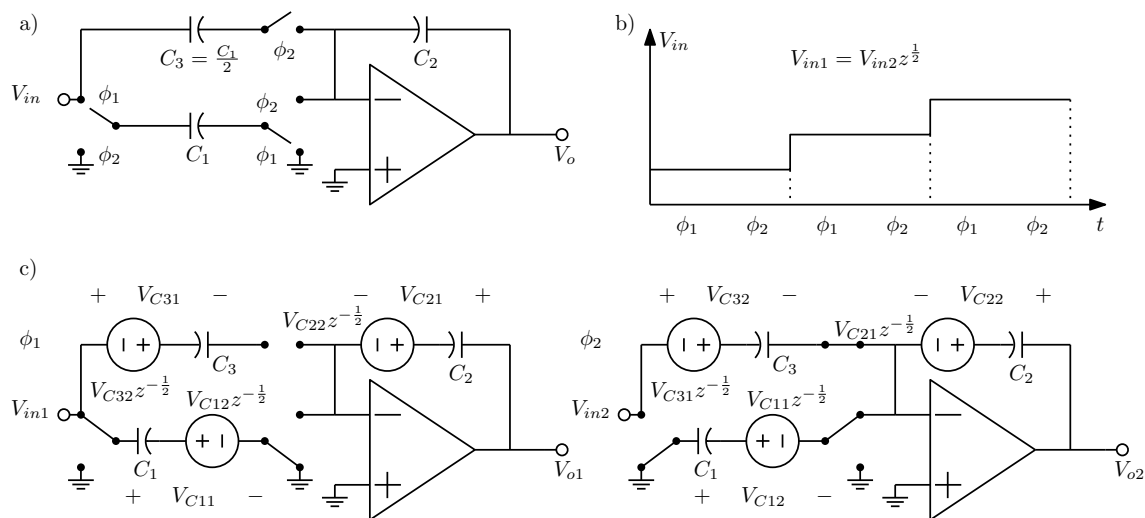


Figura 8.61: a) Integrador bilinear a capacitores chaveados. b) Forma de onda da entrada requerida. c) Modelos para a análise.

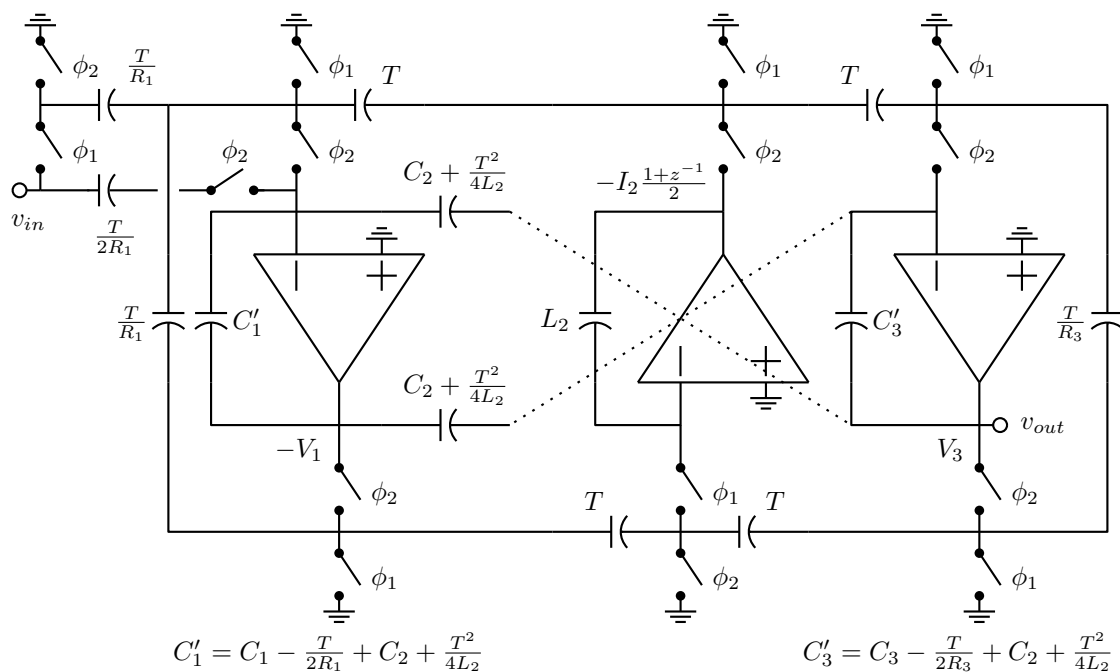


Figura 8.62: Simulação bilinear de uma rede “ladder” passa-baixas de ordem 3.

RG: 1
 RL: 1
 C1: 1.41517470742647
 C2: 1.08537480612191

L2: 5.86082142617873E-1
 C3: 2.13067465696923
 C4: 3.64397675632798E-1
 L4: 8.81627694904598E-1
 C5: 1.84421824323888

A estrutura para a realização bilinear, como desenhada no editor EDFIL, fica como na figura 8.63. As fórmulas listadas na figura, que são avaliadas pelo programa a partir dos valores acima juntamente com outras que geram os valores dos capacitores, geram uma razão entre frequência de chaveamento e borda da banda passante de 10, baixa propositalmente para que as imperfeições apareçam. Os elementos são calculados em função dos elementos da rede passiva e de T como discutido acima. A figura 8.64 mostra a mesma rede, usando a aproximação LDI aproximada.

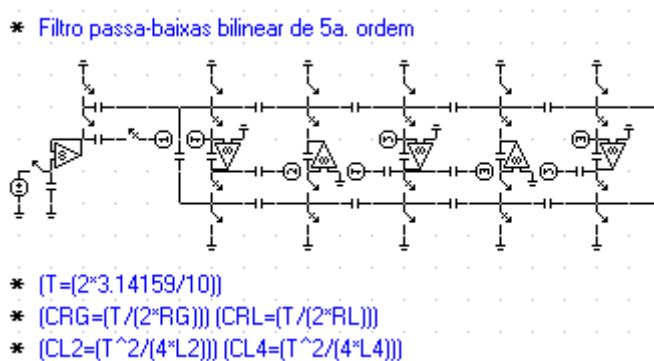


Figura 8.63: Rede “ladder” bilinear de ordem 5 em capacitores chaveados, como desenhada no editor EDFIL.

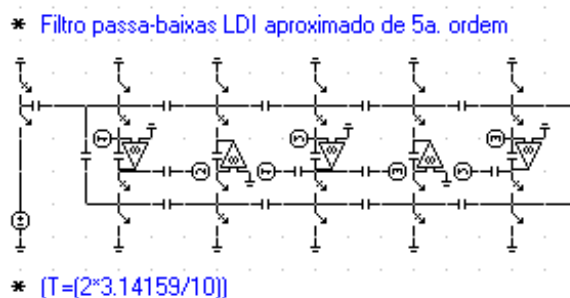


Figura 8.64: Rede “ladder” LDI aproximada.

Não foi realizada nenhuma predistorção em frequência. A figura 8.65 mostra os módulos das respostas em frequência obtidas nos dois casos³⁴, para frequência de chaveamento normalizada para 10 Hz. Como a razão entre a frequência de chaveamento e a borda da banda passante é baixa, a forma LDI aproximada resulta em significativa distorção, enquanto que a forma bilinear fica com a forma exata, a menos do efeito

³⁴Programa ASIZ, com elementos normalizados, amostragem e retenção.

da amostragem. A forma LDI fica com banda passante terminando pouco acima de 1 Hz, enquanto na forma bilinear ela termina pouco abaixo de 1 Hz. A forma bilinear tem zeros de transmissão em 5 Hz, metade da frequência de chaveamento.

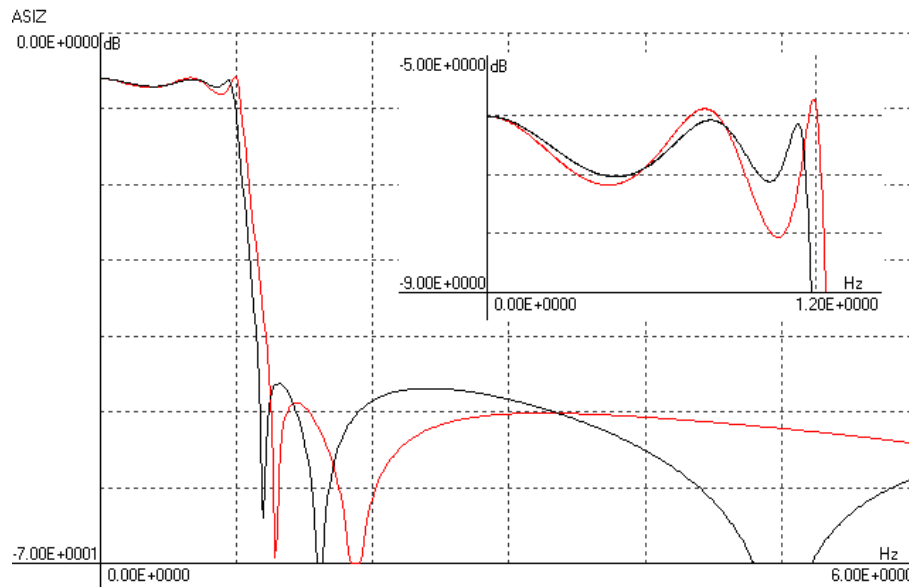


Figura 8.65: Comparação entre os módulos das respostas em frequência obtidas para um filtro elíptico de ordem 5, para uma “ladder” bilinear e uma “ladder” LDI aproximada. No detalhe a banda passante.

8.5 Filtros a corrente chaveada

Esta técnica também produz filtros operando com sinais discretizados no tempo. Ela usa apenas transistores, como transdutores, chaves e fontes de corrente, com capacitâncias intrínsecas dos transistores usadas para memória. Uma célula básica é o circuito de amostragem e retenção de corrente mostrado na figura 8.66, conhecido como célula de “primeira geração”. É composta de dois transistores formando um espelho de corrente com uma chave entre eles e duas fontes de corrente, escaladas de acordo com os transistores. Se, com a chave aberta é injetada uma corrente i_{in} , com a chave aberta o capacitor C_{gs} do transistor de saída retém a carga no seu “gate”, e a corrente de saída continua a mesma, $i_o = -ki_{in}$. Usando transformada Z, de forma similar ao feito para circuitos a capacitores chaveados, pode-se escrever:

$$I_{o1}(z) = -kI_{in1}(z)$$

$$I_{o2}(z) = -kI_{in1}(z)z^{-\frac{1}{2}}$$

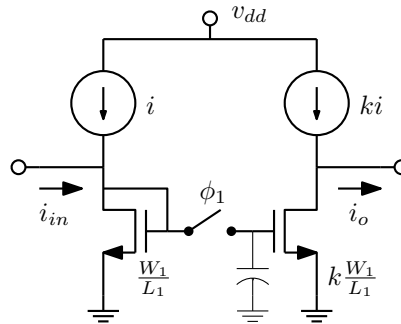


Figura 8.66: Célula de memória de corrente chaveada, de “primeira geração”.

Acoplando duas destas células é simples construir uma célula de atraso de um período, como na figura 8.67. Resulta $I_{o1}(z) = ABCDI_{in1}(z)z^{-\frac{1}{2}}$.

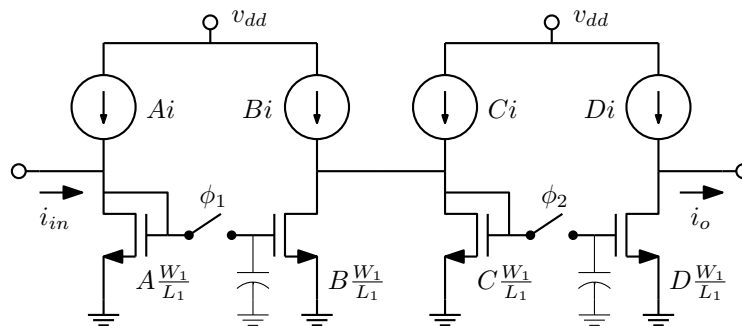


Figura 8.67: Célula de atraso completo, de “primeira geração”.

Realimentando um atraso completo, tem-se um integrador discreto, como na figura 8.68. Como o processamento é em corrente, saídas do integrador são obtidas por cópias das correntes nos transistores de saída dos espelhos³⁵. Esta técnica requer apenas bom casamento entre os transistores. Não tem importância que as transcondutâncias e capacitâncias sejam não lineares.

³⁵Para simplificar a notação, as razões de aspecto W_1/L_1 e os capacitores C_{gs} foram omitidos. Os transistores tem cor-

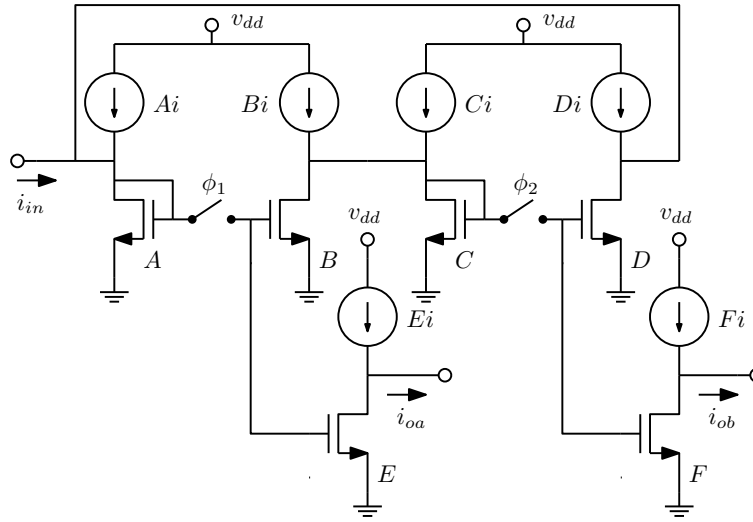


Figura 8.68: Integrador a corrente chaveada de “primeira geração”.

A análise em transformada Z é similar à feita para os integradores a capacitores chaveados, mas nesse caso considerando as correntes nos transistores, designados por suas razões de aspecto A , B , C e D . As equações básicas são:

$$\begin{array}{ll} \text{Fase } \phi_1 & \text{Fase } \phi_2 \\ I_{A1} = I_{in1} - I_{D1} & I_{A2} = I_{in2} - I_{D2} \\ I_{B1} = \frac{B}{A} I_{A1} & I_{B2} = I_{B1} z^{-\frac{1}{2}} \\ I_{C1} = -I_{B1} & I_{C2} = -I_{B2} \\ I_{D1} = I_{D2} z^{-\frac{1}{2}} & I_{D2} = \frac{D}{C} I_{C2} \end{array}$$

Resolvendo para as correntes que serão copiadas nas saídas, I_{B1} e I_{D1} :

$$\begin{aligned} I_{B1} &= \frac{B}{A} (I_{in1} - I_{D1}) = \frac{B}{A} \left(I_{in1} - \frac{D}{C} I_{B1} z^{-\frac{1}{2}} \right) \\ I_{D1} &= \frac{D}{C} I_{C2} z^{-\frac{1}{2}} = -\frac{D}{C} I_{B2} z^{-\frac{1}{2}} = -\frac{D}{C} I_{B1} z^{-1} = \\ &= -\frac{DB}{CA} I_{A1} z^{-1} = -\frac{DB}{CA} (I_{in1} - I_{D1}) z^{-1} \end{aligned}$$

As duas funções de transferência internas são então:

$$\frac{I_{B1}}{I_{in1}}(z) = \frac{\frac{B}{A}}{1 - \frac{DB}{CA} z^{-1}}; \quad \frac{I_{D1}}{I_{in1}}(z) = \frac{-\frac{DB}{CA} z^{-1}}{1 - \frac{DB}{CA} z^{-1}}$$

Considerando as cópias para as saídas, e que I_{in2} não influencia as saídas, tem-se as quatro funções de transferência para as duas saídas:

rentes de polarização proporcionais a suas razões de aspecto, ou, mais usualmente, a suas larguras W , com os comprimentos L fixos.

$$\begin{aligned} \frac{I_{oa1}}{I_{in1}}(z) &= \frac{-\frac{E}{A}}{1-\frac{DB}{CA}z^{-1}} & \frac{I_{ob1}}{I_{in1}}(z) &= \frac{\frac{FB}{CA}z^{-1}}{1-\frac{DB}{CA}z^{-1}} \\ \frac{I_{oa2}}{I_{in1}}(z) &= \frac{-\frac{E}{A}z^{-\frac{1}{2}}}{1-\frac{DB}{CA}z^{-1}} & \frac{I_{ob1}}{I_{in1}}(z) &= \frac{\frac{FB}{CA}z^{-\frac{1}{2}}}{1-\frac{DB}{CA}z^{-1}} \\ \frac{I_{oa1}}{I_{in2}}(z) &= \frac{I_{oa2}}{I_{in2}}(z) = 0 & \frac{I_{ob1}}{I_{in2}}(z) &= \frac{I_{ob2}}{I_{in2}}(z) = 0 \end{aligned}$$

Estas funções correspondem a integradores sem perdas se $DB = CA$, e são idênticas às obtidas para os integradores a capacitores chaveados se os quatro transistores do integrador são iguais. Um único integrador tem saídas possíveis “backward” e “forward” de Euler. É possível então copiar as estruturas para filtros já desenvolvidas para capacitores chaveados, apenas considerando que o processamento em corrente chaveada é com sinais de corrente em vez de sinais de tensão.

8.5.1 Células de memória de baixa sensibilidade

A célula de integração com quatro transistores requer casamento entre eles para gerar um integrador natural, sem perdas. Pode ser verificado que isto resulta em filtros com alta sensibilidade às razões de aspecto daqueles transistores, mesmo quando a versão contínua, ou de capacitores chaveados, sejam de baixa sensibilidade. Uma célula de amostragem e retenção que evita o problema é a de “segunda geração”, mostrada na figura 8.69. Esta célula usa apenas um transistor para memorização e geração da corrente de saída, realizando sua função independentemente de suas dimensões. Uma cascata de duas destas seções, com troca de fases nas chaves, leva ao atraso completo mostrado na figura 8.70. Ela também não é, idealmente, influenciada pelas dimensões dos transistores.

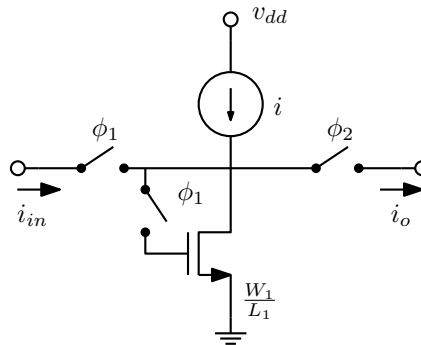


Figura 8.69: Célula de memória de corrente chaveada, de “segunda geração”.

O chaveamento correto desta célula tem que ser mais complexo que apenas o uso de dois sinais sem superposição para ligar as chaves, como requerido pelos circuitos a capacitores chaveados e a corrente chaveada de primeira geração [33]. É necessário abrir as chaves de memória, ligadas aos gates dos transistores, antes de abrir as chaves de corrente nas entradas das células, do contrário a memória é perdida. É também importante não interromper a corrente de entrada, que deve vir de cópia de corrente de célula similar, do contrário são gerados grandes pulsos de tensão, e transistores na célula anterior podem entrar na região de triodo, provocando mudança nas capacitâncias C_{gs} , o que pode levar a alteração temporária da corrente memorizada. Se enquanto a corrente está interrompida alguma cópia for utilizada em outra parte do circuito, erros são gerados. Para evitar estes problemas, o esquema de chaveamento deve ser como na figura 8.71. Os controles ϕ_1 e ϕ_2 são alternados, sem superposição. Os controles ϕ'_1 e ϕ'_2 são alternados, com superposição e atrasados. Há alguma liberdade na ordem em que as chaves são fechadas, mas devem ser abertas como indicado. Pode ser observado que ϕ'_1 e ϕ'_2 podem ser versões invertidas e atrasadas de ϕ_2 e ϕ_1 . Deve haver um caminho alternativo para a corrente de entrada quando

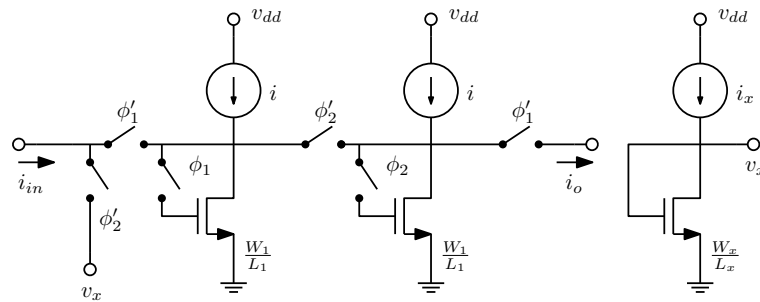


Figura 8.70: Célula de atraso completo, de “segunda geração”, e gerador do ponto v_x .

ela é interrompida, para o ponto v_x , que pode ser gerado como mostrado. Note-se que este circuito consome energia, e deve ser dimensionado com corrente suficiente para absorver o máximo da corrente interrompida. Apenas um pode ser usado para várias células.

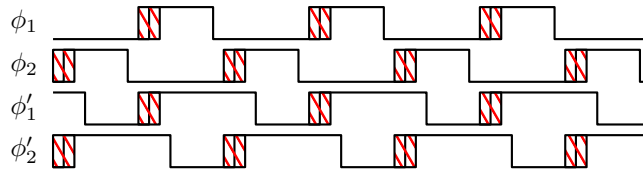


Figura 8.71: Controles das chaves para circuitos de “segunda geração”.

Um integrador é obtido pela realimentação da célula de atraso completo, como no caso anterior. Neste caso ocorre uma simplificação no circuito quando isto é feito, pois duas chaves com comandos ϕ'_1 e ϕ'_2 ficam em paralelo, correspondendo a uma ligação direta. Resulta a estrutura da figura 8.72.

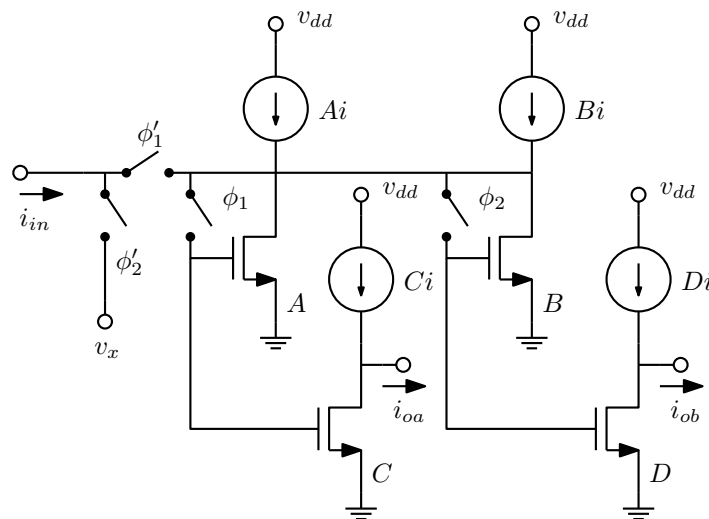


Figura 8.72: Integrador a corrente chaveada de “segunda geração”.

A análise em transformada Z é similar à do caso anterior, partindo das equações, onde não são feitas distinções entre as chaves com comandos ϕ_i e ϕ'_i :

$$\begin{array}{ll} \text{Fase } \phi_1 & \text{Fase } \phi_2 \\ I_{A1} = I_{in1} - I_{B1} & I_{A2} = I_{A1}z^{-\frac{1}{2}} \\ I_{B1} = I_{B2}z^{-\frac{1}{2}} & I_{B2} = -I_{A2} \end{array}$$

Resolvendo para as correntes que serão copiadas nas saídas, I_{A1} e I_{B1} :

$$\begin{aligned} I_{A1} &= I_{in1} - I_{B2}z^{-\frac{1}{2}} = I_{in1} + I_{A2}z^{-\frac{1}{2}} = I_{in1} + I_{A1}z^{-1} \\ I_{B1} &= -I_{A2}z^{-\frac{1}{2}} = -I_{A1}z^{-1} = -(I_{in1} - I_{B1})z^{-1} \end{aligned}$$

As duas funções de transferência internas são então:

$$\frac{I_{A1}}{I_{in1}}(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}; \quad \frac{I_{B1}}{I_{in1}}(z) = \frac{-z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

Considerando as cópias para as saídas, e que I_{in2} não influencia as saídas, tem-se as quatro funções de transferência para as duas saídas:

$$\begin{aligned} \frac{I_{oa1}}{I_{in1}}(z) &= \frac{-\tilde{C}}{1-z^{-1}} & \frac{I_{ob1}}{I_{in1}}(z) &= \frac{\tilde{D}z^{-1}}{1-z^{-1}} \\ \frac{I_{oa2}}{I_{in1}}(z) &= \frac{-\tilde{C}z^{-\frac{1}{2}}}{1-z^{-1}} & \frac{I_{ob1}}{I_{in1}}(z) &= \frac{\tilde{D}z^{-\frac{1}{2}}}{1-z^{-1}} \\ \frac{I_{oa1}}{I_{in2}}(z) &= \frac{I_{oa2}}{I_{in2}}(z) = 0 & \frac{I_{ob1}}{I_{in2}}(z) &= \frac{I_{ob2}}{I_{in2}}(z) = 0 \end{aligned}$$

As funções agora representam integrações naturais, como nos casos a capacitores chaveados. Os ganhos dos integradores são também controlados apenas por uma razão de razões de aspecto. As sensibilidades de filtros construídos com estes integradores são então como as dos filtros a capacitores chaveados.

8.5.2 Biquads a corrente chaveada

Considere-se o biquad Tow-Thomas em capacitores chaveados da figura 8.47a. Sua conversão para a forma em corrente chaveada resulta na estrutura da figura 8.73, com integradores de primeira geração. As fontes de corrente de polarização foram omitidas³⁶. Os dois integradores foram interconectados como no “flow-graph”, usando as cópias das saídas apropriadas dos integradores. Os ganhos dos integradores são controlados pelos transistores ligados a suas entradas, com os integradores ficando com razões de aspecto unitárias, nesta versão normalizada. A versão com integradores de segunda geração fica como na figura 8.74. A estrutura é a mesma, mas os integradores foram desenhados com orientações alternadas. As fontes v_x foram tratadas como terra de sinal, embora não possam ter valor contínuo nulo.

A desnormalização das estruturas é feita pelo escalamento de todas as razões de aspecto por um fator adequado para acomodar o nível de corrente a usar nos integradores, com subsequente escolha de tamanhos adequados para os transistores. É somente necessário dimensionar um conjunto de transistor e sua fonte de corrente (omitida nos esquemáticos), o conjunto a usar nos transistores “unitários” por exemplo, e então usar larguras escaladas para os demais, mantendo o comprimento. É comum se construir todos os transistores e suas fontes de polarização como associações em paralelo de blocos padrão, para melhor casamento. Os transistores são usualmente feitos suficientemente maiores que o mínimo permitido no processo para bom casamento e maior imunidade à injeção de carga pelas chaves. Algo deve também ser feito para evitar o efeito da condutância não nula dos transistores na região de saturação (efeito do parâmetro λ), que causa erros nas transferências de corrente, e das capacitâncias C_{gd} , que causam efeito similar, formando divisores capacitivos com as capacitâncias C_{gs} que modificam as correntes i_d se as

³⁶As simulações no programa ASIZ usam estruturas assim. Pode-se considerar que cada transistor tem uma fonte de corrente ligada a ele, com valor proporcional à sua razão de aspecto.

tensões nas saídas variam enquanto os transistores estão armazenando carga em C_{gs} . O uso de cascodes minimiza ambos os problemas, aumentando a impedância de saída dos blocos.

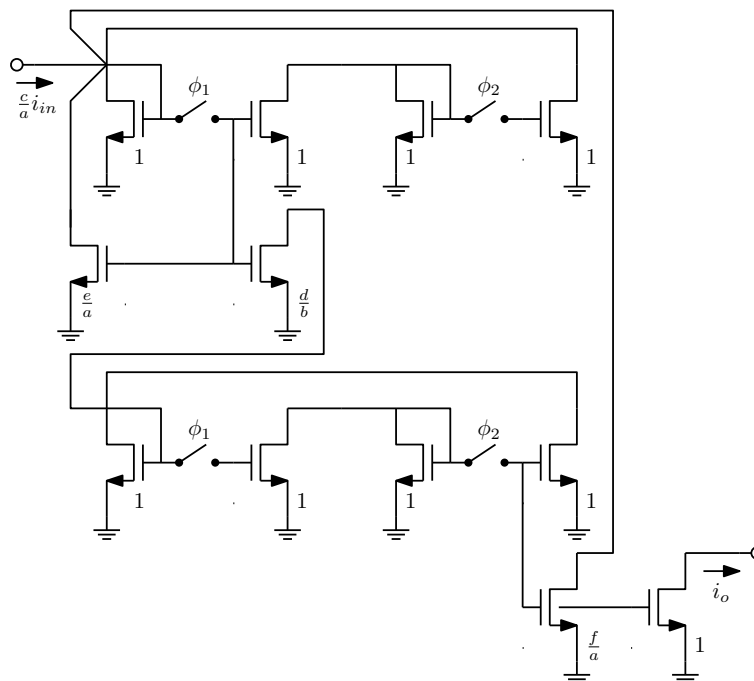


Figura 8.73: Biquad Tow-Thomas em corrente chaveada de “primeira geração”, em representação simplificada, com as fontes de polarização omitidas.

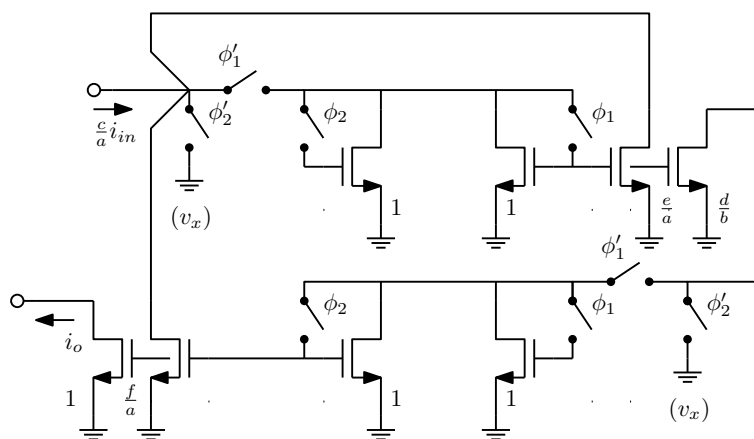


Figura 8.74: Biquad Tow-Thomas em corrente chaveada de “segunda geração”, em representação simplificada, com as fontes de polarização omitidas e fontes v_x como terra.

8.5.3 Simulação de redes passivas em corrente chaveada

Realizações em corrente chaveada simulando estruturas passivas são também possíveis. São baseadas em simulação de equações de estado, da mesma forma usada para capacitores chaveados. A figura 8.75 mostra uma realização LDI aproximada de “segunda geração” para um filtro polinomial passa-baixas de ordem 3, onde se pode notar a regularidade de estrutura similar à da figura 8.74. Note-se que as razões de aspecto devem ser calculadas a partir de uma estrutura passiva normalizada, com T sendo o período de chaveamento normalizado, que coloca a frequência de corte do filtro em 1 rad/s, $T = 2\pi/n$, onde n é o número de amostras por ciclo na frequência de corte. Pode ser necessário fazer escalamento de faixa dinâmica nestes filtros também, o que pode ser feito de forma similar ao feito para filtros a capacitores chaveados. Para dividir o nível máximo de corrente em um integrador por M , basta dividir as correntes que entram por M , reduzindo a largura dos transistores que fornecem corrente ao integrador e suas correntes de polarização, e multiplicar por M as correntes nas cópias que geram as saídas, multiplicando por M as larguras dos transistores e suas correntes de polarização, para não alterar as demais correntes. Também é possível simplesmente alterar os níveis de corrente nos integradores e suas cópias, acompanhando os máximos de sinal, alterando as larguras dos transistores e suas correntes, o que corresponderia em um circuito a capacitores chaveados a alterar as tensões de alimentação dos amplificadores. Isto não é usual em filtros operando com sinais em tensão, mas não é problema em circuitos onde os sinais são correntes³⁷.

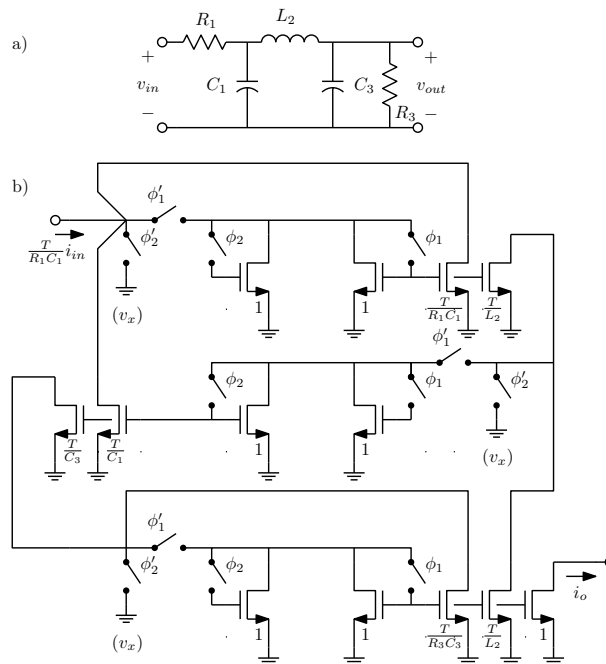


Figura 8.75: a) Filtro passa-baixas de ordem 3. b) Versão em corrente chaveada de “segunda geração”, normalizada, simulando a estrutura passiva na forma LDI aproximada.

É possível a simulação usando integração bilinear, em forma similar à desenvolvida para filtros a capacitores chaveados [32]. A figura 8.76 mostra uma possibilidade, realizando um filtro de terceira ordem passa-baixas com zeros finitos de transmissão. A estrutura é similar à do filtro LDI aproximado,

³⁷O escalamento convencional é mais razoável, pois deixa todos os integradores iguais.

com os elementos ajustados conforme discutido para a versão a capacitores chaveados. A integração bilinear na entrada é conseguida com um operador de média entre entradas sucessivas ligado à entrada, como mostrado. Os zeros de transmissão são criados pelo par de transistores com ligações cruzadas. As correntes saindo deles entram junto com as correntes de polarização dos integradores, se somando então diretamente às saídas deles.

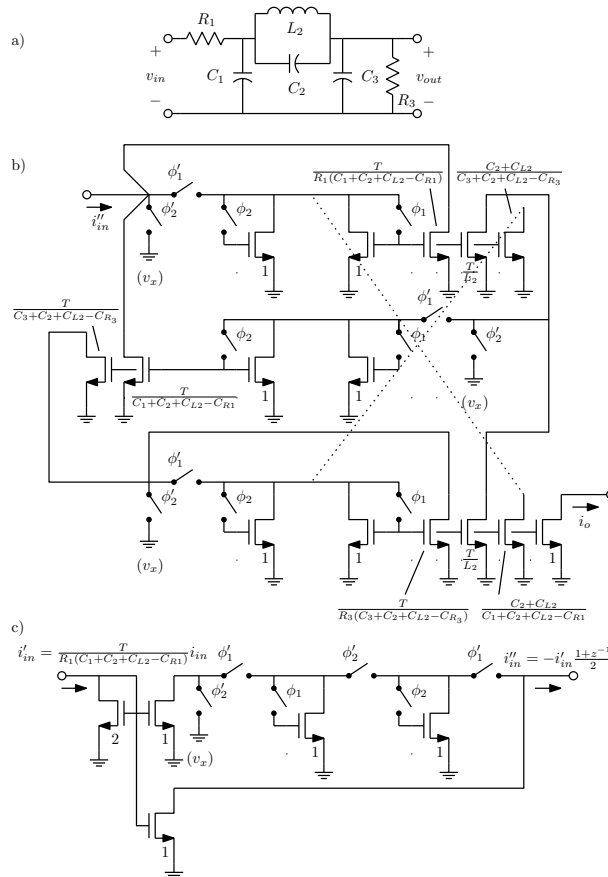


Figura 8.76: a) Filtro passa-baixas de ordem 3 com zeros finitos de transmissão. b) Versão em corrente chaveada de “segunda geração” bilinear. c) Operador $\frac{1+z^{-1}}{2}$, completando a transformação bilinear.

Exemplo: As figuras 8.77 e 8.78 mostram um filtro passa-baixas de ordem 5 como desenhado no editor EDFIL para simulação no programa ASIZ³⁸. Os valores das razões de aspecto para os transistores são calculados conforme o caso de terceira ordem da figura 8.76, com os zeros de transmissão e a integração bilinear da entrada criados de forma diferente. Os acoplamentos que geram os zeros de transmissão são feitos com cópias das correntes nos dois transistores dos integradores da origem, ambas injetadas nas entradas normais dos integradores do destino, cancelando as integrações pois os sinais injetados ficam multiplicados por $1 - z^{-1}$. Esta técnica serve para integradores de “primeira geração” e de “segunda geração”. A integração bilinear da entrada é feita na saída, por subtração de cópias das correntes nos dois

³⁸São os exemplo “EULER1S” e “EULER2S” da distribuição do programa. Não é necessário considerar o chaveamento especial para o caso de “segunda geração” nas simulações no ASIZ. Nas figuras, as etiquetas verticais e horizontais são diferentes, indicando as conexões correspondentes. Elas foram colocadas com nomes diferentes no editor.

transistores do último integrador, com opcional divisão por 2. As razões de aspecto para os transistores não identificados são unitárias. Os dois filtros funcionam exatamente da mesma forma.

A figura 8.79 mostra os módulos das respostas em frequência obtidas para amostragem em 10 Hz e corte em 1 Hz³⁹, considerando apenas a saída na fase ϕ_1 , o que é conseguido colocando uma chave para zerar a saída na fase ϕ_2 , e considerando a saída normal. A técnica gera a saída correta apenas na fase ϕ_1 . Com a saída completa o zero na metade da frequência de chaveamento não aparece. A repetição de espectro em torno de 10 Hz é devida à forma de onda da saída no primeiro caso, nula na fase ϕ_2 . Com a saída completa o efeito da amostragem e retenção coloca um zero na frequência de chaveamento e múltiplos, e com apenas a fase ϕ_1 no dobro dela e múltiplos. Os ganhos nos dois casos foram ajustados para 0 dB em baixa frequência, com a colocação de um resistor de carga normalizado de 2Ω no primeiro caso e de 1Ω no segundo.

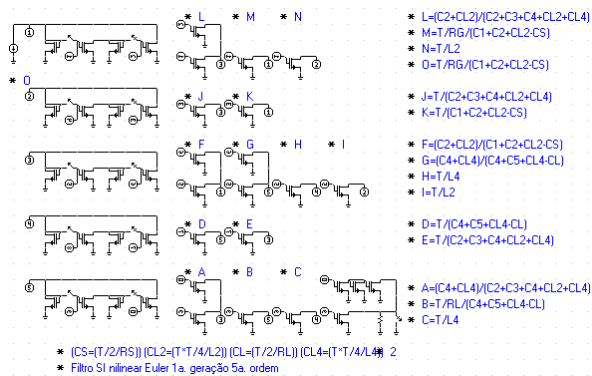


Figura 8.77: a) Filtro passa-baixas de ordem 5 com zeros finitos de transmissão, com integradores de “primeira geração”, desenhado no editor Edfil.

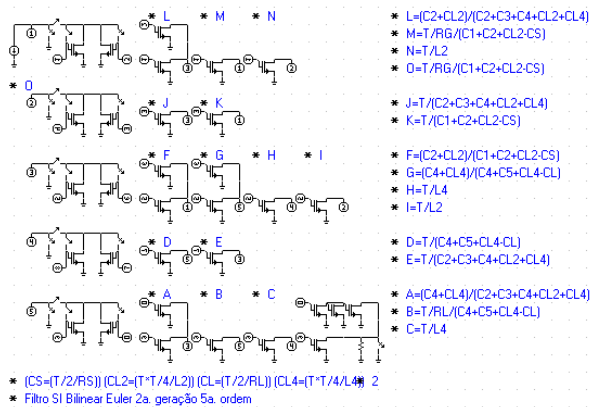


Figura 8.78: a) Filtro passa-baixas de ordem 5 com zeros finitos de transmissão, com integradores de “segunda geração”, desenhado no editor Edfil.

³⁹Com $T = \frac{2\pi}{10} = 0.628319$, $A_{max} = 1.5$ dB, $A_{min} = 40$ dB, e os elementos da rede passiva normalizada com a predistorção para a compressão da transformação bilinear feita: $C_1 = 2.070312$, $L_2 = 0.754932$, $C_2 = 0.429675$, $C_3 = 2.263889$, $L_4 = 0.487549$, $C_4 = 1.286104$, $C_5 = 1.583121$, Farads e Henrys.

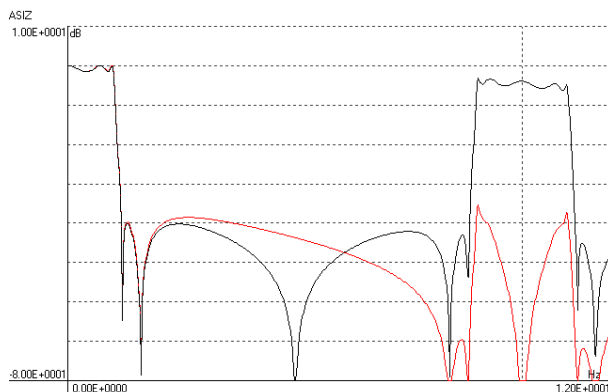


Figura 8.79: Respostas em frequência obtidas por simulação no programa ASIZ, considerando apenas a saída na fase 1 (com repetição de espectro) e considerando as saídas nas duas fases (com nulo na frequência de chaveamento).

Em filtros a corrente chaveada é simples a construção de integradores bilineares verdadeiros. Basta fazer a subtração das duas saídas dos integradores, de primeira ou segunda geração, com divisão por 2. As figuras 8.80 e 8.81 mostram os circuitos que realizam o mesmo filtro do caso anterior, com integradores bilineares verdadeiros⁴⁰. As subtrações requerem um inversor de corrente associado a cada integrador, um espelho de corrente, usado para quantas cópias invertidas sejam necessárias naquela saída do integrador. Os valores dos elementos não tem qualquer correção em relação à versão LDI aproximada, além da divisão por dois nas razões de aspecto dos pares de transistores que realizam os acoplamentos não diretos entre os integradores.

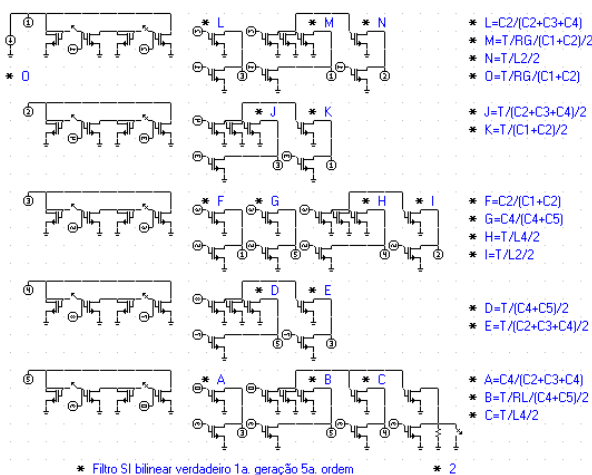


Figura 8.80: a) O mesmo filtro da figura 8.77 realizado com integradores bilineares verdadeiros, desenhado no editor Edfil.

Os filtros realizam exatamente a mesma função das versões usando integradores de Euler, também com saída correta apenas em uma fase.

⁴⁰Exemplos “BILIN1S” e “BILIN2S” da distribuição do programa ASIZ.

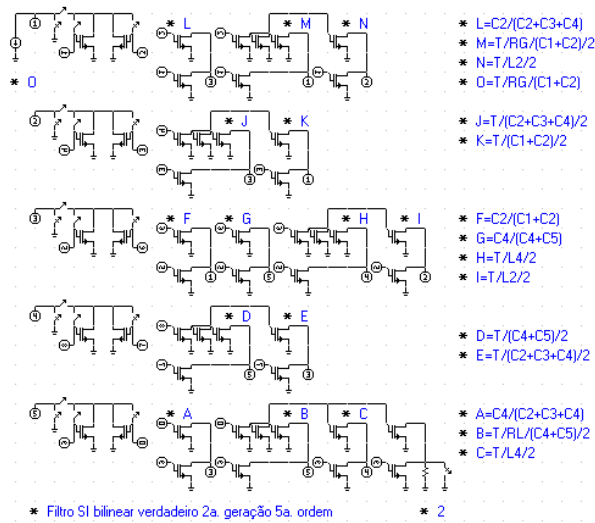


Figura 8.81: a) O mesmo filtro da figura 8.78 realizado com integradores bilineares verdadeiros, desenhado no editor Edfil.

8.5.4 Filtros a corrente chaveada por simulação de componentes

Uma técnica diferente para a realização de filtros a corrente chaveada é a de “simulação de componentes” [34], [35], [36]. A técnica se baseia na simulação de equações nodais de uma simulação Gm-C de um protótipo RLC passivo. Considerando um circuito composto por transcondutores, capacitores e entradas em corrente, suas equações nodais tomam a forma:

$$s[C]\vec{e}(s) + [G]\vec{e}(s) + \vec{i}(s) = 0$$

Aplicando-se uma transformação de s para z , no caso a transformação bilinear $s \rightarrow \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, resulta o sistema:

$$\frac{1}{T}(1 - z^{-1})[C]\vec{e}(z) + \frac{1}{2}(1 + z^{-1})[G]\vec{e}(z) + \frac{1}{2}(1 + z^{-1})\vec{i}(z) = 0$$

Existem então as equivalências para os componentes, o “transcapacitor” sC , o transcondutor G e a fonte de corrente i :

$$\begin{aligned} sC &\rightarrow \frac{C}{T}(1 - z^{-1}) \\ G &\rightarrow \frac{G}{2}(1 + z^{-1}) \\ i(s) &\rightarrow \frac{1}{2}(1 + z^{-1})i(z) \end{aligned}$$

Os circuitos da figura 8.82 realizam estas funções, usando somas e subtrações de correntes memorizadas e geradas diretamente. A fonte de corrente equivale a um transcondutor como saída de um espelho de corrente. O circuito opera duas vezes a cada período da mesma forma, dobrando a frequência de chaveamento efetiva, e então o operador z^{-1} significa atraso de uma fase com duração T . Os transcondutores podem ser simples transistores com fontes de corrente para polarização, seguidos de inversores de corrente no caso positivo. Um circuito a corrente chaveada pode ser então montado componente a

componente a partir de um circuito protótipo Gm-C. Os transdutores são realizados diretamente, os capacitores montados com equivalentes feitos com transcapacitores, e a entrada passa por um espelho, como na figura 8.83. Um filtro tipo elíptico passa-baixas de ordem 3 é gerado como na figura 8.84, com o protótipo passivo convertido em uma versão Gm-C com transcapacitores realizando os capacitores. Pode ser observado que a estrutura resultante obedece às regras de construção de circuitos a corrente chaveada, com os sinais em corrente e tensões usadas apenas como passagem entre entrada e saída de espelhos de corrente.

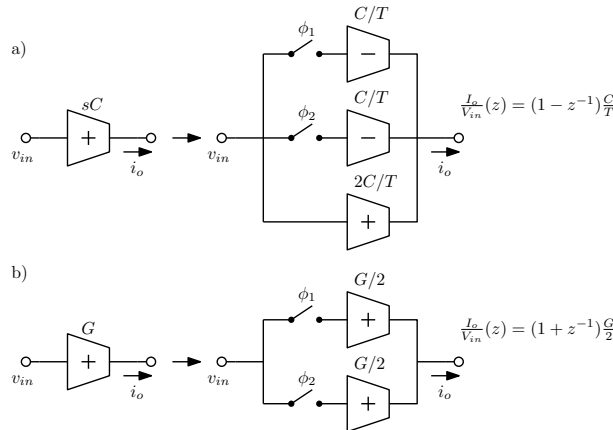


Figura 8.82: a) Transcapacitor bilinear. b) Transcondutor bilinear.

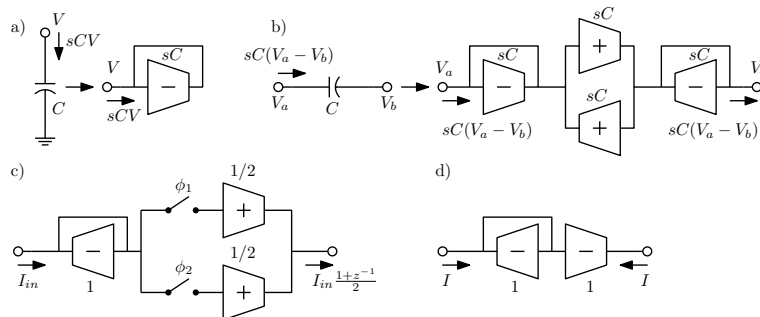


Figura 8.83: a) Capacitor aterrado. b) Capacitor suspenso. c) Entrada bilinear. d) Espelho de corrente.

As chaves requerem apenas operação em duas fases sem superposição. A montagem da estrutura permite várias simplificações, como utilização por vários blocos de chaves com entrada no mesmo nó e de inversores de corrente com saída no mesmo nó. Para cada nó é necessário usar apenas um par de chaves e um inversor, resultando em estruturas em que cada nó gera uma estrutura como a da figura 8.85. O filtro completo resulta em uma série destes circuitos interligados.

Exemplo: O mesmo filtro elíptico de ordem 5 da figura 8.78, desenhado no editor Edfil com a técnica de simulação de componentes fica como na figura 8.86⁴¹. São cinco circuitos de nó interligados. A entrada foi feita diretamente, com o operador de média realizado na saída. A frequência de chaveamento deve ser $1/(2T)$, devido à operação fase a fase.

⁴¹Exemplo CSBILIND da distribuição do programa ASIZ.

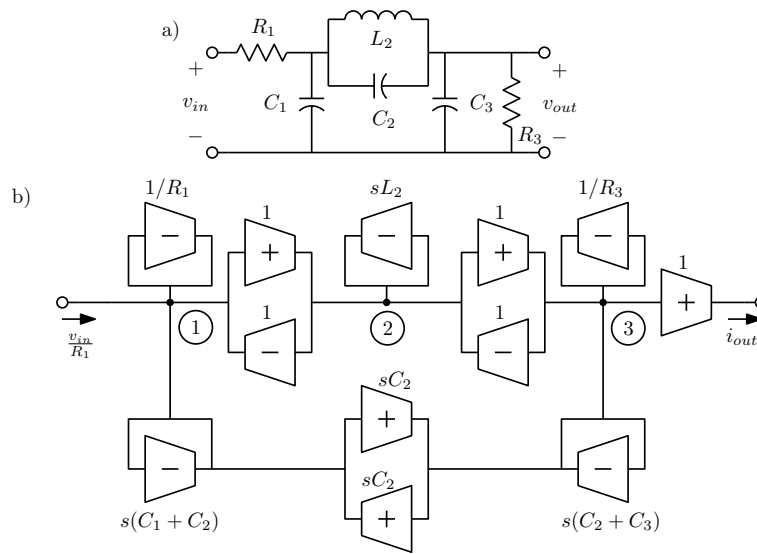


Figura 8.84: a) Protótipo RLC passivo. b) Protótipo Gm-C com transcapacitores.

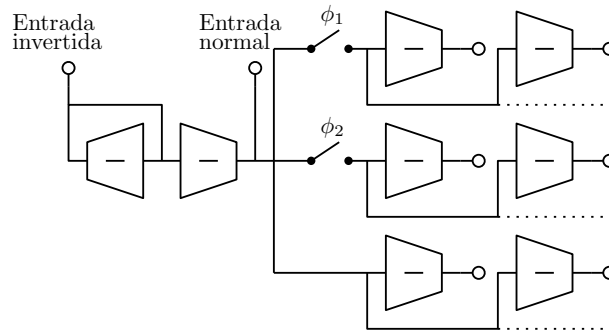


Figura 8.85: Circuito de nó, para a realização por simulação de componentes.

As respostas em frequência obtidas são mostradas na figura 8.87. A frequência de chaveamento usada é de 5 Hz, devido à operação idêntica fase a fase. A resposta global é correta, enquanto as quatro funções de transferência parciais geram uma banda passante em torno de 5 Hz, que é cancelada na soma global.

8.5.4.1 Formas direta e modulada

Estes filtros apresentam um problema que pode ser sério: Uma observação dos equivalentes da figura 8.82 mostra que um erro de descasamento entre a parte chaveada e a contínua de um transcapacitor gera um transcondutor parasita em paralelo com ele, como na figura 8.88. Como T é pequeno para alta razão entre a frequência de chaveamento e a de operação, o transcondutor parasita é significativo neste caso. A realização do transcondutor com três transcondutores grandes também é inconveniente por aumentar a área no circuito integrado e o consumo de energia.

Uma curiosa solução para estes problemas é o uso de sinais “modulados”, que alternam a polaridade fase a fase. As “memórias” ficam então com a polaridade invertida, trocando os sinais dos operadores z^{-1} ,

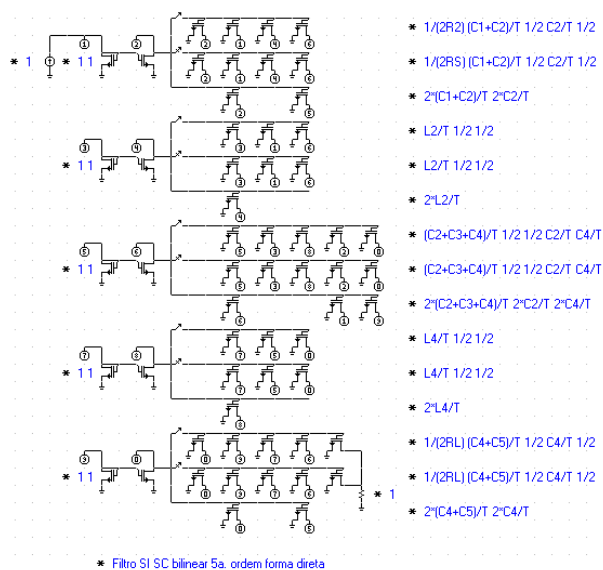


Figura 8.86: Filtro passa-baixas com zeros finitos de transmissão de ordem 5, na forma direta em simulação de componentes. As razões de aspecto dos transistores são as listadas, correspondendo aos transistores da esquerda para a direita.

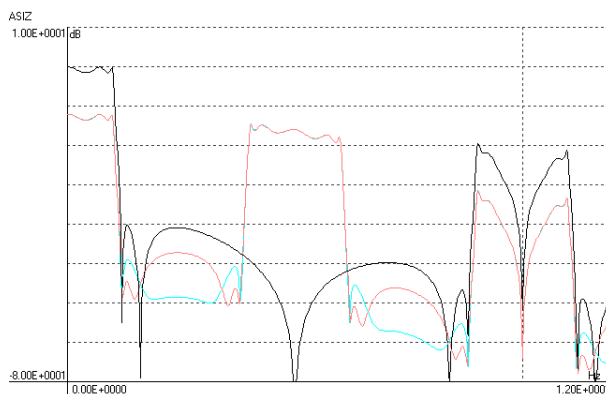


Figura 8.87: Respostas em frequência obtidas para o filtro da figura 8.86. São mostradas a resposta global, a correta, e as parciais ϕ_1, ϕ_1 (azul) e ϕ_2, ϕ_1 (vermelho). As respostas 2,2 e 2,1 são idênticas a elas.

conforme a figura 8.89. As estruturas do transcapacitor e do transcondutor ficam então trocadas, e não há mais a parte contínua do transcapacitor. Descasamentos entre as duas partes chaveadas do transcapacitor geram erros principalmente nos componentes espectrais em torno dos múltiplos da frequência de chaveamento e um nível contínuo, com pouca importância. Erros de descasamento entra as partes chaveada e contínua do transcondutor geram pequenos capacitores parasitas, também com pouca importância.

Exemplo: A figura 8.90 mostra o mesmo filtro da figura 8.86 montado na forma modulada. É acrescentado na entrada um circuito modulador, que também obedece às regras dos circuitos a corrente chaveada, e na saída é feita a demodulação e a operação de média para completar a transformação bilinear. O filtro

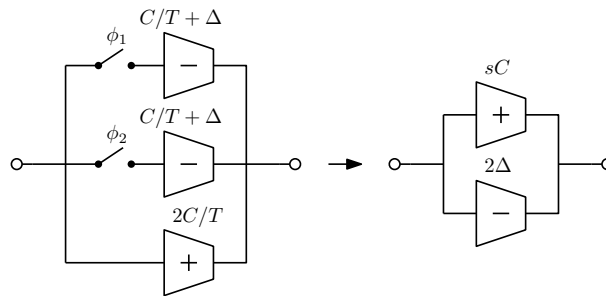


Figura 8.88: Efeito de descasamento entre componentes em um transcapacitor. Surge um transcondutor parasita.

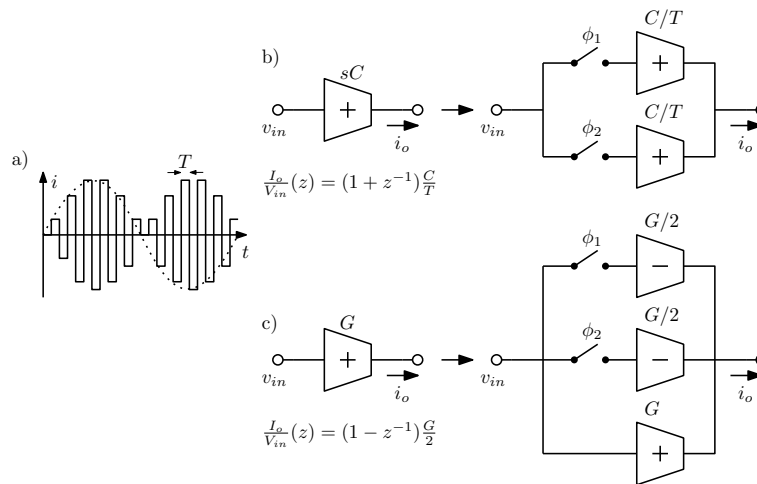


Figura 8.89: a) Sinal modulado. b) Forma modulada dos transcapacitores bilineares. c) Forma modulada dos transcondutores bilineares.

gera exatamente as mesmas respostas em frequência da figura 8.87.

8.5.4.2 Transformações de Euler

É também possível usar as transformações de Euler em vez da bilinear. Basta transformar as equações nodais usando as equivalências correspondentes entre s e z . Para a transformação “forward” de Euler, $s \rightarrow \frac{1}{T} \frac{1-z^{-1}}{z^{-1}}$, resulta:

$$\frac{1}{T}(1 - z^{-1})[C]\vec{e}(z) + z^{-1}[G]\vec{e}(z) + z^{-1}\vec{i}(z) = 0$$

e para a transformação “backward” de Euler, $s \rightarrow \frac{1}{T}(1 - z^{-1})$, resulta:

$$\frac{1}{T}(1 - z^{-1})[C]\vec{e}(z) + [G]\vec{e}(z) + \vec{i}(z) = 0$$

Observa-se então que as realizações dos transcapacitores são idênticas às do caso bilinear, mas as dos transcondutores são diferentes. A figura 8.91 mostra os transcondutores resultantes para a forma

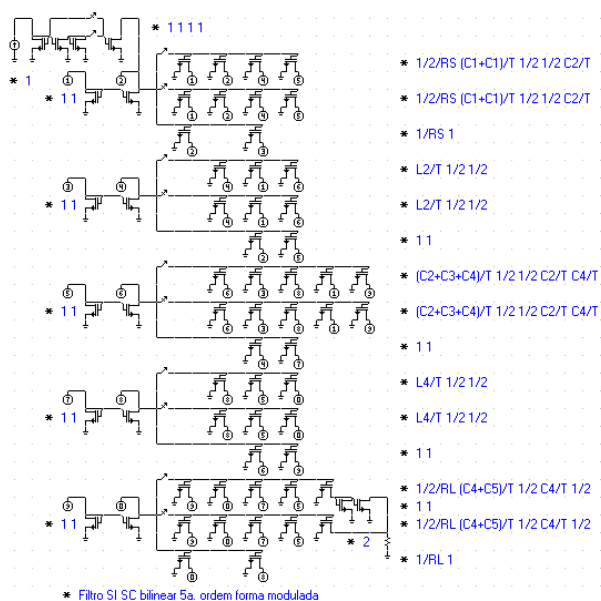


Figura 8.90: Filtro passa-baixas com zeros finitos de transmissão de ordem 5, bilinear, na forma modulada em simulação de componentes.

direta e a forma modulada. Note-se que no caso da transformação “backward” de Euler eles se reduzem a transcondutores contínuos, sem chaveamento, tanto na forma direta quanto na forma modulada. Filtros baseados nessa transformação, na forma modulada, ficam muito simples, com transcapacitores feitos com dois transcondutores contínuos chaveados e transresistores com apenas um [37]⁴². É possível a construção de filtros bilineares usando as transformações de Euler, apenas modificando-se os valores das capacitâncias conforme feito anteriormente, e usando-se transcondutores nas formas correspondentes às integrações a realizar. Sem modificar as capacitâncias e com uma integração “backward” na saída é possível obter filtros LDI aproximados. A figura 8.92 mostra as transformações no protótipo Gm-C correspondentes para a geração do filtro bilinear, válidas tanto na forma direta quanto na modulada.

Exemplo: As figuras 8.93 e 8.94 mostram as estruturas de um filtro de ordem 5 como nos exemplos anteriores, usando integradores de Euler nas formas direta e modulada, desenhados no editor Edfil⁴³, de acordo com a estrutura de ordem 3 da figura 8.92. As respostas em frequência resultantes são idênticas às da figura 8.87.

8.5.4.3 Sensibilidades

A análise de sensibilidades de circuitos a capacitores chaveados e a corrente chaveada é similar à do caso contínuo, e está implementada no programa ASIZ [39]. A realização exata por simulação de componentes de baixa sensibilidade mais simples é a bilinear usando integradores de Euler na forma modulada. A realização bilinear modulada é um pouco melhor em sensibilidade, mas usa bem mais elementos. Ambas são comparáveis com as formas de segunda geração, que são usualmente um pouco melhores, mas usam chaveamento mais simples. As formas não moduladas e as de primeira geração são de alta sensibilidade.

⁴²Esta na verdade foi a ideia inicial para as realizações em simulação de componentes.

⁴³Exemplos CSEULERD e CSEULERM da distribuição do programa ASIZ.

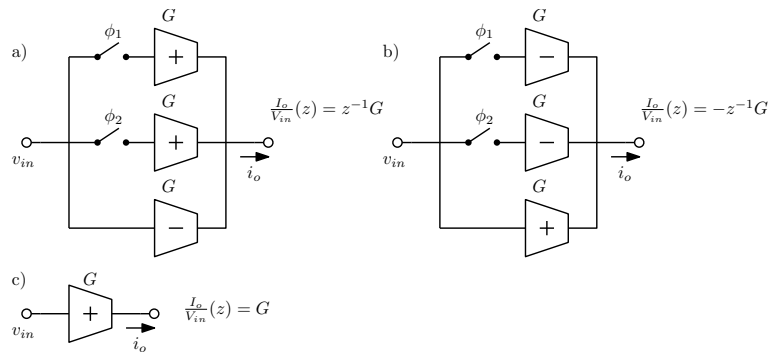


Figura 8.91: Transresistores para as transformações de Euler: a) “Forward”, na forma direta. b) “Forward”, na forma modulada. c) “backward”, para as formas direta e modulada.

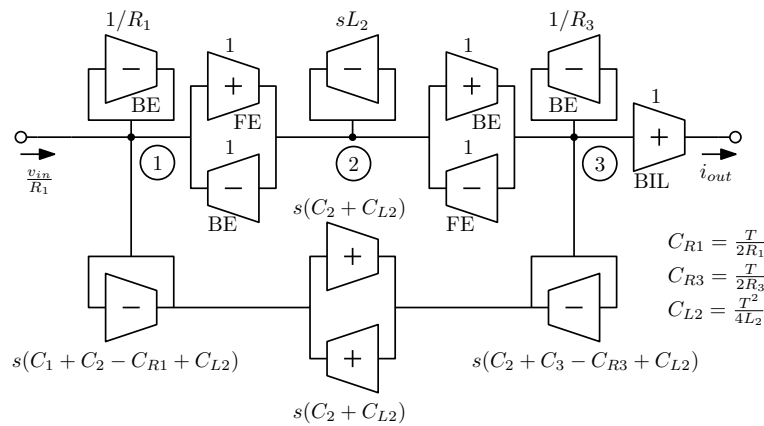


Figura 8.92: Protótipo Gm-C para um filtro passa-baixas com zeros finitos de ordem 3 para a realização bilinear com integrações de Euler.

8.5.4.4 Redução de sensibilidades por troca de posições de transcondutores

Há uma outra forma que reduz as sensibilidades significativamente, explorando a operação idêntica em ambas as fases [38]. O circuito do nó, Fig. 8.85, tem em sua entrada dois transcondutores idênticos, que tem sensibilidades de suas transcondutâncias opostas, pois elas afetam a entrada invertida de formas opostas. Se por algum meio suas funções forem trocadas a cada fase, os erros neles passam a gerar erros apenas nas componentes espectrais em torno dos múltiplos da frequência de chaveamento, e suas sensibilidades no espectro principal se anulam. Uma forma de construir um circuito de nó com troca das funções dos transistores do espelho de fase a fase é mostrada na figura 8.95. Esta forma, entretanto, requer chaveamento de correntes, o que torna problemática a operação com dois controles sem superposição, por causar interrupção momentânea de correntes. Uma outra forma é modificar o circuito do nó como na figura 8.96a, usando “inversores de tensão” (não lineares) em vez de inversores de corrente. O circuito do nó passa a ter apenas uma entrada, com as saídas que iriam a entradas com inversão passando a já sair com a inversão feita, a partir do conjunto separado de transcondutores ligados ao inversor de tensão. Esta forma requer mais um par de chaves por nó, mas no mais é equivalente à outra, obedecendo também às regras de operação baseada em espelhos de corrente, com sinais válidos em corrente. Os inversores de

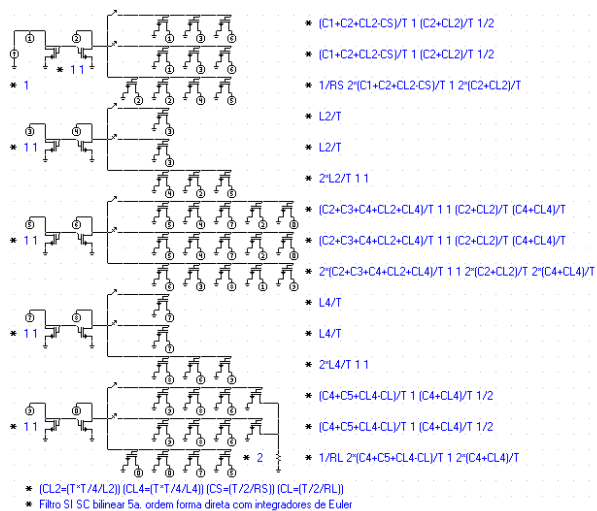


Figura 8.93: Filtro passa-baixas com zeros finitos de transmissão de ordem 5, na forma direta com integradores de Euler.

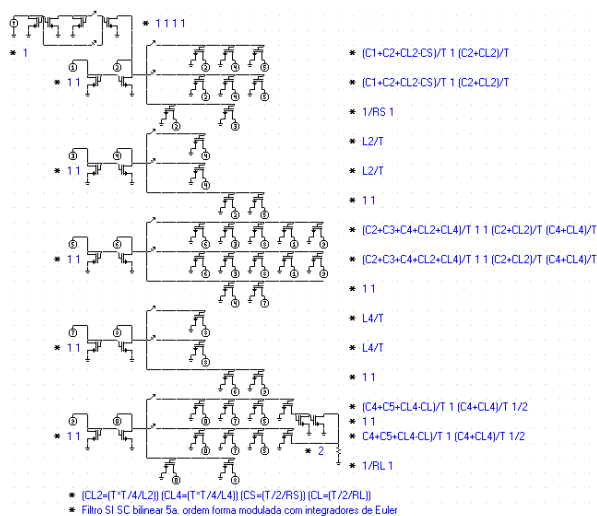


Figura 8.94: Filtro passa-baixas com zeros finitos de transmissão de ordem 5, na forma modulada com integradores de Euler.

tenção podem ter as funções de seus transcondutores trocadas fase a fase sem chaveamento de correntes, como na figura 8.96b.

Trocas podem também ser feitas com pares de transcondutores contínuos com sensibilidades aproximadamente opostas, que resultam com sensibilidades iguais às médias das que teriam sem o chaveamento. Isto pode ser feito convenientemente se os transcondutores tem saídas no mesmo ponto. A troca é então feita com duas chaves na entrada de cada um. O efeito é usualmente pequeno.

Exemplo: A figura 8.97 mostra a estrutura de um filtro elíptico de ordem 3 (figura 8.84) na forma

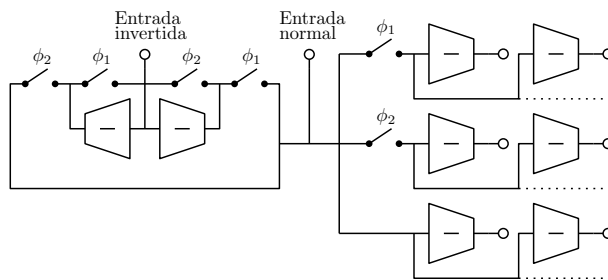


Figura 8.95: Circuito do nó com troca de funções dos dois transdutores do inversor de corrente fase a fase.

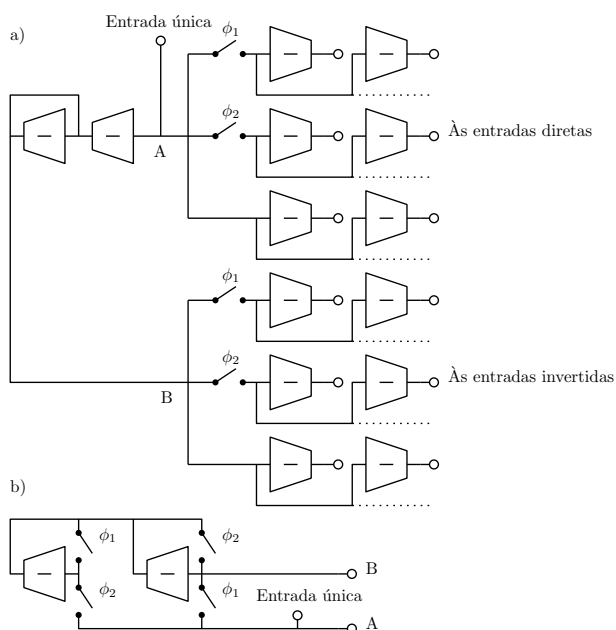


Figura 8.96: Circuito do nó com inversor de tensão, e troca de funções dos dois transdutores deste fase a fase.

bilinear com sinais modulados usando inversores de tensão, como aparece no editor Edfil. A figura 8.98 mostra o mesmo filtro com chaveamentos nos inversores de tensão e nas ligações diretas indo aos mesmos nós ⁴⁴.

Ambos os filtros realizam exatamente a mesma função, mas na forma com trocas os erros causados pelos componentes dos inversores de tensão são quase eliminados, com as sensibilidades em relação aos elementos trocados transformadas para as médias do que eram na versão sem chaveamentos. Uma análise de sensibilidades no programa ASIZ gera as curvas mostradas na figura 8.99. São mostradas as curvas de módulo na banda passante com margens de erro calculadas por desvios estatísticos assumindo tolerâncias de 5% nas transcondutâncias. Com o cálculo normal de sensibilidades o erro da forma com trocas é

⁴⁴Os elementos do protótipo normalizado são: $A_{max} = 1$ dB, $A_{min} = 40$ dB, borda da banda passante em 1 Hz, chaveamento em 10 Hz, $T = \frac{\pi}{10} = 0.314159$ s, $R_1 = 1 \Omega$, $R_3 = 1 \Omega$, $L_2 = 0.801490$ H, $C_1 = 1.77264$ F, $C_2 = 0.321637$ F e $C_3 = 1.77264$ F.

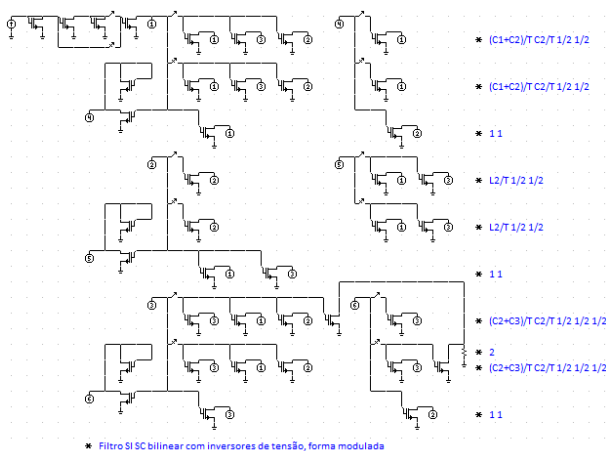


Figura 8.97: Filtro passa-baixas com zeros finitos de transmissão de ordem 3, na forma modulada com integradores bilineares e inversores de tensão nos três nós.

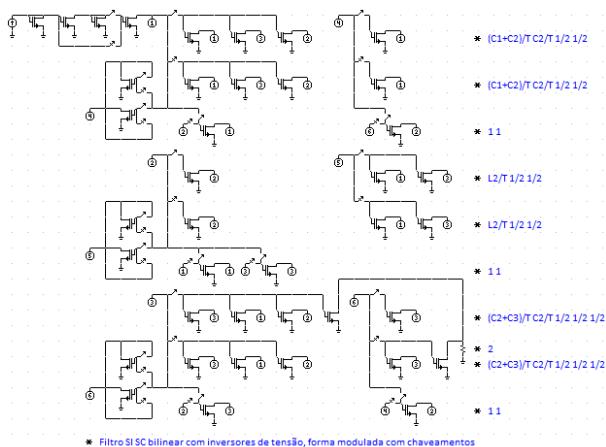


Figura 8.98: Mesmo filtro da figura 8.97 com troca fase a fase dos transcondutores dos inversores de tensão e das ligações diretas indo aos mesmos nós.

apenas um pouco menor. Se são descontadas as sensibilidades em frequência zero, ou sensibilidades afetando apenas o ganho do filtro, a melhoria introduzida pelas trocas é vista ser grande. Não se observa nulo de sensibilidades no pico próximo ao final da banda passante do filtro com as sensibilidades com desconto. Um exame das sensibilidades mostra que as sensibilidades de módulo em relação aos elementos que realizam C_1 , L_2 e C_3 se anulam no máximo, mas as dos elementos que realizam C_2 ficam em pares com sensibilidades opostas, como ocorre em outras realizações ativas. As sensibilidades em relação aos elementos que formam os giradores não se anulam, e nem retornam aos valores em frequência zero. Curiosamente, as sensibilidades do par de transcondutores formando o inversor de tensão do nó de saída não são zeradas pelo intercâmbio, em consequência da presença do demodulador, mas continuam como

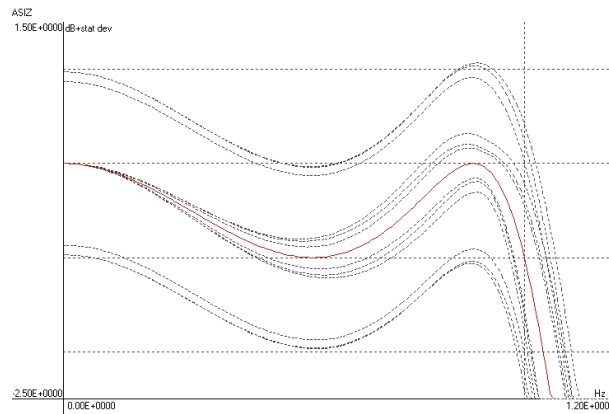
$\pm 0.5^{45}$.

Figura 8.99: Banda passante com margens de erro para os filtros das figuras 8.97 (maiores margens), 8.98 (menores margens) e com intercâmbio apenas nos inversores de tensão. São mostradas as margens de erro normais e com desconto das sensibilidades em frequência zero.



⁴⁵Se demoduladores similares forem colocados nos outros nós, observa-se que para saídas neles as sensibilidades dos elementos do inversor de tensão do nó também não se anulam, embora se anulem para os outros nós.

Referências Bibliográficas

- [1] J. J. Ebers and J. L. Moll, "Large-signal behavior of junction transistors", Proceedings of the IRE, pp. 1761-1772, dezembro de 1954.
- [2] A. Bennet, "An account of a doubler of electricity", Philosophical Transactions, LXXVII, 2, pp. 288-296, 1787.
- [3] A. W. Simon, "On the quantitative theory of the Wimshurst machine I", Review of Scientific Instruments, Vol. 4, pp. 67-74, fevereiro de 1933.
- [4] H. Shichman, D. A. Hodges, "Modeling and Simulation of Insulated-Gate Field-Effect Transistor Circuits", IEEE J. of Solid-State Circuits, vol. SC-3, no. 3, pp. 285-289, setembro de 1968.
- [5] L. Chua and K. Stromsmoe, "Lumped-circuit models for nonlinear inductors exhibiting hysteresis loops", IEEE Transactions on Circuit Theory, vol. 17, no. 4, pp. 564-574, novembro 1970.
- [6] H. J. Orchard, "Inductorless filters", Electronics Letters, vol. 2, no. 6, pp. 224-225, junho 1966.
- [7] O. Brune, "Synthesis of a finite two-terminal network whose driving-point impedance is a prescribed function of frequency", J. Math. Phys., vol. 10, pp. 191-236, agosto de 1931.
- [8] R. Bott, R. J. Duffin, "Impedance synthesis without use of transformers", J. of Appl. Phys., vol. 20, p. 816, 1949.
- [9] P. I. Richards, "A special class of functions with positive real part in a half-plane", Duke Math. J., vol. 14, pp. 777-788, 1947.
- [10] R. Hashemian, "Application of fixator-norator pairs in designing active loads and current mirrors in analog integrated circuits", Very Large Scale Integration (VLSI) Systems, IEEE Transactions on, vol.20, no.12, pp. 2220,2231, dezembro de 2012.
- [11] G. C. Temes, J. W. LaPatra, "Introduction to circuit synthesis and design", McGraw-Hill, 1977.
- [12] A. C. M. de Queiroz, "Redes RLC simétricas e antimétricas de baixa sensibilidade", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1984.
- [13] A. C. M. de Queiroz, "Filtros analógicos com simetria e antimetria física", Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, 1990.
- [14] A. I. Zverev, "Handbook of filter synthesis", John Wiley and Sons, 1967.
- [15] Bernard D. H. Tellegen, "A general network theorem with applications", Philips Research Reports, Philips Research Laboratories, Eindhoven, 7, pp. 259-269, 1952.

- [16] A. C. M. de Queiroz, "Multiple resonance networks with incomplete energy transfer and operating with zero-state response", 2005 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, Kobe, Japão, Vol. I, pp. 236-239, maio de 2005.
- [17] Sallen, R.P. and Key, E.L. "A practical method of designing RC active filters", IRE Transactions on Circuit Theory, Vol. 2, No. 1, pp. 74-85, março de 1955.
- [18] J. Tow, "A step-by-step active-filter design", Spectrum, IEEE, Vol. 6, No. 12, dezembro de 1969.
- [19] Akerberg, D., Mossberg, K., "A versatile active RC building block with inherent compensation for the finite bandwidth of the amplifier", IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. 21, No. 1, pp. 75-78, janeiro de 1974.
- [20] L. P. Huelsman e P. E. Allen, "Introduction to the theory and design of active filters", McGraw-Hill, 1980.
- [21] A. Antoniou, "Realisation of gyrators using operational amplifiers, and their use in RC-active-network synthesis", IEE Proceedings, vol. 116, no. 11, pp. 1838-1850, novembro de 1969.
- [22] A. C. M. de Queiroz, "Multiple Resonance Networks", IEEE Transactions on Circuits and Systems I, Vol. 49, No. 2, pp. 240-244, fevereiro de 2002.
- [23] Ho Chung-Wen Ho, Albert E. Ruehli, Pierce A. Brennan, "The modified nodal approach to network analysis", IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. 22, No. 6, pp. 504-509, junho de 1975.
- [24] A. C. M. de Queiroz, "Compact nodal analysis with controlled sources modeled by ideal operational amplifiers", 38th MWSCAS, Rio de Janeiro, Brasil, pp. 1205-1208, agosto de 1995.
- [25] T. R. Bashkow, "The A matrix, new network description", IRE Transactions on Circuit Theory, Vol.4, No. 3, pp. 117 - 119, setembro de 1957.
- [26] N. Balabanian, "Network Synthesis", Prentice Hall, Inc., 1958.
- [27] P. Yang, B. D. Epler, P. K. Chatterjee, "An investigation of the charge conservation problem for MOSFET circuit simulation", IEEE Journal of Solid-State Circuits, Vol. SC-18, No. 1, fevereiro de 1983.
- [28] L. O. Chua, P. M. Lin, "Computer-aided analysis of electronic circuits: algorithms and computational techniques", Prentice-Hall, 1975.
- [29] A. C. M. de Queiroz e L. P. Calôba, "Statistical prediction of errors in the localization of poles and zeros by sensitivity analysis", IEEE ISCAS, Vol. 4, pp. 608-611, maio de 1996.
- [30] M. Banu e Y. Tsvividis, "Fully integrated active RC filters in MOS technology", IEEE Journal of Solid-State Circuits, Vol. SC-18, pp. 664-651, dezembro de 1983.
- [31] Z. Czarnul, "Novel MOS resistive circuit for synthesis of fully integrated continuous-time filters", IEEE Transactions on Circuits and Systems, Volume 33, No. 7, pp. 718-721, julho de 1986.
- [32] A. C. M. de Queiroz e P. R. M. Pinheiro, "Exact design of switched-current ladder filters", 1992 IEEE ISCAS, San Diego, EUA, pp. 855-858, maio de 1992.
- [33] A. C. M. de Queiroz e Paulo R. M. Pinheiro, "Switching sequence effects in switched-current filters", 1993 IEEE ISCAS, Chicago, EUA, pp. 982-985, maio de 1993.

- [34] J. Schechtman, A. C. M. de Queiroz e L. P. Calôba, "Switched-current filters using component simulation", IEEE ISCAS, Londres, Inglaterra, pp. 569-572, maio de 1994.
- [35] J. Schechtman, A. C. M. de Queiroz e L. P. Calôba, "A practical implementation scheme for Component Simulation SI filters", 38th MWSCAS, Rio de Janeiro, Brasil, pp. 174-177, agosto de 1995.
- [36] J. Schechtman, A. C. M. de Queiroz e L. P. Calôba, "Switched-current filters by component simulation", Analog Integrated Circuits and Signal Processing, Vol. 13, No. 3, pp. 303-309, julho de 1997.
- [37] A. C. M. de Queiroz, "Component simulation switched-current filters using backward Euler transformation", 49th IEEE MWSCAS, San Juan, Porto Rico, pp. 245 - 248, agosto de 2006.
- [38] A. C. M. de Queiroz e J. Schechtman, "Sensitivity and error reduction by component swapping in switched-current filters", 1999 IEEE ISCAS, Orlando, EUA, vol. 2, pp. 480-483, maio de 1999.
- [39] A. C. M. de Queiroz, P. R. M. Pinheiro e L. P. Calôba, "Nodal analysis of switched-current filters", IEEE Transactions on Circuits and Systems-II, Vol. 40, No. 1, pp. 10-18, janeiro de 1993.
- [40] A. C. M. de Queiroz, L. P. Calôba e E. Sanchez-Sinencio, "Signal flow graph OTA-C integrated filters", 1988 IEEE ISCAS, Espoo, Finland, pp. 2165-2168, Junho de 1988.
- [41] A. C. M. de Queiroz, "Balanced transconductor-C ladder filters with improved linearity", 52nd MWSCAS, Cancún, México, pp. 41-44, Agosto de 2009.
- [42] A. C. M. de Queiroz e I. O. Gameleiro, "Low-distortion balanced transconductor-C ladder filters without common-mode feedback", 55th MWSCAS, Boise, EUA, pp. 97-100, Agosto de 2012.
- [43] J. Schechtman, A. C. M. de Queiroz e L. P. Calôba, "A high performance balanced MOS transconductor", 36th MWSCAS, Detroit, EUA, pp. 1378-1381, agosto de 1993.
- [44] A. C. M. de Queiroz, "Automatic adjustment of the output impedance of a balanced transconductor using a charged capacitor", 46th MWSCAS, Cairo, Egito, dezembro de 2003.
- [45] L. P. Calôba e A. C. M. de Queiroz, "OTA-C simulation of passive filters via embedding", 1989 IEEE ISCAS, Portland, EUA, pp. 1083-1086, maio de 1989.
- [46] A. C. M. de Queiroz e Luiz P. Calôba, "Some practical problems in OTA-C filters related with parasitic capacitances", 1990 IEEE ISCAS, New Orleans, EUA, pp. 2279-2282, maio de 1990.
- [47] A. C. M. de Queiroz e L. P. Calôba, "On the elimination of reactive element loops and the use of special approximations in the design of OTA-C filters", Analog Integrated Circuits and Signal Processing, Vol. 13, no. 3, pp. 311-319, julho de 1997.
- [48] A. C. M. de Queiroz e L. P. Calôba, "OTA-C filters derived from unbalanced lattice passive structures", 1993 IEEE ISCAS, Chicago, EUA, pp. 2256-2259, maio de 1993.
- [49] S. W. Director e R. A. Rohrer, "The generalized adjoint network and network sensitivities", IEEE Transactions on Circuit Theory, pp. 318-323, agosto de 1969.
- [50] A. C. M. de Queiroz, "A generalized approach to the design of multiple resonance networks", IEEE Transactions on Circuits and Systems I, Vol. 53, No. 4, pp. 918-927, abril de 2006.
- [51] A. C. M. de Queiroz, "The triple resonance network with sinusoidal excitation", 14th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems, Marrakech, Marrocos, pp. 1143-1146, dezembro de 2007. (Uma versão corrigida deste artigo: http://www.coe.ufrj.br/~acmq/papers/trsstcicecs_corrected.pdf)

- [52] A. C. M. de Queiroz, “Electrostatic vibrational energy harvesting using a variation of Bennet’s doubler”, 53rd IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems, Seattle, EUA. pp. 404-407, agosto de 2010.
- [53] A. C. M. de Queiroz e Marcelo Domingues, “The doubler of electricity used as a battery charger”, IEEE Transactions on Circuits and Systems II, Vol. 58, No. 12, pp. 787-801, dezembro de 2011.
- [54] A. C. M. de Queiroz e N. Telles de Menezes, “Energy harvesting with pairs of variable capacitors without control systems”, Analog Integrated Circuits and Signal Processing, junho de 2018.
- [55] A. C. M. de Queiroz, “Analysis of electronic electrostatic generators”, IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs, agosto (“online”) de 2018.
- [56] L. O. Chua, “Memristor - The missing circuit element”, IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. 18, No. 5, pp. 507-519, setembro de 1971.

Apêndice A

Programas de análise e síntese de circuitos

VÁRIOS programas para análise e síntese de circuitos, desenvolvidos ao longo dos projetos de pesquisa do autor, relacionados com os exemplos ao longo do texto, estão disponíveis na Internet, no endereço: <http://www.coe.ufrj.br/~acmq/programs> ou em seus próprios endereços. Alguns deles são listados abaixo. As datas são das versões originais, e muitos continuam a ser desenvolvidos.¹

- Programa SENSI, análise de sensibilidades em filtros contínuos, 1981.
Em <http://www.coe.ufrj.br/~acmq/SENSI.html>.
- Programa EDFIL, editor de diagramas esquemáticos para uso com os outros programas, 1983.
- Programa IFFT, análise de circuitos lineares em transformada de Laplace por interpolação, 1987.
Em <http://www.coe.ufrj.br/~acmq/IFFT.html>.
- Programa ELETSIM, para síntese de filtros passivos e geração de tabelas de filtros, 1990.
- Programa HK, manipulação de aproximações para filtros, 1990.
- Programa LADDER, síntese de filtros passivos em escada e “lattice”, 1990.
- Programa ASIZ, análise de filtros a corrente chaveada e a capacitores chaveados, 1991.
Em <http://www.coe.ufrj.br/~acmq/ASIZ.html>.
- Programa TESLASIM, projeto de bobinas de Tesla, 1997.
- Programa MAGSIM, projeto e simulação do “Magnifier” de Tesla, 1998.
- Programa MULTIRES, projeto e simulação de redes de múltipla ressonância, generalizações da bobina de Tesla, 1999.
- Programa MRESHP, idem, para formas passa-altas e passa-faixa, 1999.
- Programa CHEBY, projeto de filtros de Butterworth, Chebyshev e Chebyshev inverso usando fórmulas explícitas, 2003.
- Programa INCA, cálculo de indutâncias e capacitâncias para várias geometrias, 2003.
- Programa OPTESLA, otimização do circuito da bobina de Tesla, 2004.
- Programa OPTMAG, idem, para o “Magnifier” de Tesla, circuito de sexta ordem. 2004.

¹Alguns dos programas listados tratam de bobinas de Tesla e circuitos similares, mencionadas no texto.

- Programa DRSSSTCD, projeta e simula a bobina de Tesla usando a resposta ao estado zero, 2004.
- Programa TRSSSTCD, projeta e simula a versão de sexta ordem do mesmo circuito, 2005.
- Programa ELLIPTIC, projeta filtros elípticos e outros pelos métodos clássicos, 2019.

Os próximos programas são exemplos ligados ao curso de Circuitos Elétricos II. Todos estão disponíveis em <http://www.coe.ufrj.br/~acmq/cursos>, juntamente com outros materiais do curso.

- Programa MNA1, programa demonstrativo de análise nodal modificada, 2000. Duas versões com fonte.
- Programa LAPLACEMNA, análise em Transformada de Laplace, usando o método de Cramer, 2008.
- Programa MNAE, cálculo de respostas no tempo com passo fixo e análise espectral, 2003.
- Programa MNAV, análise no tempo com passo variável, 2010.
- Programa LAPELIM, análise em Transformada de Laplace usando o algoritmo da eliminação, 2010.
- Programa MNA1AMP, demonstra a análise nodal compacta, 2011. Duas versões com fonte.
- Programa FOURIER, análise no tempo através de séries de Fourier, 2013.
- Programa MNARF, análise convencional de resposta em frequência, 2014.
- Programa LAPINT, análise em Transformada de Laplace, usando interpolação de polinômios, 2015.
- Programa RFNLIN, análise de resposta em frequência de circuitos não lineares, 2016.

Apêndice B

Atualizações

ESTE texto começou a ser elaborado algo antes de 2010, e vem sendo desenvolvido desde então. A seguir está um registro das atualizações feitas desde que passou a ser usado o sistema $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ para a escrita.

- 11/6/2011 - Correções nas equações de estado.
- 1/7/2011 - Malhas, ciclos e cortes.
- 3/7/2011 - Frequências naturais.
- 19/11/2011 - Exemplo com transistor, diodos, controle de passo.
- 20/11/2011 - Mudanças na introdução.
- 29/10/2011 - Modelamentos na análise de malhas, geração das matrizes de ciclos e cortes, equações de estado.
- 06/11/2011 - Eq. de estado.
- 18/11/2011 - Exemplo de eq. de estado.
- 24/11/2011 - Polos e zeros.
- 28/11/2011 - Formação de zeros.
- 30/11/2011 - Estruturas para filtros.
- 09/12/2011 - Teoremas.
- 14/02/2012 - Exemplo de reciprocidade.
- 4/3/2011 - Aproximações, transformações de frequência.
- 9/3/2011 - Controle de passo.
- 21/3/2011 - Modelo de transformador.
- 23/3/2011 - Formas de onda da bobina de Tesla.
- 30/3/2012 - Exemplo de sistema nodal não linear, Detalhes do método de Newton-Raphson.
- 3/5/2012 - Curvas de artefato e métodos de integração. Métodos de Gear até ordem 6.
- 11/5/2012 - Método de Gear de ordem 7. Critério de estabilidade. Uniformização de notação nos métodos de integração. Elementos não lineares variantes no tempo.
- 24/5/2012 - Exemplo de eq. de estado com transformador.
- 21/11/2012 - Exemplo do teorema de Tellegen.
- 22/11/2012 - Modelo para diodo ideal.
- 26/11/2012 - Exemplo de Newton-Raphson com multiplicadores.
- 28/11/2012 - Exemplo do método de Newton-Raphson formal e usando modelo linearizado.
- 30/11/2012 - Sínteses simplesmente terminadas.
- 4/12/2012 - Exemplo de sínteses simplesmente terminadas.
- 21/12/2012 - Exemplo de circuito com transresistor.

- 18/1/2013 - Equações de estado, montagem no caso geral não linear.
- 24/1/2013 - Exemplos de frequências naturais de circuito simétrico.
- 8/4/2013 - Revisões no texto inicial e sobre análise nodal.
- 10/5/2013 - Notas sobre efeito Early, transistores PNP e PMOS e sensibilidades de redes duplamente terminadas.
- 5/7/2013 - Redes duplamente terminadas em formas simétrica e antimétrica. Exemplo do ciclo de Brune.
- 10/7/2013 - Exemplo de rede antimétrica.
- 11/7/2013 - Síntese LC duplamente terminada detalhada, Exemplos uniformizados.
- 20/7/2013 - Exemplos de simulações de filtros por equações de estado. Uniformizações nas unidades nas figuras. Exemplos de imitâncias LC.
- 22/7/2013 - Correções e adições no início da seção sobre síntese.
- 23/7/2013 - Exemplo de análise nodal no tempo de circuito não linear com elementos reativos lineares.
- 16/8/2013 - Síntese de Bott e Duffin. Análogo mecânico, “inertor”.
- 18/8/2013 - Síntese de Bott e Duffin, exemplo de dual.
- 21/8/2013 - Revisões e correções na análise nodal.
- 22/8/2013 - Revisões na análise nodal no est. perm. senoidal e transf. de Laplace.
- 24/8/2013 - Reorganização das partes e capítulos, aplicações de análise no estado permanente senoidal.
- 25/8/2013 - Algoritmos de solução para sistemas de equações lineares.
- 26/8/2013 - Aplicações e algoritmos para solução de sistemas em $j\omega$ e em transformada de Laplace.
- 27/8/2013 - Métodos para solução do sistema em transformada de Laplace.
- 28/8/2013 - Exemplo de solução de circuito em transformada de Laplace por interpolação de polinômios.
- 29/8/2013 - Exemplos com “fixator”.
- 1/9/2013 - Exemplos de deslocamentos de fontes de corrente e análise de malhas modificada.
- 4/9/2013 - Exemplo de análise de malhas modificada. Uniformização de notações para nós e malhas.
- 6/9/2013 - Método da eliminação e exemplo.
- 11/9/2013 - Exemplo de análises por ciclos e por cortes.
- 2/10/2013 - Oscilações no método dos trapézios. Mapeamento de frequências pelos métodos de integração.
- 16/10/2013 - Correções e exemplo com transformador ideal.
- 23/10/2013 - Substituição de entradas por variáveis de estado.
- 30/10/2013 - Respostas em frequência no exemplo de filtro baseado em equações de estado.
- 1/11/2013 - Figuras para redes de 2 portas. Subseções adicionais, Linhas de transmissão.
- 17/11/2013 - Notas sobre número de elementos necessários em um filtro.
- 26/11/2013 - Pequenas correções na análise de malhas e no método de síntese LC duplamente terminada.
- 29/11/2013 - Correções no exemplo de deslocamento de zeros por extração parcial de polos.
- 20/2/2014 - Correções em algumas equações, pequenas alterações no texto e figuras.
- 19/3/2014 - Exemplo de análise usando série de Fourier.
- 26/3/2014 - Exemplos de circuitos com frequências naturais a menos nas variáveis e pequenas alterações.
- 29/3/2014 - Pequenas correções de notação. Curva de histerese em indutor não linear.
- 30/3/2014 - Verificação ortográfica de acordo com as normas atuais.
- 14/4/2014 - Exemplos de análise de malhas modificada, modelamento e uso de amp. ops. na análise de malhas.
- 16/4/2014 - Uniformização de notação para \vec{i}_x e \vec{v}_x . Amp. op. em ciclos e cortes.
- 29/4/2014 - Exemplo de equações de estado em sistema não linear variante no tempo. Mudada notação para orientação de cortes.
- 27/5/2014 - Nota sobre cálculo do ganho de uma rede passa-faixa CRRC. Pequenas alterações na síntese LC dup. term.
- 15/7/2014 - Adicionada dedução das fórmulas da síntese LC duplamente terminada.

- 17/7/2014 - Adicionado exemplo de rede LC duplamente terminada realizando filtro elíptico modificado.
- 26/7/2014 - Adicionado exemplo de filtro de Butterworth de 3a. ordem LC d. t.
- 28/7/2014 - Adicionado exemplo de filtro elíptico de 4a. ordem com realização RLCM.
- 31/7/2014 - Adicionada seção sobre aproximações.
- 12/9/2014 - Revisões na síntese de redes simétricas e figuras em bitmap. Síntese com terminações arbitrárias.
- 15/8/2014 - Realizações em “lattice”.
- 11/10/2014 - Elementos reativos variantes no tempo e não lineares simulados com elementos resistivos não lineares.
- 10/11/2014 - Gráficos e alterações nas capacitâncias de diodos.
- 17/12/2014 - Várias correções.
- 24/3/2015 - Mais comentários sobre circuitos distribuídos, nota sobre polaridades e pequenas alterações.
- 25/3/2015 - Exemplo de análise modificada de ciclos e cortes. Correções.
- 26/3/2015 - Exemplo de análise de cortes com amplificadores operacionais.
- 27/3/2015 - Notas adicionais no prefácio, normalização G_m , R_m .
- 4/4/2015 - Correções no deslocamento de fontes e na resposta em frequência. Pequenas mudanças no texto. Referências em rodapé.
- 7/4/2015 - Melhores notas sobre Kirchhoff e Maxwell.
- 9/4/2015 - Modelo de canal curto para transistor MOS, tabela de transformadas de Laplace e propriedades, pequenas mudanças.
- 11/4/2015 - Exemplo do filtro de Sallen e Key. Mudança de posição do exemplo da bobina de Tesla. Referências.
- 15/4/2015 - Exemplo de resposta em frequência de transformador entre resistores. Pequenas mudanças.
- 17/4/2015 - Esta lista nos apêndices. Notas de rodapé em títulos de partes opcionais.
- 29/4/2015 - Mais detalhes nos modelos não lineares para transistores.
- 1/5/2015 - Modelos para SCR e portas lógicas. Índices n nas fórmulas para transistores MOS.
- 13/6/2015 - Modelos com derivadas para capacitores e indutores variantes no tempo e não lineares. Definição do enlace de fluxo.
- 19/6/2015 - Detalhamento do tratamento de sistemas não lineares variantes no tempo por eq. de estado. Pequenas correções.
- 21/6/2015 - Mudanças nas notas de rodapé. Menção a elementos resistivos no início.
- 26/6/2016 - Adicionado capítulo sobre análise de sensibilidades.
- 27/6/2015 - Sensibilidades de polos e zeros.
- 28/6/2015 - Exemplo de cálculo de erros por sensibilidades.
- 1/7/2015 - Exemplo de sensibilidades de zeros, exemplo de desvios de módulo, figuras bitmap com legendas na fonte small.
- 2/7/2015 - Figuras para impedâncias de meia rede de redes simétricas e antimétricas. Ex. de síntese antimétrica corrigido. Gráfico de desvios dos polos.
- 3/7/2015 - Correções e pequenas alterações de formato.
- 17/7/2015 - Exemplo de síntese RC não terminada algébrica.
- 25/7/2015 - Filtros OTA-C simulando equações de estado. Nota sobre o filtro de Chebyshev $C=2$, $L=1$, $C=2$.
- 22/9/2015 - Acrescentado capítulo sobre filtros ativos.
- 25/10/2015 - Exemplo de ajuste de ganho em cascatas de biquads.
- 27/10/2015 - Incluída seção sobre filtros ativos feitos com conversores de impedância.
- 4/11/2015 - Incluída lista de programas.
- 9/11/2015 - Incluído exemplo de filtro passa-faixa irregular construído por simulação de equações de estado.
- 14/11/2015 - Nota sobre sensibilidades dos polos e zeros do exemplo do filtro passa-faixa irregular.
- 15/11/2015 - Incluído modelo T para transformador.

- 20/11/2015 - Incluídas notas de rodapé sobre Cramer, Laplace, Tesla, Maxwell, eficiência de soluções de sistemas, métodos de integração, etc.
- 5/12/2015 - Incluídos métodos de integração de Adams-Bashforth e Adams-Moulton, com notas sobre passo variável.
- 16/12/2015 - Incluído controle de passo no método dos trapézios.
- 27/12/2005 - Incluídos exemplos com circuito de Chua para o método dos trapézios e os métodos de Gear.
- 28/12/2015 - Incluídas curvas de estabilidade para os métodos de Gear.
- 4/1/2015 - Incluídos modelos para os métodos de Adams.
- 18/1/2016 - Adicionada nota sobre a quadratura da parábola de Arquimedes.
- 21/1/2016 - Adicionado índice remissivo.
- 27/1/2016 - Nota sobre métodos preditores-corretores para resolver equações de estado.
- 30/1/2016 - Exemplo de equações de estado com eliminação da integral de convolução, com DRSSTC.
- 1/2/2016 - Detalhado o problema da eliminação de variáveis auxiliares em equações de estado não lineares.
- 5/2/2016 - Exemplo de polos e zeros em rede simétrica. Nota sobre o duplo T e ângulo mínimo de zeros.
- 13/2/2016 - Decorações, prefácio melhorado.
- 18/3/2016 - Exemplo de síntese de impedância RC ou admitância RL.
- 5/4/2016 - Figura com elementos básicos e descrição deles. Copyright.
- 20/4/2016 - Menção a atraso e atraso de grupo na resposta em frequência. Melhorado exemplo de resposta em frequência.
- 1/5/2016 - Exemplo da bobina de Tesla com análise nodal modificada, tabela de t. de Laplace, melhor capa. Mais sobre o transformador ideal, correções e melhorias de notação.
- 25/6/2016 - Correção das fórmulas para Gmb, nota sobre capacitância de diodo quando $m=1$, capacitâncias de transistores MOS.
- 6/7/2016 - Pequenas correções. Nota sobre portas lógicas com mais de duas entradas.
- 10/7/2016 - Pequenas correções. Figura mostrando variação do ganho em rede LC dup. term.
- 12/7/2016 - Pequenas alterações e correções no tratamento de circuitos resistivos não lineares.
- 13/7/2016 - Incluída seção sobre casadores ótimos de impedâncias. Nota sobre frequências naturais no infinito.
- 28/7/2016 - Incluído capítulo sobre filtros para microeletrônica, com filtros MOSFET-C.
- 10/8/2016 - Incluído material sobre "MRC".
- 31/8/2016 - Sistemas de sintonia automática em frequência.
- 2/9/2016 - Circuitos básicos OTA-C.
- 22/12/2016 - Biquad completo OTA-C.
- 26/12/2016 - Introdução sobre filtros a capacitores chaveados.
- 19/1/2017 - Análise do biquad Tow-Thomas em capacitores chaveados.
- 25/1/2017 - Biquad completo em capacitores chaveados, transformações de "s" para "z".
- 6/2/2017 - Espectro de sinais chaveados.
- 7/2/2017 - Exemplo de cascata de biquads em capacitores chaveados.
- 17/3/2017 - Rede "ladder" LDI aproximada em capacitores chaveados.
- 9/4/2017 - Rede "ladder" bilinear exata em capacitores chaveados.
- 8/6/2017 - Ponto de operação e modelo de pequenos sinais.
- 18/6/2017 - Exemplo de "ladders" bilinear e LDI aproximada em capacitores chaveados.
- 20/6/2017 - Iniciada descrição dos filtros a corrente chaveada.
- 26/6/2017 - Completados integradores de primeira e segunda geração e biquads.
- 3/7/2017 - Iniciada descrição da simulação de filtros passivos em corrente chaveada.
- 9/7/2017 - Filtro bilinear com integradores de Euler em corrente chaveada.
- 13/7/2017 - Exemplo euler2s da distribuição do programa ASIZ.

- 5/10/2017 - Modelo para transformador linear variante no tempo.
- 6/10/2017 - Modelo para transformador não linear, modelos baseados em divisores. Sempre “z” nas transformadas Z. Estimativa de passo a partir dos erros. Pequenas alterações nos métodos de integração.
- 11/10/2017 - Diodos com ηV_T . Nota sobre $q = \tau i_D$.
- 15/11/2017 - Exemplo de “Gmin stepping”. Pequenas mudanças nas eq. de estado.
- 26/11/2017 - Acrescentada realização em corrente chaveada por simulação de componentes.
- 4/12/2017 - Acrescentados todos os exemplos de corrente chaveada e simulação de componentes.
- 24/3/2018 - Corrigidas polaridades nos modelos usando amplificadores operacionais na análise nodal. Acrescentada troca de transdutores para redução de sensibilidades em filtros a corrente chaveada.
- 6/4/2018 - Nota sobre normalização em frequência e impedância.
- 11/4/2018 - Várias notas sobre transformadas de Laplace, como transformada Z, análise de estabilidade, e modelamento de fontes senoidais. Seção sobre “random walk”.
- 25/4/2018 - Correção e modificações nas figuras mostrando os métodos de integração de Euler e trapézios.
- 27/4/2018 - Método θ adicionado.
- 6/5/2018 - Equações e figuras para o método θ para capacitores e indutores.
- 2/7/2018 - Figura com reatância LC.
- 19/8/2018 - Modelo alternativo para o transresistor usando amplificadores operacionais.
- 24/8/2018 - Corrigido modelo para transformador com indutâncias de magnetização e dispersão com condições iniciais. Modelo com duas indutâncias de dispersão para transformador.
- 25/10/2018 - Pequena correção e comentários sobre sistemas de ciclos e cortes.
- 5/11/2018 - Colocado exemplo na seção sobre filtros a corrente chaveada com troca fase a fase de componentes.
- 7/11/2018 - Incluído exemplo de polos e zeros, comentário sobre cálculo de raízes de polinômio usando circuito simétrico, e pequenas mudanças.
- 10/11/2018 - Incluída seção sobre filtros OTA-C balanceados. Corrigida figura do filtro OTA-C ao fim da parte I.
- 11/11/2018 - Incluídos exemplos de filtros OTA-C balanceados e com a forma com distorção reduzida.
- 14/11/2018 - Incluída seção sobre controle de modo comum em filtros OTA-C.
- 16/11/2018 - Incluída forma de controle de modo comum para filtros OTA-C de alta frequência.
- 20/11/2018 - Incluído erro no método θ . Correção no erro do método dos trapézios com passo variável. Refeito exemplo com circuito de Chua. Erro com passo duplo para trapézios.
- 27/11/2018 - Incluída seção sobre uso do girador generalizado (“embedding”) em filtros OTA-C e escalamento de faixa dinâmica em filtros OTA-C.
- 29/11/2018 - Incluída eliminação de ciclos capacitivos em filtros OTA-C.
- 30/11/2018 - Exemplo de “lattice desbalanceada OTA-C”.
- 2/12/2018 - Redes antimétricas derivadas de redes simétricas com resistores imaginários.
- 3/12/2018 - Cálculo de sensibilidades pelo método da rede adjunta.
- 9/12/2018 - Exemplo de cálculo de sensibilidades.
- 15/12/2018 - Acrescentados filtros complexos.
- 18/12/2018 - Acrescentados circuitos de múltipla ressonância usando a resposta à entrada zero.
- 23/12/2018 - Acrescentado o dobrador de Bennet eletrônico e sua simulação.
- 28/12/2018 - Acrescentado exemplo usando indutor não linear variante no tempo.
- 29/12/2018 - Acrescentado cálculo de atraso de grupo por sensibilidades.
- 28/2/2019 - Acrescentado o memristor.
- 3/3/2019 - Pequenas correções no texto e mais comentários sobre aproximações.
- 4/3/2019 - Incluído exemplo da dedução de caso particular da aproximação de Bessel e exemplo de aproximação elíptica, com mais alguns detalhes.
- 11/3/2019 - Incluído método clássico da aproximação elíptica, com exemplo.

- 14/3/2019 - Notas sobre filtros elípticos de Q mínimo melhoradas.
- 15/3/2019 - Fórmulas para os polos da aproximação de Chebyshev inversa incluídas, com exemplo. Exemplos das aproximações de Butterworth e Chebyshev.
- 17/3/2019 - Curvas de módulo para aproximações tipo Butterworth, Chebyshev, Chebyshev inverso e elíptica.
- 20/3/2019 - Mais detalhes sobre aproximações elípticas.
- 10/4/2019 - Corrigida figura 1.38.
- 13/4/2019 - Corrigido exemplo de projeto de filtro elíptico clássico, acrescentadas mais notas, e acrescentada figura com módulos na banda passante para as aproximações clássicas.
- 16/4/2019 - Acrescentadas fórmulas para os pólos da aproximação elíptica.
- 19/4/2019 - Acrescentados exemplos de filtros elípticos. Urls funcionais.
- 22/4/2019 - Tornados mais consistentes os índices de polos e zeros das aproximações. Pequenas correções.
- 15/5/2019 - Citado o programa Elliptic.
- 27/5/2019 - Corrigido exemplo de amplificadores operacionais no método dos cortes.
- 30/5/2019 - Completada a análise no exemplo de amplificadores operacionais no método dos cortes com cálculo de correntes e o método dos ciclos.
- 31/5/2019 - Incluídas estampas da análise de malhas modificada, com adaptações e correção nos modelos equivalentes.
- 2/6/2019 - Mudadas direções de correntes no exemplo de análise de malhas modificada.
- 11/6/2019 - Notas sobre direções de correntes na análise de malhas modificada.
- 14/6/2019 - Nota sobre ciclos definidos por capacitores e cortes definidos por indutores. Pequenas correções.

Índice Remissivo

- Árvore, 167
- Árvore não normal, 186
- Árvore normal, 182

- Acoplamento cerrado, 59
- Admitância, 25
- Ajuste de ganho em biquads, 352
- Aliasing, 403
- Amostragem com retenção, 402
- Amostragem impulsional, 402
- Amplificador de corrente, 12
- Amplificador de corrente não linear, 80
- Amplificador de tensão, 12
- Amplificador de tensão não linear, 79
- Amplificador operacional, 65
- Amplificador operacional na análise de malhas, 164
- Amplificador operacional nas análises de ciclos e cortes, 174
- Análise das malhas, 155
- Análise das malhas modificada, 160
- Análise de sensibilidades, 326
- Análise dos ciclos, 168
- Análise dos ciclos modificada, 172
- Análise dos cortes, 168
- Análise dos cortes modificada, 172
- Análise dos integradores a capacitores chaveados, 404
- Análise no estado permanente senoidal, 23
- Análise no tempo de circuitos lineares variantes no tempo, 129
- Análise no tempo de circuitos não lineares, 136
- Análise no tempo de circuitos não lineares variantes no tempo, 144
- Análise nodal com modelos baseados em amp. operacionais, 70
- Análise nodal compacta com amp. operacionais, 68
- Análise nodal de circuitos resistivos, 12
- Análise nodal de circuitos resistivos não lineares, 75
- Análise nodal em transformada de Laplace, 35
- Análise nodal modificada, 53
- Análise nodal modificada com modelos, 54
- Análise nodal não linear, 13
- Análise nodal no domínio do tempo, 102
- Análise nodal sistemática, 14
- Análise nodal, formalização, 18
- Análise simplificada de circuitos a capacitores chaveados, 406
- Análogos mecânicos, 248
- Aproximação com atraso de grupo tipo Chebyshev, 310
- Aproximação de Bessel, 309
- Aproximação de Butterworth, 285
- Aproximação de Cauer, 293
- Aproximação de Chebyshev, 286
- Aproximação de Chebyshev inversa, 292
- Aproximação de Zolotarev, 296
- Aproximação elíptica, 293
- Aproximação polinomial, 285
- Aproximação polinomial inversa, 285
- Aproximação por função característica, 283
- Aproximação racional simétrica, 285
- Aproximações, 211, 283
- Atraso, 30
- Atraso de grupo, 30, 309, 337
- Autovalores e autovetores, 189

- Biquad de Akerberg e Mossberg, 341
- Biquad de Tow e Thomas, 340, 400
- Biquads a corrente chaveada, 427
- Biquads baseados no duplo T, 350
- Biquads com amplificador inversor e múltipla realimentação, 346
- Biquads com três amplificadores operacionais, 340
- Biquads com um amplificador operacional, 342
- Biquads de Sallen e Key, 30, 343
- Biquads em capacitores chaveados, 400, 408
- Biquads OTA-C, 396
- Bobina de indução, 316
- Bobina de indução generalizada, 316
- Bobina de Tesla, 39, 60, 313

- Bobina de Tesla generalizada, 313
 Bobina de Tesla usando a resposta ao estado zero, 191, 320
- Cálculo de frequências naturais, 204
 Caminhada randômica, 85
 Capacitância de um diodo semicondutor, 138
 Capacitâncias de transistores bipolares, 140
 Capacitâncias de transistores MOS, 140
 Capacitor, 12
 Capacitor controlado a tensão, 141
 Capacitor em transformada de Laplace, 37
 Capacitor linear invariante no tempo, 104, 126
 Capacitor linear variante no tempo, 129, 145
 Capacitor não linear, 137, 145
 Capacitores chaveados, 399
 Capacitores no estado permanente senoidal, 25
 Casadores de impedância, 307
 Chua, *veja* Circuito de Chua
 Ciclo de Brune, 241
 Ciclo fundamental, 167
 Circuito de Chua, 122, 129
 Circuito trifásico, 29
 Circuitos simétricos, 205
 Coeficiente de acoplamento, 25
 Constante de propagação, 28, 38
 Controle de convergência, 84
 Controle de modo comum, 394
 Controle do passo, 110
 Conversor de tensão de porta para corrente de terminal, 384
 Corrente, 10
 Corrente chaveada, 423
 Corrente de deslocamento, 11
 Correntes de ciclo, 167
 Correntes de malha, 155
 Corte fundamental, 167
- Deslocamento de fontes de corrente, 159
 Deslocamento de fontes de tensão, 49
 Deslocamento de zeros em redes LC duplamente terminadas, 273
 Deslocamento de zeros por extração parcial de polo, 251
 Deslocamento pela malha externa, 159
 Deslocamento pela terra, 50
 Desnormalização em corrente chaveada, 427
 Desvios estatísticos, 327
 Diodo ideal, 88
 Diodos lineares por partes, 87
- Direções associadas de tensão e corrente, 15
 Divisores que não formam zeros, 208
 Dobrador de Bennet, 131
 Dobrador de Bennet eletrônico, 132
 Dobrador de Bennet indutivo, 134
 Dobrador de eletricidade, 131
 DRSSTC, 190, 325
 Dualidade entre análises de nós e malhas, 163
 Duplo T, 208
- Efeito Early, 91
 Elementos básicos, 12
 Eliminação da integral de convolução, 190
 Eliminação de capacitores suspensos, 385
 Equações de estado, 178
 Equações de estado, como escrever, 179
 Equações de estado, solução exata, 187
 Equalizadores de fase, 312
 Equivalente Norton, 49
 Equivalente Thévenin, 159
 Erro no método θ , 121
 Erro no método dos trapézios, 121
 Escalamento de faixa dinâmica em corrente chaveada, 429
 Escalamento de faixa dinâmica em filtros OTA-C, 388
 Escalamento em frequência e impedância, 213
 Estabilidade dos métodos de Adams, 119
 Estabilidade dos métodos de Gear, 126
 Estampa da fonte de corrente, 21
 Estampa da fonte de tensão, 55
 Estampa do amplificador de corrente, 55
 Estampa do amplificador de tensão, 55
 Estampa do capacitor, 26, 37
 Estampa do indutor, 26, 37
 Estampa do indutor com corrente calculada, 57
 Estampa do resistor, 20
 Estampa do transcondutor, 21
 Estampa do transformador, 26, 37, 60
 Estampa do transformador ideal, 58
 Estampa do transresistor, 55
 Estampas para análise de malhas, 158
 Estampas para análise de malhas modificada, 162
 Estruturas para filtros, 210
 Exponencial de matriz, 190
- Fasores, 24
 FDNR, 362
 Filtro “leapfrog”, 194
 Filtro com capacitores cruzados, 196

- Filtro com zeros duplos de atenuação, 305
 Filtro elíptico de ordem par, 273
 Filtros “MRC”, 376
 Filtros a capacitores chaveados, 398
 Filtros a corrente chaveada, 423
 Filtros a corrente chaveada por simulação de componentes, 433
 Filtros ativos, 339
 Filtros balanceados OTA-C, 389
 Filtros complexos, 370
 Filtros MOSFET-C, 374
 Filtros OTA-C, 199, 381
 Filtros OTA-C balanceados com distorção reduzida, 392
 Filtros para microeletrônica, 374
 Fixador, 66
 Fontes não lineares controladas por várias variáveis, 81
 Forma direta em corrente chaveada, 435
 Forma modulada em corrente chaveada, 435
 Formas de Cauer LC, 229
 Formas de Cauer RC, 233
 Formas de Cauer RL, 235
 Formas de Foster LC, 228
 Formas de Foster RC, 233
 Formas de Foster RL, 234
 Frequência natural em zero, 203
 Frequência natural no infinito, 208
 Frequências naturais, 44, 202
 Frequências naturais de modo comum, 378, 391
 Frequências naturais de uma variável, 204
 Função característica, 283
 Função característica por otimização, 303
 Função de transdução, 283
- Gerador de impulso eletromagnético, 134
 GIC, 358
 Girador multiporta, 384
 Girador OTA-C, 381
 Grafo, 14
 Grafos não planares, 167
- Histerese, 142, 154
- Imitâncias LC, 227
 Imitâncias RC e RL, 232
 Imitâncias RLCM, 241
 Impedância, 25
 Impedância característica, 28, 38
 Indutância mútua, 25
- Indutâncias recíprocas, 25, 40
 Indutor, 12
 Indutor em transformada de Laplace, 37
 Indutor linear invariante no tempo, 105, 127
 Indutor linear variante no tempo, 145
 Indutor não linear, 142, 145
 Indutor simulado OTA-C, 381
 Indutores no estado permanente senoidal, 25
 Inerter, 248
 Inicialização e avanço da análise no tempo, 136
 Integrador bilinear a capacitores chaveados, 420
 Integradores a capacitores chaveados, 399
 Integradores a corrente chaveada de primeira geração, 423
 Integradores a corrente chaveada de segunda geração, 426
 Interpolação por “Fast Fourier Transform”, 47
- Lattice de resistência constante, 278
 Lattice desbalanceada, 279, 387
 Lei de Ampère, 11
 Lei de Faraday, 11
 Leis de Kirchhoff, 10
 Leis de Maxwell, 10
 Linhas de transmissão, 28, 38
- Máquina de Wimshurst, 131
 Método θ , 114
 Método “backward”, ou implícito, de Euler, 102
 Método “forward”, ou explícito, de Euler, 102
 Método de Adams-Moulton com passo variável, 117
 Método de Cramer, 23
 Método de Gauss-Jordan, 22
 Método de Heun, 178
 Método de Newton-Raphson, 76
 Método dos trapézios com passo variável, 120
 Método dos trapézios modificado, 114
 Método dos trapézios, ou integração bilinear, 103
 Métodos de Adams-Bashforth, 116
 Métodos de Adams-Moulton, 116
 Métodos de Gear, 124
 Métodos de Gear com ordem e passo variáveis, 128
 Métodos preditores-corretores, 178, 185
 Malha, 155
 Malha externa, 155
 Matriz de condutância dos cortes, 170
 Matriz de condutância dos nós, 18
 Matriz de resistência das malhas, 157
 Matriz de resistência dos ciclos, 169

- Memórias de corrente chaveada de primeira geração, 423
- Memórias de corrente chaveada de segunda geração, 425
- Memórias falsas, 112
- Memristor, 153
- Modelamento, 86
- Modelo alternativo para o transresistor, 72
- Modelo comportamental, 95
- Modelo de Ebers-Moll, 89
- Modelo de nível 1, 92
- Modelo de pequenos sinais, 99
- Modelo de Shichman-Hodges, 92
- Modelo nullator-norator, 65
- Modelo para canal curto, 94
- Modelo simplificado para o transresistor, 72
- Montagem direta do sistema das malhas, 158
- Montagem direta do sistema dos ciclos, 171
- Montagem direta do sistema dos cortes, 171
- Montagem direta do sistema nodal, 19
- Montagem do sistema nodal por estampas, 20
- Montagem sistemática do sistema de equações de estado, 182
- Nó, 12
- Netlist de malhas, 158
- Netlist nodal, 21
- NIC, 355
- Normalização em frequência e impedância, 49
- Oscilação trapezoidal, 112
- Oscilador LC, 114
- Oscilador paramétrico, 150
- OTA, amplificador operacional de transcondutância, 381
- Parâmetros ABCD, 225
- Parâmetros h e g , 221
- Parâmetros Y , 221
- Parâmetros Z , 221
- Passo variável, 110
- Planaridade, 167
- Polaridades elétricas, 15
- Polos e zeros, 206
- Ponto de operação, 99
- Portas, 201
- Portas lógicas, 96
- Predistorção em frequência, 411
- Propriedades das impedâncias e admitâncias RLCM, 227
- Propriedades dos circuitos lineares invariantes no tempo, 201
- Quadratura da parábola de Arquimedes, 120
- Ramo, 12
- Random walk, 85
- Razão áurea, 149
- Realização com terminações arbitrárias, 275
- Realização de imitâncias RC e RL, 233
- Realização em "lattice", 276
- Realização LC simplesmente terminada, 248
- Realizações em cascata de biquads, 339
- Reatância, 25
- Rede "ladder", 208, 253
- Rede "ladder" bilinear exata em capacitores chaveados com integradores de Euler, 416
- Rede adjunta, 331
- Rede de dupla ressonância, 325
- Redes de duas portas, 220
- Redes de múltipla ressonância, 313
- Redes simétricas com resistores imaginários, 265
- Redução de sensibilidades, 439
- Resistor, 12
- Resistor controlado a corrente, 56
- Resistor não linear, 75, 77
- Resposta à entrada zero, 39, 203
- Resposta ao estado zero, 39, 203
- Resposta completa, 39
- Resposta em frequência, 30, 202
- Síntese de Bott e Duffin, 244
- Síntese de Brune, 241
- Síntese de circuitos passivos, 227
- Síntese de redes antimétricas, 263
- Síntese de redes simétricas, 258
- Síntese LC duplamente terminada, 256
- Síntese LC duplamente terminada, caso geral, 267
- Síntese não terminada, 236
- Sensibilidades de módulo e fase, 327
- Sensibilidades de polos e zeros, 329
- Sensibilidades em filtros OTA-C, 383
- Simetria, 205
- Simulação de redes passivas em corrente chaveada, 429
- Simulação por equações de estado de filtros passivos, 193, 364
- Simulação Redes "ladder" em capacitores chaveados, 414
- Sinais em filtros chaveados, 401

- Sintonia automática, 379
- Sintonia com filtro controlado a tensão, 380
- Sintonia com oscilador, 379
- Subamostragem, 403
- Susceptância, 25

- Tensão, 10
- Tensões de corte, 167
- Tensões nodais, 12
- Teorema da biseção, 279
- Teorema da reciprocidade, 222
- Teorema da substituição, 218
- Teorema da superposição, 218
- Teorema de Tellegen, 16
- Teoremas de Thévenin e Norton, 218
- Tiristor, 95
- Transcondutor, 12
- Transcondutor não linear, 75, 78
- Transformação “backward” de Euler, 410
- Transformação “forward” de Euler, 410
- Transformação bilinear, 410, 416
- Transformação CR-RC, 349
- Transformação LDI, 410
- Transformação passa-baixas - passa-altas, 214
- Transformação passa-baixas - passa-faixa, 214
- Transformação passa-baixas - rejeita-faixa, 214
- Transformações de “s” para “z”, 410
- Transformações de frequência, 213
- Transformada de Laplace, 36
- Transformada Z, 36, 400
- Transformador em transformada de Laplace, 37
- Transformador ideal, 57
- Transformador linear invariante no tempo, 107, 127
- Transformador linear variante no tempo, 135, 147
- Transformador não linear, 143
- Transformador no estado permanente senoidal, 25
- Transistores bipolares, 89
- Transistores MOS, 92
- Transresistor, 12
- Transresistor não linear, 80

- Vetor de fontes de corrente nos cortes, 170
- Vetor de fontes de corrente nos nós, 18
- Vetor de fontes de tensão nas malhas, 157
- Vetor de fontes de tensão nos ciclos, 169

- Zeros de atenuação, 211
- Zeros de transmissão, 211
- Zeros em redes em escada, 208